
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2018 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1368: Man bestimme alle ganzen Zahlen a, n, k, r mit $k > n \geq 2$ und $r \geq 1$ so, dass

$$k^a H_{n-1}^{(r)} = n^a H_{k-1}^{(r)},$$

wobei $H_m^{(r)} = \sum_{v=1}^m \frac{1}{v^r}$.

Horst Alzer, Waldbröl, D und Omran Kouba, Damaskus, SYR

Aufgabe 1369: Ein Kreis k mit Radius a und Zentrum im Koordinatenursprung O schneide die positive x -Achse im Punkt A , die positive y -Achse im Punkt C und die negative x -Achse im Punkt D . Weiter sei $B \neq C$ ein beliebiger Punkt auf der y -Achse. Der Punkt S ist der von A verschiedene Schnittpunkt der Geraden AB mit k und N der Schnittpunkt der durch B gehenden Senkrechten zu AS mit der Geraden CD . Zeige, dass

- $\sphericalangle SAN = 45^\circ$.
- der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ASN auf der Geraden SC liegt.
- die Fläche des Dreiecks ASN gleich a^2 ist.
- die Dreiecke NCA und BOA ähnlich sind mit Faktor $\sqrt{2}$.

Raphael Muhr, Oberammergau, D

Aufgabe 1370 (Die einfache dritte Aufgabe): In einem Dreieck seien AD , BE und CF drei Ceva-Transversalen (D auf BC , E auf CA , F auf AB). Die folgende Gleichheit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{AD} + \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{BE} + \frac{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{CF}$$

ist richtig, wenn AD , BE und CF die Winkelhalbierenden sind.

Die Umkehrung ist nicht richtig. Man finde ein einfaches Gegenbeispiel für den Fall, dass die Gleichheit zwar richtig ist, aber AD , BE und CF nicht die Winkelhalbierenden sind.

Michael Vowe, Therwil, CH und Stefan Grieder, Zürich, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2016

Aufgabe 1356. Zeige, dass für jede rationale Zahl $\frac{m}{n}$ gilt:

$$\left| \sqrt{3} - \frac{m}{n} \right| > \frac{1}{4n^2}.$$

Yagub N. Aliyev, Khyrdalan, AZ

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden 14 Lesern eingegangen: Gheorghe Bercea (München, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Paul Jolissaint (Porrentruy, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Jürgen Spilker (Stegen, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Viele Leser verschärfen die Ungleichung mit $\sqrt{3} + 2$ anstelle der 4 im Nenner rechts. Wir folgen der Lösung von *Joachim Klose*, der wie *Walther Janous* auf irrationale Quadratwurzeln verallgemeinert.

Sei $d \geq 2$ eine natürliche Zahl, welche keine Quadratzahl ist, und $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl mit $c > \sqrt{d} + \sqrt{d+1}$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$\left| \sqrt{d} - \frac{m}{n} \right| > \frac{1}{cn^2}.$$

Es genügt sich beim Beweis auf natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ zu beschränken, denn für eine rationale Zahl $q = \frac{m'}{n'} \leq 0$ ist $|\sqrt{d} - q| \geq \sqrt{d} > 1 > \frac{1}{c} \geq \frac{1}{cn^2}$.

Angenommen, es gäbe $m, n \in \mathbb{N}$ mit $|\sqrt{d} - \frac{m}{n}| \leq \frac{1}{cn^2}$. Dann folgt $|m - n\sqrt{d}| \leq \frac{1}{cn}$, also auch $n\sqrt{d} - \frac{1}{cn} \leq m \leq n\sqrt{d} + \frac{1}{cn}$ und weiter $2n\sqrt{d} - \frac{1}{cn} \leq m + n\sqrt{d} \leq 2n\sqrt{d} + \frac{1}{cn}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} |m^2 - n^2d| &= |m - n\sqrt{d}| \cdot |m + n\sqrt{d}| \\ &\leq \frac{1}{cn} \left(2n\sqrt{d} + \frac{1}{cn} \right) = \frac{2\sqrt{d}}{c} + \frac{1}{c^2n^2} \\ &\leq \frac{2\sqrt{d}}{c} + \frac{1}{c^2} < \frac{2\sqrt{d}}{\sqrt{d} + \sqrt{d+1}} + \frac{1}{(\sqrt{d} + \sqrt{d+1})^2} \\ &= \frac{2d + 2\sqrt{d}\sqrt{d+1} + 1}{(\sqrt{d} + \sqrt{d+1})^2} = 1. \end{aligned}$$

Weil $m^2 - n^2d$ eine ganze Zahl ist, muss daher $m^2 - n^2d = 0$ sein, was wegen der Irrationalität von \sqrt{d} unmöglich ist. Also trifft die Annahme nicht zu.

Für $d = 3$ erhält man $\sqrt{3} + \sqrt{4} = 2 + \sqrt{3} < 4$, womit die Behauptung der Aufgabe verifiziert ist.

Bemerkung: Ein Leser fügt an, dass die Verschärfung als Aufgabe 2 im Buch *100 neue Aufgaben*, Zürich 1973, von *Hugo Steinhaus* publiziert ist.

Aufgabe 1357. Sei P ein beliebiger Punkt im Innern des Dreiecks ABC . Man beweise

$$\frac{PA^2}{c} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{PB^2}{a} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{PC^2}{b} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \geq 2,$$

wobei a, b, c die Seitenlängen des Dreiecks sind. Wann gilt Gleichheit?

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 17 Lesern sind Zusendungen eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Gheorghe Bercea (München, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Jean-Paul Kunsch (Zürich, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Leser bemerken, dass der Punkt P nicht unbedingt im Innern des Dreiecks liegen muss. Eine offensichtliche Lösungsstrategie ist, denjenigen Punkt P zu finden, für den die linke Seite minimal ist, und dann zu zeigen, dass dieses Minimum grösser gleich 2 ist. *Hansruedi Widmer*, dessen Ausführungen wir folgen, wie auch *Gheorghe Bercea* geben eine einfache Charakterisierung des Punktes P mit minimalem Wert der linken Seite.

Es ist eine einfache Übung in Differentialrechnung, zu zeigen, dass der Ausdruck

$$\lambda_a \cdot PA^2 + \lambda_b \cdot PB^2 + \lambda_c \cdot PC^2, \quad (\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c > 0),$$

das Minimum

$$\frac{\lambda_b \lambda_c a^2 + \lambda_c \lambda_a b^2 + \lambda_a \lambda_b c^2}{\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c} \quad (1)$$

besitzt. Es wird im Punkt mit den baryzentrischen Koordinaten $(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c)$ angenommen. Wir setzen nun in (1)

$$\lambda_a = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad \lambda_b = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right), \quad \lambda_c = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$$

und erhalten nach einigem Umformen für das Minimum

$$m(a, b, c) = -1 + \frac{(a+b+c)^2(ab+bc+ca) - (ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)},$$

und es ist zu zeigen, dass $m(a, b, c) \geq 2$ ist. Für $t > 0$ gilt $m(ta, tb, tc) = m(a, b, c)$ und wir dürfen deshalb $a + b + c = 1$ voraussetzen:

$$m(a, b, c) = -1 + \frac{(ab + bc + ca)(1 - (ab + bc + ca))}{2abc}.$$

Aus

$$\begin{aligned} 1 - 3(ab + bc + ca) &= (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) \\ &= \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2) \geq 0 \end{aligned}$$

folgt $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$, und somit gilt

$$m(a, b, c) \geq -1 + \frac{(ab + bc + ca) \cdot \frac{2}{3}}{2abc} = -1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq -1 + \frac{3}{a + b + c} = 2$$

Im zweitletzten Schritt wurde verwendet, dass das arithmetische Mittel von $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ grösser oder gleich dem harmonischen Mittel der drei Zahlen ist.

Bei beiden verwendeten Ungleichungen gilt Gleichheit genau dann, wenn $a = b = c$, und somit gilt das Gleichheitszeichen in der behaupteten Ungleichung genau im gleichseitigen Fall, wenn P der Mittelpunkt des Dreiecks ist.

Aufgabe 1358 (Die einfache dritte Aufgabe). Sei p eine Primzahl und a eine natürliche Zahl. Man zeige, dass

$$\text{ggT}(a^2 - a, p) = 1 \quad \Rightarrow \quad p \mid \left(\sum_{i=0}^{p-2} a^i \right).$$

Gilt auch die Umkehrung?

Hans Brandstetter, Wien, A

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 13 Leser haben Lösungen eingesandt: Peter Bundschuh (Köln, D), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Paul Jolis-saint (Porrentruy, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Jürgen Spilker (Stegen, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Es liegt auf der Hand, dass zur Lösung der Aufgabenstellung der kleine Satz von Fermat zur Anwendung kommt. Fast alle Löser gingen wie *Peter Bundschuh* vor, dessen Ausführungen wir folgen.

Mit einer Unbestimmten x gilt offenbar die polynomiale Identität

$$(x^2 - x) \sum_{i=0}^{p-2} x^i = x^p - x$$

und daraus erhält man mit Hilfe des kleinen Satzes von Fermat

$$(a^2 - a) \sum_{i=0}^{p-2} a^i \equiv 0 \pmod{p}$$

für jedes $a \in \mathbb{Z}$. Bei $p \nmid a(a-1) \Leftrightarrow \text{ggT}(a^2 - a, p) = 1$ folgt hieraus $p \mid \sum_{i=0}^{p-2} a^i$, also die Implikation der Aufgabenstellung. Bei

$$\text{ggT}(a^2 - a, p) \neq 1 \Leftrightarrow p \mid a(a-1) \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{p} \text{ oder } a \equiv 1 \pmod{p}$$

folgt

$$\sum_{i=0}^{p-2} a^i \equiv 1 \pmod{p} \text{ oder } \sum_{i=0}^{p-2} a^i \equiv -1 \pmod{p},$$

also $p \nmid \sum_{i=0}^{p-2} a^i$ und somit gilt auch die Umkehrung.