

---

---

## Über ein Theorem von Hans Läuchli

---

---

Lorenz Halbeisen

Lorenz Halbeisen hat sowohl seine Diplomarbeit wie auch seine Doktorarbeit unter der Leitung von Hans Läuchli geschrieben. Nach Forschungsaufenthalten in Caen, Barcelona und Berkeley war er zuerst Lecturer an der Queen's University Belfast und hat dann an den Kantonsschulen von Frauenfeld und Wetzikon unterrichtet. Seit 2014 ist er Senior Scientist auf dem Gebiet der mathematischen Logik und Mengenlehre an der ETH Zürich.

### 1 Färben von Graphen

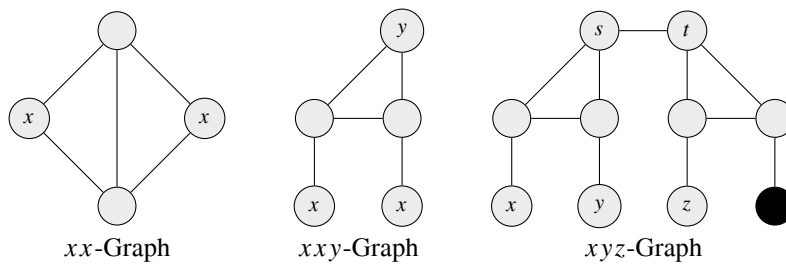
Ein Graph  $G = (V, E)$  besteht aus einer Menge  $V$  von *Knoten* zusammen mit einer Menge  $E$  von *Kanten* zwischen den Knoten, *d.h.*  $E$  ist eine Menge von 2-elementigen Teilmengen von  $V$ . Ist  $G = (V, E)$  ein Graph und  $A \subseteq V$  eine Menge von Knoten von  $G$ , so bezeichnet  $G|_A$  den Teilgraphen  $G = (A, E_A)$  mit der Knotenmenge  $A$  und der Kantenmenge

$$E_A = \{\{x, y\} : x, y \in A \text{ und } \{x, y\} \in E\}.$$

Ein Graph  $G = (V, E)$  heisst *n-färbbar* falls es eine Färbung  $F : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$  gibt, so dass für alle Kanten  $\{x, y\} \in E$  gilt:  $F(x) \neq F(y)$ . Als Beispiele für 3-färbbare Graphen schauen wir uns die folgenden drei speziellen Graphen an, die später eine wesentliche

Für natürliche Zahlen  $n$  sei  $P_n$  die folgende Aussage: Ist  $G$  ein unendlicher Graph, dessen endliche Teilgraphen allesamt  $n$ -färbbar sind, so ist auch  $G$  selber  $n$ -färbbar. 1961 hat Jan Mycielski gezeigt, dass  $P_n$  (für beliebige  $n$ ) aus dem Primidealtheorem folgt. Umgekehrt gelang es Hans Läuchli 1971 zu zeigen, dass das Primidealtheorem aus  $P_3$  folgt, womit also für alle natürlichen Zahlen  $m, n \geq 3$  erstaunlicherweise gilt:  $P_m \Leftrightarrow P_n$ . Der Beweis, den Läuchli gegeben hat, ist relativ kompliziert, und am Schluss seines Beweises stellt er die Aufgabe, einen direkten Beweis für  $P_3 \Rightarrow P_4$  zu finden (also ohne das Primidealtheorem zu benutzen). Dem Autor der vorliegenden Arbeit gelingt nun just dieser Beweis.

Rolle spielen und die wir mit den “Farben” grau (g), schwarz (s) und weiss (w) färben werden:



Da jeder der drei Graphen ein Dreieck enthält, ist keiner dieser Graphen 2-färbbar. Andererseits sind, wie man sich leicht überzeugt, alle drei Graphen 3-färbbar. Weiter sehen wir, dass die Graphen folgende Eigenschaften haben:

- Bei jeder 3-Färbung des  $xx$ -Graphen haben die beiden mit  $x$  bezeichneten Knoten dieselbe Farbe. Wird also z.B. einer der beiden Knoten  $x$  mit  $w$  gefärbt, so wird bei einer 3-Färbung auch der andere Knoten  $x$  mit  $w$  gefärbt.
- Werden bei einer 3-Färbung des  $xxy$ -Graphen die beiden mit  $x$  bezeichneten Knoten mit derselben Farbe gefärbt, so hat auch der Knoten  $y$  diese Farbe. Werden also z.B. die mit  $x$  bezeichneten Knoten mit  $s$  gefärbt, so wird bei einer 3-Färbung auch der Knoten  $y$  mit  $s$  gefärbt.
- Bei einer 3-Färbung des  $xyz$ -Graphen können die Knoten  $x, y, z$  nicht alle mit  $s$  gefärbt werden, da sonst wegen der Eigenschaft des  $xxy$ -Graphen auch die beiden Knoten  $s$  und  $t$  mit  $s$  gefärbt würden, was aber der Definition einer 3-Färbung widerspricht. Werden also z.B. die Knoten  $x$  und  $y$  mit  $s$  gefärbt, so kann bei einer 3-Färbung der Knoten  $z$  *nicht* mit  $s$  gefärbt werden.

**Bemerkung.** An dieser Stelle sei erwähnt, dass der  $xyz$ -Graph von STOCKMEYER [4] benutzt wurde um zu zeigen, dass das Problem der 3-Färbbarkeit eines endlichen Graphen NP-vollständig ist, bzw. dass es im Wesentlichen gleich schwierig ist wie das sogenannte 3-SAT-Problem.

Kommen wir nun zu LÄUCHLIS Theorem, bzw. zur Aussage  $P_n$  (für natürliche Zahlen  $n$ ):

$P_n$ : Ist  $G = (V, E)$  ein unendlicher Graph, so dass für alle endlichen Teilmengen  $A \subseteq V$  der Graph  $G|_A$   $n$ -färbbar ist, so ist auch  $G$  selber  $n$ -färbbar.

MYCIELSKI [3] hat gezeigt, dass  $P_n$  (für beliebige  $n$ ) aus dem Primidealtheorem folgt, wobei das Primidealtheorem eine abgeschwächte Form des Auswahlaxioms ist. Umgekehrt gelang es LÄUCHLI [2] zu zeigen, dass das Primidealtheorem aus  $P_3$  folgt, womit also für alle natürlichen Zahlen  $m, n \geq 3$  gilt:  $P_m \Leftrightarrow P_n$ . Der Beweis, den LÄUCHLI gegeben hat, ist relativ kompliziert, und am Schluss seines Beweises stellt er die Aufgabe, einen direkten Beweis für  $P_3 \Rightarrow P_4$  zu finden. Im nächsten Abschnitt lösen wir nun diese Aufgabe indem wir die Implikation  $P_3 \Rightarrow P_n$  (für  $n \geq 2$ ) direkt beweisen. Die Hauptideen unseres Beweises sind im Wesentlichen dieselben wie in COWEN [1, Theorem 4], der

LÄUHLIS Theorem mit Hilfe des  $xyz$ -Graphen gezeigt hat, ausser dass unser Ziel nicht die Herleitung des Primidealtheorems aus  $P_3$  ist, sondern direkt die Aussage  $P_n$ , ohne das Primidealtheorem zu erwähnen.

## 2 $P_3 \Rightarrow P_n$ für alle $n \geq 2$

Um die Implikation  $P_3 \Rightarrow P_2$  zu zeigen nehmen wir einen beliebigen Graphen  $G = (V, E)$ , all dessen endliche Teilgraphen 2-färbbar sind, und zeigen, dass unter der Annahme  $P_3$  der ganze Graph  $G$  2-färbbar ist. Dazu fügen wir zu  $V$  einen weiteren Knoten  $z$  hinzu und erweitern die Kantenmenge  $E$  mit den Kanten  $\{(x, z) : x \in V\}$ . Der so erhaltene Graph  $G_z$  hat die Eigenschaft, dass jeder endliche Teilgraph 3-färbbar ist. Mit  $P_3$  ist also der ganze Graph  $G_z$  3-färbbar. Da nun jede 3-Färbung von  $G_z$  eine 2-Färbung von  $G$  ist, ist  $G$  2-färbbar, und weil  $G$  beliebig war, erhalten wir  $P_2$ .

Um die Implikation  $P_3 \Rightarrow P_n$  (für  $n > 3$ ) zu zeigen, müssen wir etwas weiter ausholen: Sei  $G = (V, E)$  ein unendlicher Graph (*d.h.*  $V$  ist unendlich), so dass für alle endlichen Teilmengen  $A \subseteq V$  der Graph  $G|_A$   $n$ -färbbar ist. Mit Hilfe von  $P_3$  zeigen wir, dass auch  $G$  selber  $n$ -färbbar ist. Dazu konstruieren wir aus  $G$  zuerst einen Graphen  $G_3$ , und zeigen mit  $P_3$ , dass dieser Graph 3-färbbar ist. Mit einer 3-Färbung von  $G_3$  konstruieren wir schliesslich eine  $n$ -Färbung von  $G$ .

Zuerst konstruieren wir also den Graphen  $G_3 = (V_3, E_3)$ : Dazu sei  $S$  die Menge aller Funktionen  $f : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Die Menge  $S$  kann aufgefasst werden als die Menge aller möglichen Färbungen der Knotenmenge  $V$  mit  $n$  Farben. Wir betrachten nun jede Teilmenge  $u \subseteq S$  als einen Knoten in  $V_3$ :

$$\{u : u \subseteq S\} \subseteq V_3$$

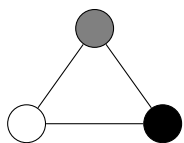
Nun fügen wir erste Kanten hinzu, indem wir jeden Knoten  $u \subseteq S$  mit seinem Komplement  $\bar{u} := S \setminus u$  verbinden:

$$\{\{u, \bar{u}\} : u \subseteq S\} \subseteq E_3$$



Weiter zeichnen wir einen Graphen, der aus drei Knoten und drei Kanten besteht; die Knoten dieses Graphen färben wir mit den drei "Farben" grau (g), schwarz (s) und weiss (w):

$$\{\{g, s\}, \{s, w\}, \{w, g\}\} \subseteq E_3$$

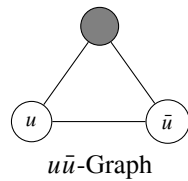


Fundamentaldreieck

Vom grauen Knoten des Fundamentaldreiecks ziehen wir nun Kanten zu jedem Knoten  $u \subseteq S$ :

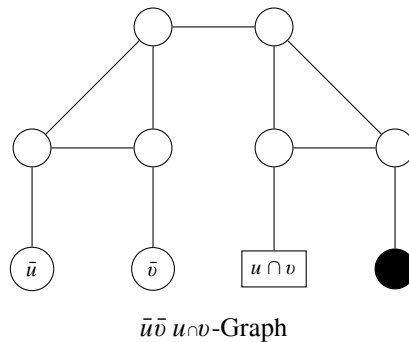
$$\{\{g, u\} : u \subseteq S\} \subseteq E_3$$

Für jedes  $u \subseteq S$  (bzw.  $\bar{u} \in S$ ) enthält  $G_3$  somit folgenden Teilgraphen:



Wird dieser Teilgraph mit unseren drei Farben gefärbt, so wird einer der Knoten  $u, \bar{u}$  schwarz und der andere weiss gefärbt.

Weiter fügen wir für jeweils zwei verschiedene Mengen  $u, v \subseteq S$  einen  $xyz$ -Graphen an, wobei wir den schwarz gefärbten Knoten mit dem schwarz gefärbten Knoten des Fundamentaldreiecks identifizieren:



Wird dieser Graph mit unseren drei Farben gefärbt, so haben, wegen der Eigenschaft des  $xyz$ -Graphen, nicht alle drei Knoten  $\bar{u}, \bar{v}, u \cap v$  die Farbe schwarz. Andererseits werden die Knoten  $\bar{u}, \bar{v}, u \cap v$ , weil  $\bar{u}, \bar{v}, u \cap v$  Teilmengen von  $S$  sind, durch die  $u\bar{u}$ -Graphen entweder mit schwarz oder weiss gefärbt. Somit wird bei einer 3-Färbung des ganzen Graphen  $G_3$  mindestens einer der Knoten  $\bar{u}, \bar{v}, u \cap v$  weiss gefärbt.

Im letzten Schritt der Konstruktion von  $G_3$  fügen wir  $xx$ -Graphen hinzu, die erzwingen, dass bei einer 3-Färbung von  $G_3$  gewisse Knoten  $u \subseteq S$  weiss gefärbt werden. Dazu definieren wir für Teilmengen  $A \subseteq V$  die Menge  $\chi_A$  als die Menge aller Färbungen  $f \in S$ , so dass die Einschränkung von  $f$  auf  $A$  eine  $n$ -Färbung von  $G|_A$  ist; mit anderen Worten:

$$\chi_A := \{f \in S : f|_A \text{ ist eine } n\text{-Färbung von } G|_A\}$$

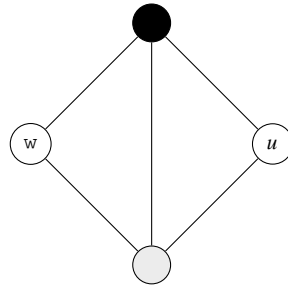
Weil nach Voraussetzung jeder endliche Teilgraph von  $G$   $n$ -färbbar ist, gilt für jede *endliche* Teilmenge  $A \subseteq V$ , bezeichnet mit  $A \in \text{fin}(V)$ , dass die Menge  $\chi_A$  nicht leer ist. Insbesondere haben wir  $\chi_\emptyset = S$ . Weiter gilt für alle endlichen Teilmengen  $A, B \in \text{fin}(V)$ ,

$$\chi_A \cap \chi_B = \chi_{A \cup B}.$$

Nun betrachten wir die Menge  $\mathcal{W}$  aller Knoten  $u \subseteq S$ , für die ein  $A \in \text{fin}(V)$  existiert mit  $\chi_A \subseteq u$ , d.h.

$$\mathcal{W} := \{u \subseteq S : \exists A \in \text{fin}(V) (\chi_A \subseteq u)\}.$$

Für jede Menge  $u \in \mathcal{W}$  fügen wir einen  $xx$ -Graphen an, wobei wir den weiss gefärbten Knoten mit dem weiss gefärbten Knoten des Fundamentaldreiecks identifizieren:



$wu$ -Graph

Dieser letzte Schritt schliesst die Konstruktion des Graphen  $G_3 = (V_3, E_3)$  ab und der Graph  $G_3$  besteht somit aus dem Fundamentaldreieck, den  $u\bar{u}$ -Graphen (für  $u \subseteq S$ ), den  $\bar{u}\bar{v}u \cap v$ -Graphen (für  $u, v \subseteq S$ ), sowie den  $wu$ -Graphen (für  $u \in \mathcal{W}$ ).

Wir zeigen nun, dass der Graph  $G_3$  3-färbbar ist. Mit  $\mathbf{P}_3$  genügt es zu zeigen, dass jeder endliche Teilgraph von  $G_3$  3-färbbar ist. Dazu betrachten wir zuerst die Knoten  $u \in \mathcal{W}$ . Diese haben wegen den  $wu$ -Graphen alle die Farbe weiss. Wegen den  $u\bar{u}$ -Graphen haben dann alle Knoten  $\bar{u}$  mit  $u \in \mathcal{W}$  die Farbe schwarz. Schliesslich können wegen den  $\bar{u}\bar{v}u \cap v$ -Graphen nicht alle drei Knoten  $\bar{u}, \bar{v}, u \cap v$  die Farbe schwarz haben. Das heisst, falls  $u, v \in \mathcal{W}$  (d.h.  $\bar{u}, \bar{v}$  schwarz gefärbt), so muss  $u \cap v$  weiss gefärbt werden (weil  $u \cap v \subseteq S$  kann  $u \cap v$  nicht grau gefärbt werden). Diese Bedingungen sind von den Knoten aus  $\mathcal{W}$  erfüllt:

- (a) Ist  $u \in \mathcal{W}$ , dann ist  $\bar{u} \notin \mathcal{W}$ .
- (b) Sind  $u, v \in \mathcal{W}$ , dann ist auch  $u \cap v \in \mathcal{W}$ .

Zu (a): Ist  $u \in \mathcal{W}$ , so existiert ein  $A \in \text{fin}(V)$  mit  $\chi_A \subseteq u$ . Wäre nun  $\bar{u}$  auch in  $\mathcal{W}$ , so gäbe es ein  $B \in \text{fin}(V)$  mit  $\chi_B \subseteq \bar{u}$ . Dann wäre

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A \cap \chi_B \subseteq u \cap \bar{u} = \emptyset$$

was aber nicht sein kann, da  $A \cup B$  eine endliche Teilmenge von  $V$  ist und somit  $\chi_{A \cup B}$  nicht leer ist.

Zu (b): Seien  $u, v \in \mathcal{W}$ , und seien  $A, B \in \text{fin}(V)$  so, dass  $\chi_A \subseteq u$  und  $\chi_B \subseteq v$ . Dann ist  $\chi_{A \cup B} \subseteq u \cap v$ , also  $u \cap v \in \mathcal{W}$ .

Nun zeigen wir, dass jeder endliche Teilgraph von  $G_3$  3-färbbar ist. Dazu nehmen wir irgend eine endliche Teilmenge  $A \in \text{fin}(V_3)$ . Indem wir die Menge  $A$  erweitern, dürfen wir annehmen, dass mit jedem Knoten  $u \subseteq S$ , der in  $A$  ist, auch  $\bar{u}$  in  $A$  ist. Für

$$\bar{\mathcal{W}} := \{\bar{u} : u \in \mathcal{W}\}$$

betrachten wir folgende beiden Teilmengen von  $A$ :

$$\{u_1, \dots, u_m\} := A \cap \mathcal{W}$$

$$\{v_1, \dots, v_n\} := (A \cap \{v : v \subseteq S\}) \setminus (\mathcal{W} \cup \bar{\mathcal{W}})$$

Die Menge  $\{u_1, \dots, u_m\}$  sind diejenigen Knoten aus  $A$ , die zwingend weiss gefärbt werden, und die Menge  $\{v_1, \dots, v_n\}$  sind diejenigen Knoten aus  $A$ , die Teilmengen von  $S$  sind und deren Farbe noch nicht festgelegt ist. Da  $\{u_1, \dots, u_m\}$  eine endliche Teilmenge von  $\mathscr{W}$  ist, folgt aus den Eigenschaften von  $\mathscr{W}$ , dass auch  $\bigcap_{i=1}^m u_i$  in  $\mathscr{W}$  ist. Es gilt sogar, weil  $V$  unendlich ist, dass  $\bigcap_{i=1}^m u_i$  eine unendliche Menge ist. Nun färben wir  $v_1$  wie folgt: Ist  $v_1 \cap \bigcap_{i=1}^m u_i$  unendlich, so färben wir  $v_1$  weiss, andernfalls ist  $\bar{v}_1 \cap \bigcap_{i=1}^m u_i$  unendlich und wir färben  $\bar{v}_1$  weiss. Für  $v_2$  betrachten wir, im Fall dass  $v_1$  weiss gefärbt wurde, die Mengen  $v_2 \cap v_1 \cap \bigcap_{i=1}^m u_i$  und  $\bar{v}_2 \cap v_1 \cap \bigcap_{i=1}^m u_i$ , wobei wieder mindestens eine dieser Mengen unendlich ist und wir das entsprechende  $v_2$  oder  $\bar{v}_2$  weiss färben. Wurde  $\bar{v}_1$  weiss gefärbt, so betrachten wir die Mengen  $v_2 \cap \bar{v}_1 \cap \bigcap_{i=1}^m u_i$  und  $\bar{v}_2 \cap \bar{v}_1 \cap \bigcap_{i=1}^m u_i$ . Analog gehen wir vor für  $v_3, \dots, v_n$ . Diese Färbung lässt sich dann zu einer 3-Färbung von  $G_3|_A$  erweitern, womit gezeigt ist, dass jeder endliche Teilgraph von  $G_3$  3-färbbar ist. Mit  $\mathbf{P}_3$  ist also der ganze Graph  $G_3$  3-färbbar.

Im letzten Schritt konstruieren wir aus einer 3-Färbung  $F$  von  $G_3$  eine  $n$ -Färbung von  $G$ . Sei also  $F : V_3 \rightarrow \{\mathfrak{g}, \mathfrak{s}, \mathfrak{w}\}$  eine 3-Färbung von  $G_3$ . Für  $x \in V$  und  $i \in \{1, \dots, n\}$  sei

$$u_{x,i} := \{f \in S : f(x) = i\}.$$

Dann ist  $\bigcup_{i=1}^n u_{x,i} = S$  und für  $i \neq i'$  gilt  $u_{x,i} \cap u_{x,i'} = \emptyset$ . Damit erhalten wir für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\bar{u}_{x,i} = \{f \in S : f(x) \neq i\}$ , d.h.

$$\bar{u}_{x,i} = \bigcup_{j \neq i} u_{x,j}.$$

Weil  $u_{x,i} \subseteq S$ , erhalten wir mit der Färbung  $F$  für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dass entweder  $u_{x,i}$  oder  $\bar{u}_{x,i}$  weiss gefärbt ist. Weiter gilt für  $i \neq i'$ , dass nicht beide Knoten  $u_{x,i}$  und  $\bar{u}_{x,i}$  weiss gefärbt sein können, da sonst auch  $\emptyset$  weiss gefärbt wäre, was aber nicht sein kann da  $S \in \mathscr{W}$  und somit  $\emptyset \notin \mathscr{W}$ . Daraus folgt, dass es höchstens ein  $i_x \in \{1, \dots, n\}$  gibt, so dass  $u_{x,i_x}$  durch die Färbung  $F$  weiss gefärbt ist. Andererseits lässt sich mit ähnlichen Überlegungen zeigen, dass es mindestens ein  $i_x \in \{1, \dots, n\}$  geben muss, so dass  $u_{x,i_x}$  durch die Färbung  $F$  weiss gefärbt ist. Somit gibt es für jedes  $x \in V$  genau ein  $i_x \in \{1, \dots, n\}$ , so dass  $u_{x,i_x}$  durch die Färbung  $F$  weiss gefärbt ist.

Für jeden Knoten  $x \in V$  sei nun  $i_x \in \{1, \dots, n\}$  so, dass gilt:

$$F(u_{x,i_x}) = \mathfrak{w}$$

Die daraus abgeleitete Färbung

$$\begin{aligned} \gamma : V &\rightarrow \{1, \dots, n\} \\ x &\mapsto i_x \end{aligned}$$

der Knotenmenge  $V$  ist dann eine Färbung von  $G = (V, E)$  mit  $n$  Farben, so dass nach Konstruktion die Einschränkung der Färbung  $\gamma$  auf einen endlichen Teilgraphen von  $G$  eine  $n$ -Färbung des Teilgraphen ist. Somit ist  $\gamma$  eine  $n$ -Färbung von  $G$ , d.h. der Graph  $G$  ist  $n$ -färbbar, was zu zeigen war.

**Literatur**

- [1] ROBERT H. COWEN, *Two hypergraph theorems equivalent to BPI*, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 31(2), 1990, 232–240.
- [2] HANS LÄUCHLI, *Coloring infinite graphs and the Boolean prime ideal theorem*, Israel Journal of Mathematics, vol. 9, 1971, 422–429.
- [3] JAN MYCIELSKI, *Some remarks and problems on the colouring of infinite graphs and the theorem of Kuratowski*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, vol. 12, 1961, 125–129.
- [4] LARRY STOCKMEYER, *Planar 3-colorability is polynomial complete*, ACM SIGACT News, vol. 5(3), 1973, 19–25.

Lorenz Halbeisen  
Departement Mathematik  
ETH Zentrum  
Rämistrasse 101  
CH-8092 Zürich, Switzerland