Elem. Math. 73 (2018) 37 – 43
0013-6018/18/010037-7
DOI 10.4171/EM/349

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2018 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1371: Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Man berechne

$$\lim_{a \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{4a}} \sin(a \ln(\tan(ax)))\, dx.$$

Daniel Fritze, Berlin, D

Aufgabe 1372: Wir betrachten reguläre Sechsecke im Raum, d.h. nicht planare Polygone mit 6 Seiten gleicher Länge und gleichen Winkeln zwischen Nachbarseiten.

a) Für welche Winkel existieren solche Sechsecke?

b) Man zeige, dass die Sechsecke symmetrisch sind.

c) Es seien $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ aufeinander folgende Ecken regulärer Sechsecke. Für jede mögliche Symmetriegruppe soll durch Hinzufügen der fehlenden Ecken (Koordinatendarstellung) ein Beispiel angegeben werden.

Karl Wirth, Zürich, CH

Aufgabe 1373 (Die einfache dritte Aufgabe): Einem Kreis K_0 wir eine geschlossene Kette von n kongruenten Kreisen k_0 eingeschrieben, die alle K_0 berühren ($n \geq 3$). K_1 sei dann der zu K_0 konzentrische Kreis, der alle Kreise k_0 berührt. Iteriert man dieses Vorgehen, erhält man unendlich viele Kreise K_i und unendlich viele Ketten mit je n Kreisen k_i ($i = 0, 1, 2, \dots$). Man berechne das Verhältnis v_n der Flächeninhaltssumme aller Ketten zum Inhalt von K_0 und $v = \lim_{n\to\infty} v_n$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2017

Aufgabe 1359. Für $n \geq 4$ werden die Ecken eines n-Ecks mit den Zahlen $1, \ldots, n$ irgendwie beschriftet (bijektive Zuordnung). Für die meisten Zahlen n, im Folgenden brav genannt, gilt nun:

Bei jeder möglichen Anordnung gibt es drei benachbarte Zahlen, deren Summe echt grösser als $S_n = \frac{3}{2}(n+1) + 1$ ist, wobei S_n als die um 1 vergrösserte durchschnittliche Dreiersumme aufgefasst werden kann.

a) Für die Zahlen $4 \leq n \leq 9$ findet man durch Probieren leicht, dass $n = 4, 7, 8$ brav und $n = 5, 6, 9$ böse, d.h. nicht brav sind. Man gebe für $n = 5, 6, 9$ jeweils ein Gegenbeispiel an.

b) Man zeige, dass alle Zahlen $n \geq 7$, die nicht kongruent 3 (mod 6) sind, brav sind. Bemerkung: Im Bundeswettbewerb Mathematik 2002, 1. Runde (Deutschland) war die Aufgabe für $n = 12$ zu lösen.

c) Man zeige durch ein Gegenbeispiel, dass auch die Zahl $n = 15$ böse ist.

Aufgabe 1359A: Vermutung: Auch unter den Werten kongruent 3 (mod 6) gibt es nach der 15 keine weitere böse Zahl mehr.

Hans Humenberger, Wien, A und Berthold Schuppar, Dortmund, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 8 Leser haben Beiträge eingesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Jürgen Spilker (Stegen, D) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Ist eine Zahl n böse, so sollte bei einer dies bezeugenden Beschriftung der Ecken ungefähr jede dritte Eckenzahl ähnlich gross sein, da die Dreiersummen nicht allzu viel vom Durchschnitt abweichen können. Es scheint intuitiv klar zu sein, dass dies für grosse und nicht durch 3 teilbare n schwierig zu erreichen ist. Wir folgen der Lösung von *Henri Carnal*, der als einziger die Aufgabe 1359A lösen konnte.

Zuerst seien Lösungen für $n = 5, 6, 9, 15$ angegeben, die bezeugen, dass diese Zahlen böse sind, was die Teile a) und c) der Aufgabe löst.

$n = 5$: 1, 5, 2, 3, 4

$n = 6$: 1, 6, 3, 2, 5, 4

$n = 9$: 1, 9, 4, 3, 7, 5, 2, 8, 6

$n = 15$: 1, 14, 7, 3, 15, 6, 4, 12, 8, 5, 11, 9, 2, 13, 10

Sei $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ eine Permutation von $1, 2, \ldots, n$, weiter $t_i = a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$ die Dreiersummen (in den Indizes addieren wir mod n), $S_n^* = \frac{3}{2}(n+1)$ die durchschnittliche Dreiersumme, $u_i = t_i - S_n^*$ die Abweichung einer Dreiersumme von S_n^* mit $\sum_i u_i = 0$ und $D = \{i : u_i > 0\}$ die Indexmenge mit positiver Abweichung. Wir notieren $d = \sum u_i^+ = \sum u_i^-$, die kumulierten positiven Abweichungen, mit $u^+ = \max\{u, 0\}$ und $u^- = -\min\{u, 0\}$.

Es gilt
$$u_{i+1} - u_i = t_{i+1} - t_i = a_{i+3} - a_i \neq 0, \tag{1}$$
da $n > 3$. Daraus folgt, dass $u_i = u$ für ein bestimmtes u höchstens $\frac{n}{2}$-mal vorkommen kann. Weiter gilt
$$u_{i+1} - u_i = a_{i+3} - a_i \neq a_{i+3} - a_{i+6} = u_{i+3} - u_{i+4}, \tag{2}$$
falls $n > 6$. In der Folge machen wir immer die Gegenannahme, dass $\max\{u_i\} \leq 1$ und daher $D = \{i : u_i = 1\}$ bzw. $D = \{i : u_i = \frac{1}{2}\}$ und $|D| \leq \frac{n}{2}$ und führen dies für $n \geq 7$, $n \neq 9, 15$ zu einem Widerspruch.

Fall $n = 2m \geq 8$. Hier ist S_n^* halbzahlig und damit auch u_i. Weil sich die positiven und negativen Abweichungen gegenseitig aufheben und die positiven u_i nur $u_i = \frac{1}{2}$ sind, können die negativen u_i nur $u_i = -\frac{1}{2}$ sein und es muss gleich viele positive wie negative u_i geben. Das heisst o.B.d.A., dass die Folge der u_i gleich $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$ ist, was aber (2) widerspricht, falls $n > 6$ ist.

Fall $n = 6m + 1 \geq 7$. Aus (1) folgt für $0 \leq k \leq 2m$
$$a_{3k} - a_0 = \sum_{j=0}^{k-1} (u_{3j+1} - u_{3j}) \tag{3}$$
und
$$a_{n-3k} - a_0 = \sum_{j=1}^{k} (u_{n-3j} - u_{n-3j+1}) \tag{4}$$
sowie für $1 \leq k \leq 2m - 1$, ebenfalls unter Anwendung von (1),
$$\begin{aligned} a_{3k+2} - a_0 &= (a_{6m} - a_0) + (a_2 - a_{6m}) + (a_{3k+2} - a_2) \\ &= \sum_{j=0}^{2m-1} (u_{3j+1} - u_{3j}) + (u_0 - u_{6m}) + \sum_{j=1}^{k-1} (u_{3j} - u_{3j-1}) \\ &= (u_1 - u_{6m}) + \sum_{j=1}^{k-1} (u_{3j+1} - u_{3j-1}) + \sum_{j=k}^{2m-1} (u_{3j+1} - u_{3j}). \end{aligned} \tag{5}$$
Zuletzt wurde im zweiten Schritt (1) für $i = 6m$ angewendet und $n = 6m + 1$ gebraucht, während Formeln (3) und (4) für beliebige n gültig sind.

Benutzt man (3) für $i \equiv 0 \mod 3$, (4) für $i \equiv 1 \mod 3$ und (5) für $i \equiv 2 \mod 3$, so hat man jeweils eine Darstellung $a_i - a_0 = \sum_{j=1}^{l} (u_{h_j} - u_{g_j})$ mit $l \leq 2m$ Summanden und $2l$ lauter verschiedenen involvierten Indizes. Man darf $a_0 = 1$ annehmen und $a_i = 6m + 1$ wählen. Wegen $u_{h_j} \leq 1$ und $-u_{g_j} \leq u_{g_j}^-$ folgt
$$6m = a_i - a_0 = \sum_{j=1}^{l} u_{h_j} + \sum_{j=1}^{l} -u_{g_j} \leq l + \sum u_i^- = l + d \leq 2m + |D|$$
und daraus $|D| \geq 4m > \frac{n}{2}$, falls $n \geq 7$, im Widerspruch zu $|D| \leq \frac{n}{2}$.

Fall $n = 6m - 1 \geq 11$. In diesem Fall gilt $a_1 - a_0 = a_{6m} - a_0$ und man setzt $k = 2m$ in (3) und erhält für $0 \leq k \leq 2k - 1$, wieder mit Benutzung von (1),

$$a_{3k+1} - a_0 = (a_1 - a_0) + (a_{3k+1} - a_1) = \sum_{j=0}^{2m-1} (u_{3j+1} - u_{3j}) + \sum_{j=0}^{k-1} (u_{3j+2} - u_{3j+1})$$
$$= \sum_{j=0}^{k-1} (u_{3j+2} - u_{3j}) + \sum_{j=k}^{2m-1} (u_{3j+1} - u_{3j}).$$

Dies, zusammen mit (3) für $i \equiv 0 \mod 3$, (4) für $i \equiv -1 \mod 3$ führt zur gleichen Überlegung wie oben. Wählt man $a_i = 6m - 1$, so hat man daher

$$6m - 2 \leq l + d \leq 2m + |D|$$

und daraus $|D| \geq 4m - 2 \geq 3m > \frac{n}{2}$ falls $m \geq 2$, d.h. $n \geq 11$ ist.

Fall $n = 6m + 3 \geq 21$. (Aufgabe 1395 A)
Sei $I_\alpha = \{i : i \equiv \alpha \mod 3\}$ für $\alpha = 0, 1, 2$. Es ist $\sum_{i \in I_0} t_i = \sum_i a_i = \frac{n(n+1)}{2}$ und analog für I_1 und I_2. Der Mittelwert von t_i $(i \in I_\alpha)$ ist also wieder S_n^*. Es sei noch $d_\alpha = \sum_{i \in I_\alpha} u_i^+ = \sum_{i \in I_\alpha} u_i^-$ und $d_0 + d_1 + d_2 = d = |D| \leq 3m + 1$.
Wir wählen $a_0 = \min_{i \in I_0}\{a_i\}$ und benützen (3) für $1 \leq k \leq m$ bzw. (4) für $1 \leq k \leq m$ und erhalten so jeweils eine Darstellung

$$a_{3l} - a_0 = \pm \sum (u_{3j+1} - u_{3j}) \tag{6}$$

für $1 \leq l \leq 2m$ mit höchstens m Summanden. Wie vorher ergibt sich daraus $a_{3l} - a_0 \leq d_0 + d_1$. Weil I_0 aber $2m + 1$ Elemente enthält, gibt es ein l mit $a_{3l} - a_0 \geq 2m$. Daher $d_0 + d_1 \geq 2m$ und analog $d_1 + d_2 \geq 2m$, $d_2 + d_0 \geq 2m$. Daraus folgt aber $d = d_0 + d_1 + d_2 \geq 3m$, wir hatten aber schon $d \leq 3m + 1$.

Ist $d = 3m$, so werden alle Ungleichungen durch Gleichungen ersetzt und es muss $d_0 = d_1 = d_2 = m$ gelten. Für ein l ergibt sich $a_{3l} - a_0 = 2m$ und in (6) werden m Summanden gebraucht und es gilt entweder

$$I_1 \cap D = \{1, 4, \ldots, 3m - 2\}, \tag{7}$$

oder

$$I_0 \cap D = \{3m + 3, 3m + 6, \ldots, 6m\} \tag{8}$$

je nachdem ob Darstellung (3) oder (4) mit m Summanden gebraucht wurde. Gilt z.B. nur Darstellung (8), so wiederholen wir unser Argument mit I_1 anstatt I_0 und kommen zu einer Folge $\{i + 3, i + 6, \ldots, i + 3m\}$ in $I_1 \cap D$ oder $I_2 \cap D$. Weil $m \geq 3$ hat man daher mindestens 4 verschiedene Paare $\{j, j + 3\} \subseteq D$. Zwischen einem solchen Paar gibt es aber wegen (1) keine weiteren Indizes in D.

Ordnet man die Indexmenge $D = \{i_1, i_2, \ldots, i_{3m}\}$ mit $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{3m} < n$ und betrachtet die Differenzen $v_k = i_{k+1} - i_k$, wobei $v_{3m} = n + i_1 - i_m$ zu setzen ist, so gilt wegen (1), dass $v_k \geq 2$ und wegen dem oben gesagten sind mindestens 4 Differenzen $v_k = 3$. Daraus folgt aber $n = \sum_{k=1}^{m} v_k \geq 6m + 4$, ein Widerspruch.

Ist $d = |D| = 3m + 1$, so folgern wir wegen $n = \sum_{k=1}^{3m+1} v_k \geq 6m + 2$ und $n = 6m + 3$, dass $3m$ Differenzen $v_k = 2$ und eine Differenz $v_k = 3$ ist. Daraus überlegt man sich leicht, dass ein Wert von d_i gleich $d_i = m + 1$ und die anderen beiden $d_i = m$ sind. Durch zyklisches Vertauschen der a_i kann man leicht erreichen, dass $d_0 = d_1 = m$ und man erhält aus (7) oder (8) wegen $m \geq 3$ mindestens noch 2 weitere Paare $\{j, j + 3\}$ in D im Widerspruch, dass nur eine Differenz $v_k = 3$ ist.

Bemerkung: Ein Leser bemerkt, dass dieselbe Aufgabe von denselben Autoren schon als Aufgabe Nr. 87 in *Wissenschaftlichen Nachrichten*, Nr. 120 (2002), p. 39, erschienen ist.

Aufgabe 1360. Sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $\big(f'(x)\big)^2 + f(x)f''(x) \geq 1$ für $0 \leq x \leq 1$. Zeige, dass

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx \geq f(\tfrac{1}{2})^2 + \frac{1}{12}.$$

Marcel Chiriţă, Bukarest, RO

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Lösungen von folgenden Lesern eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Fast alle Leser arbeiten mit der Taylorreihe für die Funktion $f(x)^2$, wie dies auch *Hans Brandstetter* machte, dessen Ausführungen wir folgen.

Wir leiten die Funktion $g(x) = f(x)^2$ zweimal ab und erhalten aus der Voraussetzung

$$g''(x) = 2\left(f'(x)^2 + f(x)f''(x)\right) \geq 2.$$

Wenn wir die Taylorreihe mit Lagrange-Restglied darstellen, so erhalten wir

$$g(x) = g(\tfrac{1}{2}) + g'(\tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2}) + \underbrace{\tfrac{1}{2}g''(\xi_x)}_{\geq 1}(x - \tfrac{1}{2})^2 \quad \text{mit} \quad \xi_x \in [0, 1].$$

Weil das letzte Glied sicher positiv ist, können wir die Funktion $g = f^2$ durch die Funktion $h\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = g(\tfrac{1}{2}) + g'(\tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2}) + (x - \tfrac{1}{2})^2 \leq g(x)$$

nach unten abschätzen. Damit bekommen wir die Abschätzung

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx \geq \int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \left(g(\tfrac{1}{2}) + g'(\tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2}) + (x - \tfrac{1}{2})^2\right)dx$$
$$= g(\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{12} = f(\tfrac{1}{2})^2 + \frac{1}{12}.$$

Aufgabe 1361 (Die einfache dritte Aufgabe). Die zehn Dominosteine mit den Augenzahlen 00, 01, 02, 03, 11, 12, 13, 22, 23, 33 sind als 10×2-Rechteck so auszulegen, dass die Augensummen in den beiden Zeilen gleich sind, weitere Regeln gibt es nicht. In den folgenden drei Fällen ist jeweils die Anzahl möglicher „Augenbilder“ anzugeben.

a) Die Steine werden horizontal ausgelegt.

b) Die Steine werden vertikal ausgelegt.

c) Die Steine mit gleichen Augenzahlen werden vertikal, die anderen Steine horizontal ausgelegt.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 6 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Im Wesentlichen besteht die Aufgabe einerseits in der Zerlegung einer Summe in gewisse Summanden, was einer Auswahl von Augenzahlen entspricht, und einer kombinatorischen Bestimmung der Anzahl Auslegemöglichkeiten dieser Auswahl. Wir folgen den Ausführungen von *Albert Stadler*, bei dem dies sehr systematisch zum Ausdruck kommt.

a) Bei einer horizontalen Auslegung müssen wir nach der Anzahl Möglichkeiten suchen, 5 Steine so auszuwählen, dass deren Augensumme 15 ist. Die Augensummen der zehn Steine in der obigen Reihenfolge betragen 0, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 4, 5, 6. Die Anzahl der Möglichkeiten ist demnach gleich dem Koeffizienten von $x^{15}y^5$ im Polynom

$$(1+x^0y)(1+x^1y)(1+x^2y)^2(1+x^3y)^2(1+x^4y)^2(1+x^5y)(1+x^6y)$$

und dieser beträgt 32, wie man durch Ausmultiplizieren unschwer errechnet. Die Steine jeder der zwei Zeilen können noch permutiert werden und die 6 Steine mit ungleichen Augenzahlen können noch um 180° gedreht werden. Damit beträgt die Anzahl möglicher Augenbilder gleich

$$32 \cdot (5!)^2 \cdot 2^6 = 29\,491\,200.$$

b) Bei einer vertikalen Auslegung müssen wir nach der Anzahl Möglichkeiten suchen, um 6 Steine mit ungleichen Augenzahlen so auszurichten (vertikal oder um 180° gedreht), dass die Augensumme der ersten und zweiten Zeile gleich 9 beträgt. Diese Anzahl ist gleich dem Koeffizienten x^9y^9 im Polynom

$$(x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3)(x^2y+xy^2)(x^3y+xy^3)(x^3y^2+x^2y^3)$$

und dieser beträgt 10. Jede dieser 10 Ausrichtungen kann noch permutiert werden. Damit beträgt die Anzahl möglicher Augenbilder gleich

$$10 \cdot 10! = 36\,288\,000.$$

c) Wir argumentieren ähnlich wie in a). Bei einer horizontalen Auslegung der Steine mit ungleichen Augenzahlen müssen wir nach der Anzahl Möglichkeiten suchen um 3 Steine aus den sechs so auszuwählen, dass deren Augensumme 9 ist. Die Augensummen der sechs Steine mit ungleichen Augenzahlen betragen 1, 2, 3, 3, 4, 5. Die Anzahl der Möglichkeiten ist demnach gleich dem Koeffizienten von $x^9 y^3$ im Polynom

$$(1 + xy)(1 + x^2 y)(1 + x^3 y)^2 (1 + x^4 y)(1 + x^5 y)$$

und dieser beträgt 4. In einer gültigen Konfiguration liegen die horizontalen Steine in Paaren übereinander und bilden einen Block. Es gibt $\binom{7}{3}$ Anordnungen von 4 vertikalen Steinen und 3 Blöcken. Die 4 vertikalen Steine können untereinander permutiert werden. Zudem können die Steine mit ungleichen Augenzahlen innerhalb einer Zeile noch permutiert und um 180° gedreht werden. Damit beträgt die Anzahl möglicher Augenbilder

$$4 \cdot 4! \cdot (3!)^2 \cdot \binom{7}{3} \cdot 2^6 = 7\,741\,440.$$