

---

---

## Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen

---

---

Konrad Voss

Konrad Voss studierte Mathematik zunächst in Berlin und anschliessend an der ETH Zürich, wo er 1956 bei Heinz Hopf promovierte. Bereits 1960 wählte ihn der Bundesrat zum Assistenzprofessor für Mathematik, insbesondere Geometrie, an der ETH Zürich. Nach nur drei Jahren wurde Konrad Voss zum ordentlichen Professor befördert. Er wirkte an der ETH bis zu seiner Emeritierung 1995 in Lehre und Forschung, und auch einige Jahre als Vorsteher der Abteilung für Mathematik und Physik. Er betreute mit unermüdlichem Einsatz die Geometrievorlesungen der Ingenieur-Studiengänge, ein weites Spektrum an Spezialvorlesungen über Differentialgeometrie sowie eine grosse Zahl von Doktorandinnen und Doktoranden. Er tat dies in der ihm eigenen engagierten und hilfsbereiten Art, die das Wohlergehen des Menschen nie aus den Augen verlor. Er war nicht nur als hervorragender Wissenschaftler, sondern auch als langjähriger Kollege allseits sehr geschätzt. Er verstarb am 30. März 2017 in seinem 89. Lebensjahr.

Ein *Tetraeder* im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  wird durch seine vier Eckpunkte festgelegt, das sind vier beliebige Punkte, die nicht in einer Ebene liegen. Je zwei Ecken bestimmen eine der sechs *Kanten*; je drei Ecken legen eine der vier *Seitenflächen* fest. Beim regulären Tetraeder sind alle sechs Kanten gleich lang; die Seitenflächen sind also gleichseitige Dreiecke.

Im Folgenden wird die Frage untersucht, bei welchen Tetraedern alle vier Seitenflächen den gleichen Flächeninhalt haben, und wie sich gegebenenfalls solche Tetraeder geometrisch und analytisch beschreiben lassen. Tetraeder, die sich durch Translation, Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen, werden als äquivalent betrachtet.

Konrad Voss forschte nicht nur in seinem Spezialgebiet, der Differentialgeometrie, sehr erfolgreich, sondern seine überaus präzise mathematische Intuition führte ihn auch noch bis ins hohe Alter zu überraschenden Resultaten und originellen Beispielen im Bereich der klassischen Geometrie. In der vorliegenden Arbeit, die er bis kurz vor seinem Tod bearbeitete, geht es um die folgende Frage: Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, eben ein gleichseitiges Dreieck. Aber wie sieht es eine Dimension höher aus? Gibt es ausser dem regulären Tetraeder noch weitere Tetraeder mit vier Seitenflächen gleichen Flächeninhalts? Und wenn ja, welche geometrischen Eigenschaften haben solche Tetraeder? Konrad Voss gibt in dieser Arbeit Antworten in unnachahmlich elegantem Stil.

## 1 Bezeichnungen und Formeln

Im Text werden die folgenden Notationen verwendet:

*Punkte* oder *Vektoren* in  $\mathbb{R}^3$ :  $X = (x_1, x_2, x_3)$ . Dabei sind  $x_i \in \mathbb{R}$  die Koordinaten in einem rechtwinkligen „rechtshändigen“ Koordinatensystem mit Ursprung  $O = (0, 0, 0)$ .

*Skalarprodukt*:  $\langle A, B \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ .

*Vektorprodukt*:  $A \times B = (p_{23}, p_{31}, p_{12})$  mit  $p_{ij} = a_ib_j - a_jb_i$ .

Für vier Vektoren  $A, B, C, D$  gilt die *Lagrangesche Identität*

$$\langle A \times B, C \times D \rangle = \langle A, C \rangle \langle B, D \rangle - \langle A, D \rangle \langle B, C \rangle. \quad (1)$$

Insbesondere gilt

$$\langle A \times B, A \times B \rangle = \langle A, A \rangle \langle B, B \rangle - \langle A, B \rangle^2. \quad (1')$$

(1) ist äquivalent mit

$$(A \times B) \times C = \langle A, C \rangle B - \langle B, C \rangle A. \quad (2)$$

*Dreireihige Determinante*:  $\det(A, B, C) = \langle A \times B, C \rangle = \langle A, B \times C \rangle$ .

*Länge eines Vektors*:  $|A| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ .

*Einheitsvektor*  $E$ :  $|E| = 1$ .

*Winkel zwischen zwei Vektoren*  $A, B$  (im Bogenmass):  $\sphericalangle(A, B) = \gamma$ ,  $0 \leq \gamma \leq \pi$ .

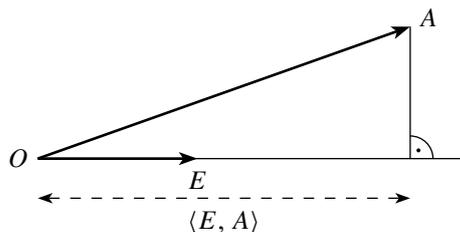
Zusammenhang mit dem Skalarprodukt via Cosinussatz  $|A - B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2\langle A, B \rangle$ :  
 $\langle A, B \rangle = |A||B| \cos \gamma$ . Damit schreibt sich (1') in der Form  $|A \times B| = |A||B| \sin \gamma$ .

Das ist (falls  $\gamma \neq 0$  und  $\gamma \neq \pi$ ) der Flächeninhalt des von den Vektoren  $A, B$  aufgespannten Parallelogramms.

*Orthogonalität von Vektoren*:  $A \perp B$  falls  $\langle A, B \rangle = 0$ .

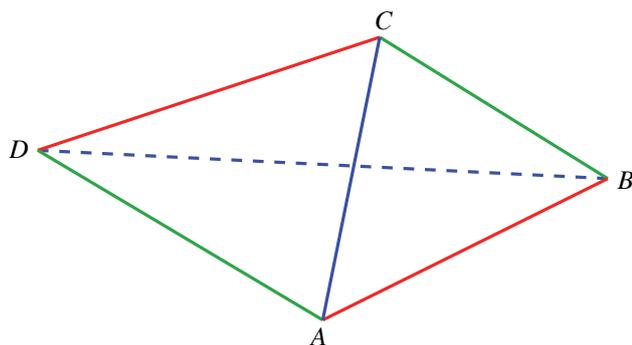
Für linear unabhängige Vektoren  $A$  und  $B$  gilt  $A \times B \perp A$  sowie  $A \times B \perp B$  und  $\det(A, B, A \times B) > 0$ , d.h. das Vektortripel  $A, B, A \times B$  ist „rechtshändig“.

Aus  $|E| = 1$  folgt:  $\langle E, A \rangle$  ist die Länge (mit Vorzeichen) der Orthogonalprojektion der Strecke  $OA$  auf die Gerade  $OE$ .



*Länge der Strecke*  $AB$ :  $|B - A|$ .

*Flächeninhalt des Dreiecks*  $OAB$ :  $f = \frac{1}{2}|A \times B|$ .



Volumen des Tetraeders  $OABC$ :  $v = \frac{1}{6} |\det(A, B, C)|$ .

Tetraeder  $ABCD$ : Drei Paare gegenüberliegender Kanten  $AB, CD$ ;  $AC, BD$ ;  $AD, BC$ .

Schwerpunkt:  $P = \frac{1}{2}(A + B)$  und  $Q = \frac{1}{2}(C + D)$  sind die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kanten  $AB$  und  $CD$ .  $S = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $PQ$ . Die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten gehen also durch den Schwerpunkt  $S$  des Tetraeders.

Umkugel: Die vier Ecken eines Tetraeders liegen auf einer (eindeutig bestimmten) Kugelfläche.

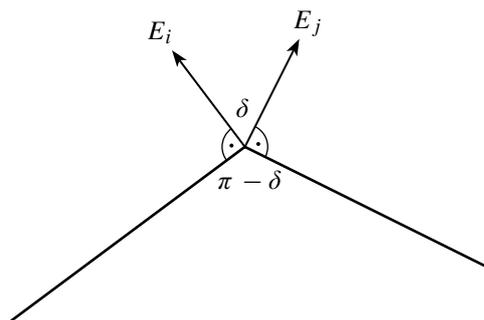
Inkugel: Es gibt eine (eindeutig bestimmte) Kugelfläche mit Zentrum im Innern des Tetraeders, welche alle vier Seitenflächen berührt.

Normalvektoren der Seitenflächen des Tetraeders  $A_1A_2A_3A_4$ :  $i, j, k, l$  sei eine Permutation der Zahlen  $1, 2, 3, 4$ . Mit  $E_i$  bezeichnen wir einen der beiden Einheitsvektoren orthogonal zur Seitenfläche  $A_jA_kA_l$ , d.h.  $E_i \perp A_j - A_l$  und  $\perp A_k - A_l$ . Wir nennen  $E_i$  den *äußeren* oder den *inneren* Normalvektor, je nachdem ob  $\langle E_i, A_i - A_l \rangle < 0$  oder  $> 0$  ist.

Winkel an einer Tetraederkante: Die Seitenflächen  $A_jA_kA_l$  und  $A_iA_kA_l$  mit den äußeren (oder den inneren) Normalvektoren  $E_i$  und  $E_j$  haben die Kante  $A_kA_l$  gemeinsam. Dann erhält man:

$$\text{Aus } \langle E_i, E_j \rangle = \cos \delta \text{ folgt:} \quad (3)$$

$\kappa = \pi - \delta$  ist der Winkel zwischen den Seitenflächen an der Kante  $A_kA_l$ .



$f_i$  sei der Flächeninhalt des Dreiecks  $A_j A_k A_l$ . Dann erfüllen die äusseren (und ebenso die inneren) Normalvektoren die folgende grundlegende Relation

$$f_1 E_1 + f_2 E_2 + f_3 E_3 + f_4 E_4 = 0. \quad (4)$$

Eine analoge Gleichung gilt sogar für alle konvexen Polytope im Euklidischen  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ). Für den Tetraeder  $OABC$  folgt (4) aus der Identität

$$A \times B + B \times C + C \times A + (C - A) \times (B - A) = 0.$$

## 2 Notwendige Bedingungen

**Lemma 1.** *Bei jedem Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen sind die Winkel an gegenüberliegenden Kanten gleich.*

*Beweis.* Nach (4) sind Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen durch die Eigenschaft

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 0 \quad (5)$$

charakterisiert. Es sei

$$c_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle \quad \text{für alle } i \neq j.$$

Mit einer Indexpermutation  $i, j, k, l$  schreiben wir (5) in der Form  $E_i + E_j = -(E_k + E_l)$ . Wegen  $\langle E_i + E_j, E_i + E_j \rangle = 2 + 2c_{ij}$  folgt daraus

$$c_{ij} = c_{kl}$$

und damit wegen (3) die Gleichheit der beiden Winkel.  $\square$

Entscheidend ist nun das folgende duale

**Lemma 2.** *Bei jedem Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen sind gegenüberliegende Kanten gleich lang. Für solche Tetraeder  $OABC$  gilt also*

$$|A| = |B - C|, \quad |B| = |C - A|, \quad |C| = |A - B|. \quad (6)$$

Dazu beweisen wir

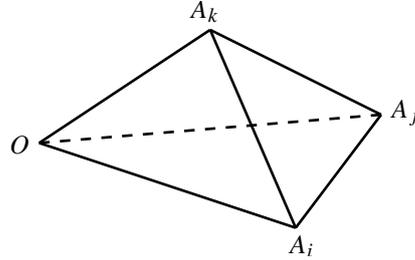
**Lemma 3.** *In einem Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen sei  $c$  die Länge einer Kante und  $\kappa$  der Winkel zwischen den anstossenden Seitenflächen. Dann gilt*

$$\sin \kappa = \lambda c \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{3v}{2f^2}.$$

*Dabei bezeichnet  $v$  das Volumen des Tetraeders und  $f$  den Flächeninhalt der Seitenflächen.*

Da der Faktor  $\lambda$  für alle Kanten den gleichen Wert hat, folgt Lemma 2 aus Lemma 1 und Lemma 3.

*Beweis von Lemma 3.* Durch eine geeignete Translation und Nummerierung der Ecken können wir zum Tetraeder  $OA_1A_2A_3$  übergehen, und zwar so, dass  $OA_3$  die betrachtete Kante ist und  $\det(A_1, A_2, A_3) > 0$ .  $i, j, k$  sei eine der drei zyklischen Permutationen 1, 2, 3 oder 2, 3, 1 oder 3, 1, 2.



Dann ist

$$E_i = \frac{1}{2f}(A_j \times A_k) \quad (7)$$

der innere Normalvektor der Seitenfläche  $OA_jA_k$ . Umgekehrt folgt aus (7)

$$E_i \times E_j = \frac{1}{4f^2}(A_j \times A_k) \times (A_k \times A_i).$$

Mit  $A = A_j$ ,  $B = A_k$ ,  $C = A_k \times A_i$  ergibt sich  $\langle A, C \rangle = \det(A_j, A_k, A_i) = 6v$  und  $\langle B, C \rangle = 0$ , also nach Formel (2)

$$E_i \times E_j = \lambda A_k, \quad \lambda = \frac{3v}{2f^2}. \quad (8)$$

Mit  $\angle(E_1, E_2) = \delta$  und  $|A_3| = c$  erhält man für den Winkel  $\kappa$  an der Kante  $OA_3$ :

$$\sin \kappa = \sin(\pi - \delta) = \sin \delta = |E_1 \times E_2| = \lambda c. \quad \square$$

Auf Grund der Gleichung (6) von Lemma 2 folgt

**Theorem 1.**  *$OABC$  sei ein Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen. Es sei*

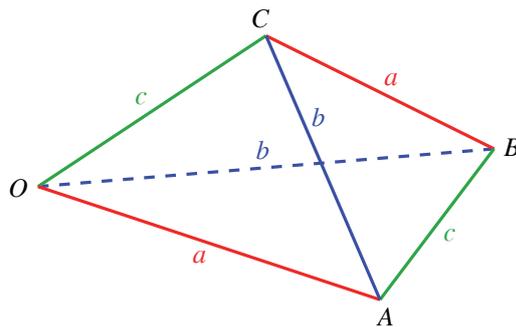
$$|A| = a, \quad |B| = b, \quad |C| = c \quad \text{und} \quad \angle(B, C) = \alpha, \quad \angle(C, A) = \beta, \quad \angle(A, B) = \gamma$$

*an der Ecke  $O$ . Dann sind alle vier Seitenflächen Dreiecke mit Seitenlängen  $a, b, c$ ; die Seitenflächen sind also nicht nur inhaltsgleich, sondern sogar kongruent. Ausserdem gilt  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .*

$\alpha, \beta, \gamma$  sind nämlich zugleich die Winkel im Dreieck  $ABC$ .

Wir nennen einen Tetraeder *gleichseitig*, wenn die vier Seitenflächen kongruent sind. Alle Tetraeder mit inhaltsgleichen Seitenflächen sind also gleichseitig.

**Theorem 2.** *Der Tetraeder  $OABC$  ist dann und nur dann gleichseitig, wenn gegenüberliegende Kanten gleich lang sind.*



Einerseits folgt nämlich aus der Kongruenz gegenüberliegender Kanten die Kongruenz der Seitenflächen; andererseits enthält Lemma 2 die Aussage, dass die Kongruenz der Seitenflächen in jedem Fall die Kongruenz gegenüberliegender Kanten nach sich zieht. Dies kann auch leicht direkt eingesehen werden (drei Fälle:  $a, b, c$  drei verschiedene Zahlen oder  $a = b \neq c$  oder  $a = b = c$ ).

Die Frage ist, ob für die Kantenlängen  $a, b, c$  beliebige Werte möglich sind. Eine notwendige Bedingung ist die folgende:

**Lemma 4.** *In jedem gleichseitigen Tetraeder sind die Winkel in den Seitenflächen kleiner als  $\frac{\pi}{2}$ ; die Seitenflächen sind also spitzwinklige Dreiecke.*

*Beweis.*  $OA_1A_2A_3$  sei der betrachtete Tetraeder. Die Gleichung (5) ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass  $E_1 + E_2 + E_3$  ein Vektor der Länge 1 ist, also  $\langle E_1 + E_2 + E_3, E_1 + E_2 + E_3 \rangle = 1 = 3 + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})$ , d.h.

$$c_{12} + c_{13} + c_{23} = -1 \quad \text{mit} \quad -1 < c_{ij} < 1. \quad (9)$$

Nach (8), (1) und (9) ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda^2 \langle A_1, A_2 \rangle &= \langle E_2 \times E_3, E_3 \times E_1 \rangle = c_{23}c_{13} - c_{12} = c_{23}c_{13} + c_{23} + c_{13} + 1 \\ &= (c_{23} + 1)(c_{13} + 1) > 0. \quad \square \end{aligned}$$

### 3 Konstruktion der allgemeinen Lösung

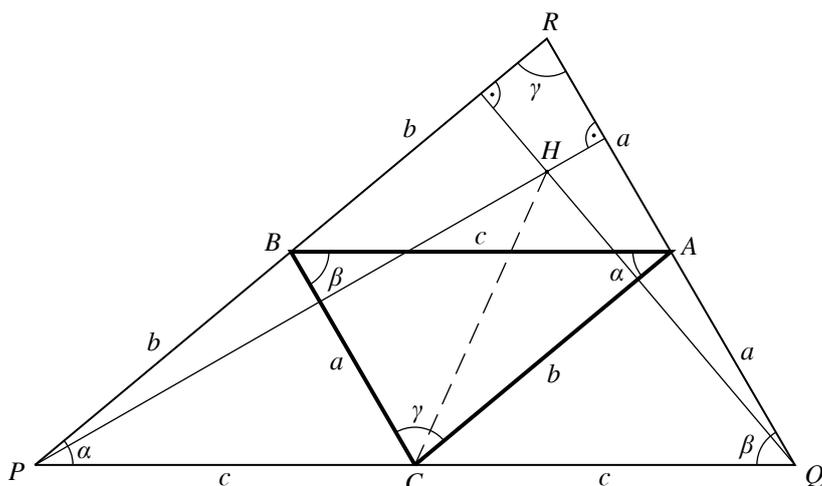
$a, b, c$  seien reelle Zahlen mit

$$0 < a \leq b \leq c \quad \text{und} \quad a^2 + b^2 > c^2. \quad (10)$$

Aus (10) folgt  $a + b > c$ . Wie lässt sich daraus ein gleichseitiger Tetraeder mit den Kantenlängen  $a, b, c$  konstruieren?

$PQR$  sei ein Dreieck in einer „horizontalen“ Ebene mit Seitenlängen  $|Q - R| = 2a$ ,  $|R - P| = 2b$ ,  $|P - Q| = 2c$ . Für die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  an den Ecken  $P, Q, R$  gilt wegen (10)

$$0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}. \quad (10')$$



An Stelle von  $a, b, c$  kann man auch  $c$  und die Winkel  $\alpha, \beta$  vorgeben mit

$$0 < \alpha \leq \beta, \quad \alpha + 2\beta \leq \pi, \quad \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}. \quad (10'')$$

$A, B, C$  seien die Mittelpunkte der Strecken  $QR, RP, PQ$ . Durch die Strecken  $AB, BC, CA$  wird das Dreieck  $PQR$  in vier Dreiecke mit Seitenlängen  $a, b, c$  zerlegt.

$H$  sei der Höhenschnittpunkt von  $PQR$ . Wegen (10'') liegt  $H$  im Innern des Vierecks  $ARBC$ . Wir bringen den Punkt  $P$  durch Drehung um die Achse  $BC$  in den Punkt  $D$  vertikal über  $H$ . Dann gilt (da  $B$  und  $C$  bei der Drehung fest bleiben)  $|D - B| = |P - B| = b$  und  $|D - C| = |P - C| = c$ .

Analog drehen wir  $Q$  um die Achse  $AC$  und erhalten den Punkt  $D'$  vertikal über  $H$ . Dann ist  $D' = D$ , denn im rechtwinkligen Dreieck  $HDC$  ist  $|D - H|^2 = c^2 - |H - C|^2 = |D' - H|^2$ . Somit ist  $|D - A| = |Q - A| = a$ .

$ABCD$  ist der gesuchte gleichseitige Tetraeder.

#### 4 Bestimmung der Eckpunkte

**Lemma 5.** Zu jedem Tetraeder  $OABC$  gibt es eindeutig bestimmte Vektoren  $U, V, W$  so, dass

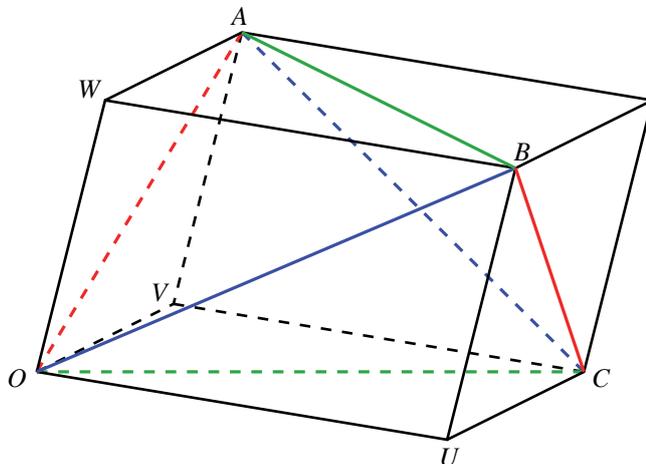
$$\begin{aligned} A &= V + W, \\ B &= U + W, \\ C &= U + V. \end{aligned} \quad (11)$$

*Beweis.* Aus (11) folgt

$$U = \frac{1}{2}(-A + B + C), \quad V = \frac{1}{2}(A - B + C), \quad W = \frac{1}{2}(A + B - C). \quad (11')$$

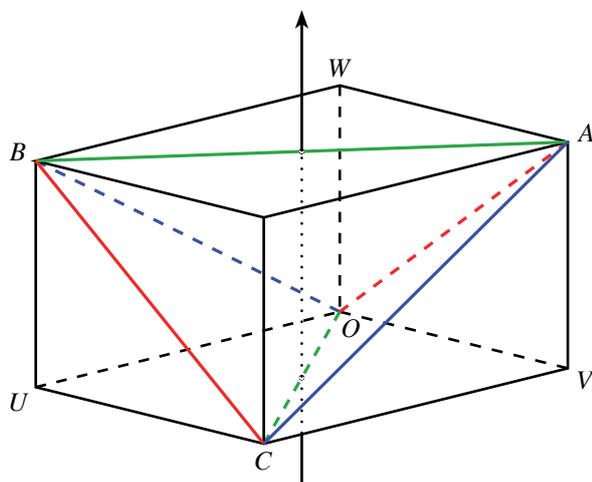
Die Vektoren  $U, V, W$  sind also eindeutig bestimmt. Umgekehrt folgt (11) aus (11').  $\square$

Gemäss (11) lässt sich jeder Tetraeder  $T = OABC$  aus drei linear unabhängigen Vektoren  $U, V, W$  erzeugen. Wir nennen das von  $U, V, W$  aufgespannte Parallelepiped  $\mathcal{P}$  das *erzeugende Parallelepiped* von  $T$ .  $\mathcal{P}$  wird von sechs Parallelogrammen begrenzt; die Kanten von  $T$  sind Diagonalen dieser Parallelogramme.



**Theorem 3.** Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

- Der Tetraeder  $T = OABC$  ist gleichseitig.
- Die Vektoren  $U, V, W$  sind paarweise orthogonal, d.h. das erzeugende Parallelepiped  $\mathcal{P}$  von  $T$  ist ein Quader, die Seitenflächen von  $\mathcal{P}$  sind Rechtecke.
- Die drei Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten von  $T$  sind paarweise orthogonal.



*Beweis.* Nach Theorem 2 ist  $T$  dann und nur dann gleichseitig, wenn die Gleichungen (6) erfüllt sind, also gilt nach Lemma 5 z.B.

$$\begin{aligned} |A|^2 &= |V + W|^2 = |V|^2 + |W|^2 + 2\langle V, W \rangle \\ &= |C - B|^2 = |V - W|^2 = |V|^2 + |W|^2 - 2\langle V, W \rangle \iff \langle V, W \rangle = 0 \end{aligned}$$

und analog für  $U, W$  und  $U, V$ . Also sind (a) und (b) äquivalent.

Nach (11') ist  $U$  Differenzvektor der Kantenmitten  $\frac{1}{2}A$  und  $\frac{1}{2}(B + C)$ ; die Verbindungsgerade dieser Punkte ist also parallel zur Geraden  $OU$ . Entsprechendes gilt für  $V$  und  $W$ . Also sind (b) und (c) äquivalent.  $\square$

Nach Theorem 3 können wir  $U, V, W$  auf die Form bringen

$$U = (2x, 0, 0), \quad V = (0, 2y, 0), \quad W = (0, 0, 2z) \quad \text{mit } x, y, z > 0.$$

Damit erhalten wir

**Theorem 4.** *Die Formeln*

$$A = (0, 2y, 2z), \quad B = (2x, 0, 2z), \quad C = (2x, 2y, 0) \quad (12)$$

mit positiven  $x, y, z$  liefern alle gleichseitigen Tetraeder  $T = OABC$ .

$T$  hat den Schwerpunkt  $S = (x, y, z)$ . Die Translation  $X \mapsto X - S$  führt  $S$  in  $O$  und  $O$  in  $-S$  über.

**Theorem 4'.** *Die Formeln*

$$\begin{aligned} A_1 &= (-x, \quad y, \quad z), \\ A_2 &= (\quad x, -y, \quad z), \\ A_3 &= (\quad x, \quad y, -z), \\ A_4 &= (-x, -y, -z) \end{aligned} \quad (12')$$

mit positiven  $x, y, z$  liefern alle gleichseitigen Tetraeder  $T' = A_1A_2A_3A_4$ ; dabei gilt

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \quad \text{und} \quad |A_i| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{für alle } i. \quad (13)$$

## 5 Symmetrieeigenschaften gleichseitiger Tetraeder

Die acht Punkte  $(\pm x, \pm y, \pm z)$  sind Ecken eines Quaders  $Q$  mit Kanten parallel zu den Koordinatenachsen, Kantenlängen  $2x, 2y, 2z$  und Seitenflächen orthogonal zu den Koordinatenachsen. Die Tetraederecken (12') sind diejenigen Ecken von  $Q$ , bei denen eine ungerade Anzahl Koordinaten negativ ist; die übrigen Ecken  $-A_i$  von  $Q$  liefern den an  $O$  gespiegelten Tetraeder. Die Mittelpunkte der Tetraederkanten sind die Punkte  $(\pm x, 0, 0)$ ,  $(0, \pm y, 0)$ ,  $(0, 0, \pm z)$  auf den Koordinatenachsen.

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  seien die Drehungen um die Koordinatenachsen mit Winkel  $\pi$ , d.h. – anders ausgedrückt – die Spiegelungen an den Koordinatenachsen.

**Theorem 5.**  *$T$  sei der Tetraeder mit Ecken (12'). Dann werden die Ecken von  $T$  bei den Drehungen  $\varphi_i$  permutiert;  $T$  wird also auf sich abgebildet. Jede Ecke von  $T$  lässt sich in jede andere Ecke, jede Seitenfläche in jede andere Seitenfläche und jede Kante in die gegenüberliegende Kante überführen.*

*Beweis.*  $i, j, k$  sei eine Permutation von 1, 2, 3. Bei  $A_i$  ist die  $i$ te Koordinate negativ, die beiden anderen Koordinaten sind positiv. Bei  $\varphi_k$  bleibt die  $k$ te Koordinate eines Punktes ungeändert, während die beiden anderen Koordinaten mit  $-1$  multipliziert werden.  $\varphi_k$  bewirkt also die folgende Eckenpermutation:

$$\varphi_k : A_i \leftrightarrow A_j, \quad A_k \leftrightarrow A_4.$$

Dabei geht  $A_i A_j A_k$  über in  $A_i A_j A_4$  und  $A_i A_k$  in die gegenüberliegende Kante  $A_j A_4$ .  $\square$

**Theorem 6.** *Ein Tetraeder ist dann und nur dann gleichseitig, wenn der Schwerpunkt mit dem Zentrum der Umkugel zusammenfällt.*

*Beweis.* Nach Theorem 4', Formel (13) hat jeder gleichseitige Tetraeder die genannte Eigenschaft.

Umgekehrt sei  $T$  ein Tetraeder, bei dem  $O$  Schwerpunkt und Zentrum der Umkugel ist, für den also (13) gilt mit einer Zahl  $r$  für alle  $i$ . Durch die gleiche Überlegung wie beim Beweis von Lemma 1 folgt dann zunächst

$$|A_i + A_j|^2 = 2r^2 + 2\langle A_i, A_j \rangle = |A_k + A_l|^2,$$

also  $\langle A_i, A_j \rangle = \langle A_k, A_l \rangle$ , und damit

$$|A_i - A_j|^2 = 2r^2 - 2\langle A_i, A_j \rangle = |A_k - A_l|^2.$$

$T$  ist also gleichseitig.  $\square$

Die gleichseitigen Tetraeder lassen sich folgendermassen zu Paaren zusammenfassen:

**Dualitätssatz.**  $T = T(x, y, z)$  sei der Tetraeder mit Ecken (12') und  $T^* = T(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$ .  $r$  und  $r^*$  seien die zugehörigen Umkugelradien,  $\rho$  und  $\rho^*$  die Radien der Inkugeln,  $E_i$  beziehungsweise  $E_i^*$  die inneren Normalvektoren und  $A_i^*$  die Ecken von  $T^*$ . Dann gilt:

$$E_i = \frac{1}{r^*} A_i^*, \quad \rho = \frac{1}{r^*}; \quad E_i^* = \frac{1}{r} A_i, \quad \rho^* = \frac{1}{r}.$$

*Beweis.* Für die Skalarprodukte erhält man

$$\langle A_i^*, A_j \rangle = -1 \quad \text{für alle } i \neq j, \quad \langle A_i^*, A_i \rangle = 3.$$

Daher ist für drei verschiedene Indizes  $\langle A_i^*, A_j - A_k \rangle = 0$ . Folglich ist  $A_i^*$  orthogonal zur Seitenfläche  $A_j A_k A_l$ . Da  $\langle A_i^*, A_i - A_j \rangle = 4$  ist, hat  $A_i^*$  die Richtung des inneren Normalvektors  $E_i$ . Aus Symmetriegründen hat  $O$  von allen Seitenflächen den Abstand  $\rho = \langle -E_i, A_j \rangle = \frac{1}{r^*}$ . Wegen  $(T^*)^* = T$  gelten die entsprechenden Formeln für  $E_i^*$  und  $\rho^*$ .  $\square$

Gleichseitige Tetraeder sind in der mathematischen Literatur immer wieder untersucht worden. Interessierte Leserinnen und Leser seien an dieser Stelle auf das Literaturverzeichnis verwiesen.

### Aufgaben

1. Man zeige, dass bei gleichseitigen Tetraedern bei mindestens zwei Paaren gegenüberliegender Kanten die Winkel zwischen den Seitenflächen kleiner als  $90^\circ$  sind.
2. Die Seitenflächen eines gleichseitigen Tetraeders seien gleichschenklige Dreiecke mit Seitenlängen  $a = b < c$  und Winkeln  $\alpha = \beta < \gamma$ . Für welche Werte von  $\gamma$  ist der Winkel an der längeren Kante grösser, gleich oder kleiner als  $90^\circ$ ?
3. Man untersuche, für welche Tetraeder sich die vier Höhen in einem Punkt schneiden.

### Dank

Wir bedanken uns bei Daniel Perez für die Erstellung der Figuren und der  $\text{\LaTeX}$ -Version dieser Arbeit.

### Literatur

- [1] ALTSHILLER-COURT, NATHAN: *Modern pure solid geometry*. Second edition. Chelsea Publishing Co., New York, 1964.
- [2] HAZEWINKEL, M. (Herausgeber): *Encyclopaedia of mathematics. Supplement. Vol. I*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [3] KUPITZ, YAAKOV S. und MARTINI, HORST: *The Fermat–Torricelli point and isosceles tetrahedra*. J. Geom., 49(1-2):150–162, 1994.
- [4] SCHUMANN, HEINZ: *Elementare Tetraedergeometrie: eine Einführung in die Raumgeometrie*. Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2011.
- [5] STURM, RUDOLF: *Maxima und Minima in der elementaren Geometrie*. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1910.