Elem. Math. 72 (2017) 131 – 134
0013-6018/17/030131-4
DOI 10.4171/EM/336

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2018 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1365: Eine natürliche Zahl heisst Isozahl, wenn in ihrer Dezimaldarstellung alle Ziffern gleich sind. Man beweise, dass jede natürliche Zahl n der Länge L, d.h. $10^{L-1} \leq n \leq 10^L$, sich darstellen lässt als Summe von höchstens $L+1$ Isozahlen.

Jürgen Spilker, Stegen, D

Aufgabe 1366: Sei F_0 die Fläche des kleinsten gleichseitigen Dreiecks, welches in einem Dreieck mit der Fläche F einbeschrieben ist. Man zeige $4 \cdot F_0 \leq F$.

Gheorghe Bercea, München, D

Aufgabe 1367 (Die einfache dritte Aufgabe): Sei $ABCDEFG$ ein regelmässiges Siebeneck. Beweise, dass

$$\frac{AD^3}{AC^3} + \frac{2AB - AC}{AB + AD} = 2.$$

Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, SRB

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2016

Aufgabe 1353. Man bestimme den Wert von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n/2}}{n(n+1)},$$

wobei $H_s = \int_0^1 \frac{1-x^s}{1-x}\,dx$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $s > -1$ die verallgemeinerten harmonischen Zahlen sind.

Daniel Fritze, Berlin, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden 12 Lesern eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Jean-Paul Kunsch (Zürich, CH), Jürgen Spilker (Stegen, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser gehen ähnlich vor und führen das Bestimmen der Summe auf das Lösen eines mehr oder weniger bekannten Integrals zurück. Wir folgen den Ausführungen von *Jürgen Spilker*, der die Summe durch einen Limesprozess berechnet.

Die gegebene Reihe S konvergiert wegen $H_s \le c\log(s),\ s \ge 2$. Sei N eine natürliche Zahl und

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{H_{n/2}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{H_{n/2}}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{H_{n/2}}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{H_{n/2}}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{H_{(n-1)/2}}{n} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} I_n\right) - \frac{H_{N/2}}{N+1} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{x^{(n-1)/2} - x^{n/2}}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{(n-1)/2}}{1+x^{1/2}}\,dx = 2\int_0^1 \frac{y^n}{1+y}\,dy \\ &= 2\int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m y^{n+m}\,dy = 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m+n+1} \end{aligned}$$

und daher

$$\frac{1}{n} I_n = 2\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \mp \dots\right).$$

Für die zu bestimmende Summe ergibt sich

$$\begin{aligned} S &= \lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} I_n = 2\sum_{\substack{m,n=1\\ m<n}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+1}}{mn} = -\sum_{\substack{m,n=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{mn} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{\pi^2}{6} - \log(2)^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 1354. Sei p eine Primzahl und seien l, s, t natürliche Zahlen. Beweise, dass

$$\binom{sp^l}{tp} \equiv \binom{sp^{l-1}}{t} \mod p^l.$$

Juliane Hansmann, Kiel, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 7 Leser haben Beiträge zugesandt: Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Mehrheit der Löser teilen im Binomialkoeffizienten links die Faktoren im Zähler und Nenner in durch p teilbare und nicht durch p teilbare auf und kommen so sehr direkt zum Ziel. Wir folgen der Lösung von *Frieder Grupp*, der das schnörkellos darlegt.

In $\binom{sp^l}{tp}$ werden die Faktoren der Produkte so angeordnet, dass die durch p teilbaren und die nicht durch p teilbaren Faktoren getrennt aufgelistet werden.

$$\binom{sp^l}{tp} = \frac{\prod\limits_{r=0}^{tp-1}(sp^l - r)}{\prod\limits_{r=0}^{tp-1}(tp - r)} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{t-1}(sp^l - kp) \cdot \prod\limits_{k=0}^{t-1}\prod\limits_{r=1}^{p-1}(sp^l - (kp + r))}{\prod\limits_{k=0}^{t-1}(tp - kp) \cdot \prod\limits_{k=0}^{t-1}\prod\limits_{r=1}^{p-1}(tp - (kp + r))}$$

$$= \frac{\prod\limits_{k=0}^{t-1}(sp^{l-1} - k) \cdot \prod\limits_{k=0}^{t-1}\prod\limits_{r=1}^{p-1}(sp^l - (kp + r))}{\prod\limits_{k=0}^{t-1}(t - k) \cdot \prod\limits_{k=0}^{t-1}\prod\limits_{r=1}^{p-1}(tp - (kp + r))} = \binom{sp^{l-1}}{t} \cdot \frac{\prod\limits_{k=0}^{t-1}\prod\limits_{r=1}^{p-1}(sp^l - (kp + r))}{\prod\limits_{k=0}^{t-1}\prod\limits_{r=1}^{p-1}(tp - (kp + r))}.$$

Bringt man den Nenner rechts auf die linke Seite und ändert die Laufvariable $k \to t - k$ im äusseren Produkt, so ergibt sich

$$\binom{sp^l}{tp} \prod_{k=1}^{t}\prod_{r=1}^{p-1}(kp - r) = \binom{sp^{l-1}}{t} \prod_{k=0}^{t-1}\prod_{r=1}^{p-1}(sp^l - (kp + r)).$$

Betrachtet man diese Gleichung modulo p^l, so erhält man

$$\binom{sp^l}{tp} \cdot m \equiv \binom{sp^{l-1}}{t} \cdot (-1)^{(p-1)t} m \mod p^l$$

mit $m = \prod_{k=1}^{t}\prod_{r=1}^{p-1}(kp - r) = \prod_{k=0}^{t-1}\prod_{r=1}^{p-1}(kp + r)$, denn beide Produkte erstrecken sich über die nicht durch p teilbaren Zahlen von 1 bis $tp - 1$.

Ist $(p - 1)t$ gerade, so erhält man sofort die Behauptung da $p \nmid m$. Ist $(p - 1)t$ ungerade, also $p = 2$ und t ungerade, so gilt aus dem gleichen Grund die erste Äquivalenz von

$$\binom{s2^l}{2t} \equiv -\binom{s2^{l-1}}{t} \equiv \binom{s2^{l-1}}{t} \mod 2^l.$$

Die zweite Äquivalenz ergibt sich aber aus

$$2t\binom{s2^{l-1}}{t} = s2^l\binom{s2^{l-1}-1}{t-1} \equiv 0 \mod 2^l,$$

weil $2 \nmid t$.

Bemerkung: Ein Leser fügt an, dass eine Verallgemeinerung (für $p > 3$) als Problem E464 von Emma Lehmer in *American Mathematical Monthly*, Vol. 48, No. 3 (Mar. 1941), p. 210, erschienen ist.

Aufgabe 1355 (Die einfache dritte Aufgabe). Auf wie viele Arten lassen sich die weissen, quadratischen Felder eines in der Ebene fixierten $m \times n$-Gitters ($m, n \in \mathbb{N}$) derart mit schwarzer Farbe bemalen, dass die entstandene Figur Zentralsymmetrie (bezüglich der Rechtecksmitte) aufweist?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 8 Lesern sind Lösungen eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Josef Züger (Bonaduz, CH).

Es ist allen Lösern klar, dass man für die „Hälfte" des Rechtecks die Färbung frei wählen kann und dann punktsymmetrisch ergänzt. Wir folgen der Lösung von *Fritz Siegerist*.

Die Felder bilden zentralsymmetrische Paare, deren Farbe einheitlich schwarz oder weiss ist; eine Ausnahme bildet das Feld in der Rechtecksmitte, wenn mn ungerade ist. Die Anzahl der gesuchten Bemalungen (inklusive Nicht-Bemalung) ist, als Zahl von Variationen zweier Farben mit Wiederholungen, somit

$$2^{\frac{mn}{2}}, \text{ wenn } mn \text{ gerade ist,} \qquad 2 \cdot 2^{\frac{mn-1}{2}} = 2^{\frac{mn+1}{2}}, \text{ wenn } mn \text{ ungerade ist.}$$

Oder mit der aufrundenden Gaussklammer zusammengefasst $2^{\lceil \frac{mn}{2} \rceil}$.

Bemerkung: *Jany C. Binz* verallgemeinert auf k Farben und erhält das entsprechende Resultat mit $k+1$ anstelle von 2.