
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2018 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH-8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1374: Im Dreieck seien $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ die Winkelhalbierenden und R und r der Um- bzw. der Inkreisradius. Beweise die folgende Ungleichung

$$\frac{1}{w_\alpha} + \frac{1}{w_\beta} + \frac{1}{w_\gamma} \geq \frac{1}{2r} + \frac{1}{R}.$$

Martin Lukarevski, Skopje, MK

Aufgabe 1375: Bestimme alle natürlichen Zahlen, die sich als Summe von paarweise verschiedenen Zahlen der Form $3^\alpha \cdot 5^\beta$ mit $\alpha, \beta \geq 0$ schreiben lassen.

Jürgen Spilker, Stegen, D

Aufgabe 1376 (Die einfache dritte Aufgabe): Das nebenstehende Bild entstand auf der Poya-Brücke in Fribourg: Die Sonne scheint durch das Schutzgitter, und ihre Spiegelbilder an den horizontalen Stäben des Gitters bilden eine Kurve, die Teil einer Hyperbel sein könnte.

Ist das wirklich eine Hyperbel? Wenn ja, so gebe man die Achse und eine erzeugende Gerade des Kegels an, der diese Hyperbel als Schnitt mit der Ebene des Gitters erzeugt.

Hansklau Rumlmer, Fribourg, CH



Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2017

Aufgabe 1362. Eine natürliche Zahl heisst k -frei ($k \geq 2$), wenn sie von keiner k -ten Potenz einer Primzahl geteilt wird. Man beweise, dass das Verhältnis von geraden zu ungeraden k -freien Zahlen asymptotisch $2^{k-1} - 1$ zu 2^{k-1} ist.

Jürgen Spilker, Stegen, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 8 Lesern sind Beiträge eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Die eingesandten Lösungen unterscheiden sich in der Bezugnahme auf Resultate der Zahlentheorie. Wir folgen den Ausführungen von *Henri Carnal* der mit elementaren Methoden auskommt.

Man nummeriert die Primzahlen $2 = p_1, 3 = p_2, 5 = p_3, \dots$ und schreibt $A_i = \{n \in \mathbb{N} : p_i^k \nmid n\}$, $G = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\}$ und $U = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ungerade}\}$. Dann ist

$$A = \bigcap_{i \geq 1} A_i$$

die Menge der k -freien Zahlen. Weiter ist die Dichte $d(M)$ einer Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ gegeben durch

$$d(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |M \cap \{1, \dots, n\}|,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Es ist

$$d(A_1) = 1 - \frac{1}{2^k}, \quad d(A_1 \cap A_2) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \left(1 - \frac{1}{3^k}\right), \dots \quad d(A) = \prod_{i \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p_i^k}\right) > 0,$$

weil $\sum_i \frac{1}{p_i^k} < \infty$. Analog ist

$$d(A \cap U) = \frac{1}{2} \prod_{i \geq 2} \left(1 - \frac{1}{p_i^k}\right).$$

Daher folgt $d(A) = 2\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)d(A \cap U)$ und $d(A \cap G) = d(A) - d(A \cap U) = \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)d(A \cap U)$. Daraus schliesst man aber

$$\frac{d(A \cap G)}{d(A \cap U)} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{2^{k-1} - 1}{2^{k-1}}.$$

Aufgabe 1363. Bildet man bei einer nicht konstanten, geometrischen Folge der Länge $n \geq 3$ mit positiven Gliedern deren arithmetisches Mittel, das geometrische Mittel und

das harmonische Mittel, so erhält man wieder eine geometrische Folge (mit drei Gliedern). Wie lässt sich deren Quotient aus demjenigen der gegebenen geometrischen Folge berechnen? Können die beiden erwähnten Quotienten auch gleich sein?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 14 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Da sich der erste Teil der Aufgabe durch Nachrechnen leicht lösen lässt, unterscheiden sich die Lösungen nur durch die Diskussion nach der Gleichheit der Quotienten. Die meisten Löser begnügen sich mit der Existenz einer Lösung im Fall $n > 3$, während andere Löser wie *Frieder Grupp*, dessen Ausführungen wir folgen, auch zeigen, dass es nur eine Möglichkeit gibt.

Es sei $a_i = a_1 q^{i-1}$ für $1 \leq i \leq n$ mit $q \neq 1$ und $q > 0$. Dann gilt für das arithmetische Mittel

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1}{n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

für das geometrische Mittel

$$G_n = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} = a_1 \left(\prod_{i=0}^{n-1} q^i \right)^{1/n} = a_1 q^{\frac{n-1}{2}},$$

und für das harmonische Mittel

$$H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} = n a_1 \frac{1 - \frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{q^n}} = n a_1 q^{n-1} \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}.$$

Daraus sieht man leicht, dass

$$Q_n = \frac{A_n}{G_n} = \frac{G_n}{H_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}.$$

Wegen $H_n \leq G_n \leq A_n$ ist (H_n, G_n, A_n) eine geometrische Folge mit $Q_n \geq 1$. Gesucht sind nun die Lösungen von $Q_n = q > 1$, da nach Voraussetzung die gegebene Folge a_i keine konstante Folge sein soll.

Ist $n = 3$, so hat $Q_3 = q$ keine Lösung mit $q > 1$, denn es gilt $Q_3 = q$ genau dann, wenn $2q^3 - 3q^2 + 1 = (2q + 1)(q - 1)^2 = 0$.

Für $n \geq 4$ hat $Q_n = q$ genau eine Lösung $q > 1$. Zum Beweis setzt man $x = q^{1/2}$ und $Q_n = q$ besitzt eine Lösung $q > 1$ genau dann, wenn

$$p(x) = x^{2n} - n x^{n+3} + n x^{n+1} - 1 = 0$$

eine Lösung $x > 1$ hat. Es ist $p(1) = 0$ und

$$p'(x) = nx^n \cdot r(x) \quad \text{mit} \quad r(x) = 2x^{n-1} - (n+3)x^2 + n + 1.$$

Es gilt $p'(1) = n \cdot r(1) = 0$, $r'(1) = -8 < 0$ und $r'(x) = 2x((n-1)x^{n-3} - (n+3))$ hat für $x > 1$ genau eine Nullstelle, nämlich $x_n = \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{1/(n-3)}$. Wegen $r(1) = 0$, $r'(1) < 0$ und $r(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) besitzt die Funktion $r(x)$ an der Stelle x_n ein lokales Minimum mit negativem Funktionswert und deshalb hat die Funktion $r(x)$ eine wohldefinierte Nullstelle $\alpha_n > x_n > 1$ und dasselbe gilt für $p'(x)$. Daraus schliesst man wiederum wegen $p(1) = 0$, $p'(1) = 0$, $p''(x) = nr'(x) < 0$, dass $p(x)$ an der Stelle α_n ein lokales Minimum mit negativem Funktionswert und wegen $p(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) eine wohldefinierte Nullstelle $\beta_n > \alpha_n > 1$ hat. Wegen $p(n^{1/(n-3)}) > 0$ ist $\beta_n < n^{1/(n-3)}$ und deshalb gilt $\beta_n \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 1364 (Die einfache dritte Aufgabe). Ein Kinderspielzeug aus Holz, eine stilisierte Schildkröte zum Ziehen oder Schieben, hat vier kugelförmige Räder mit Durchmesser $2r = 3$ cm, Achsenabstand $a = 3.4$ cm, Achsenlänge von Kugelmittelpunkt bis Kugelmittelpunkt $d = 3.8$ cm. Darauf liegt eine fünfte Kugel mit Durchmesser $2R = 4.5$ cm. Wenn nun ein Knabe die Schildkröte über den Tisch schiebt, dreht sich die obere Kugel rückwärts. Die grössere Schwester steht daneben und fragt sich: „Wenn nun mein Bruder die Kröte 28.27433 cm geschoben hat, wie viele Umdrehungen machte dabei die obere Kugel?“

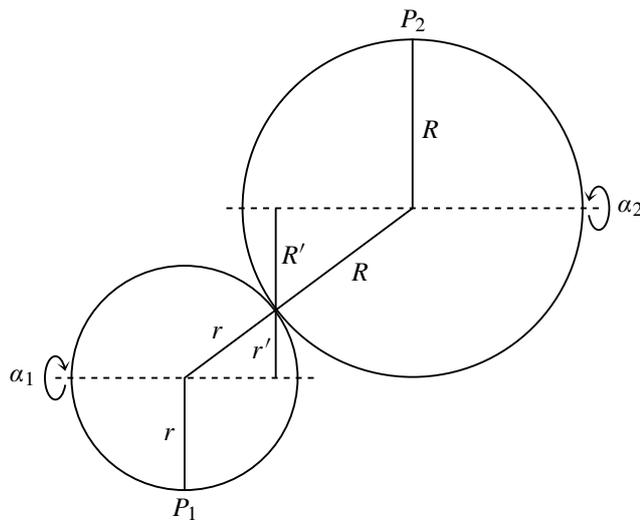
Gerhard Wanner, Genève, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 13 Lesern sind Beiträge eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Hansklaus Rummler (Fribourg, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Es mag vielleicht verblüffen, dass die Distanzen a und d keine Rolle spielen, sie müssen nur so gewählt sein, dass die fünfte Kugel nicht hinunter fällt. Fast alle Löser gehen ähnlich wie *Hansklaus Rummler* vor, dessen Lösung wir hier präsentieren.

Die auf vier Laufkugeln liegende grössere Kugel berührt diese in vier Punkten, die ein Rechteck bilden. Wird die Schildkröte geschoben, so übertragen die Laufkugeln ihre Rollbewegung auf die grosse Kugel so, als ob diese auch eine Achse hätte, die parallel zu den Achsen der Laufkugeln ist; ausserdem wird sie auf dieser imaginären Achse in der Mitte gehalten. Wir untersuchen daher im Folgenden die Bewegung von zwei Kugeln, die sich auf parallelen Achsen drehen und sich dabei stets in einem Punkt berühren, wobei die Mittelpunkte der Kugeln fest bleiben und die Berührung ohne Schlupf erfolgt. Ein Schnitt der Ebene der beiden Achsen mit den Kugeln sieht wie folgt aus:

R' und r' seien die Abstände des Berührungspunktes von den Achsen der Kugeln. Dreht sich jetzt jede Kugel auf ihrer Achse um den Winkel α_1 bzw. α_2 so, dass sie sich schlupffrei berühren, so gilt $r'\alpha_1 = R'\alpha_2$ also $\alpha_2 = \frac{r'}{R'}\alpha_1$. Da aber auch $\frac{r'}{R'} = \frac{r}{R}$ gilt haben wir



schliesslich $\alpha_2 = \frac{r}{R}\alpha_1$. Die in der Aufgabe angegebenen Masse für den Abstand und die Länge der Achsen haben also keinen Einfluss auf das Resultat. (Natürlich müssen diese Masse garantieren, dass sich die Laufkugeln drehen können und dass die grosse Kugel auf ihnen liegt, ohne den Boden zu berühren; das ist aber der Fall.)

In der Aufgabe wird die Holzschildkröte um 28.27433 cm geschoben, was dem dreifachen Umfang der Laufkugeln entspricht. (Da es sich um ein Holzspielzeug handelt, dürfte 28.27433 eine akzeptable Näherung von 9π sein.) Wir haben also $\alpha_1 = 6\pi$ und wegen $R = 1.5r$ ist $\alpha_2 = 4\pi$: Die grosse Kugel macht zwei Umdrehungen.

Es ist noch interessant, das Resultat nicht für die Drehwinkel α_1 und α_2 zu formulieren, sondern für die Distanzen, die zwei Punkte P_1 und P_2 auf dem zur Achse senkrechten Grosskreis ihrer Kugel bei der Drehung zurücklegen: Diese ist für beide gleich, nämlich $r\alpha_1 = R\alpha_2$. Für unsere Holzschildkröte können wir das auch so formulieren: Kriecht sie durch einen Tunnel, in dem ihr Rücken gerade die Decke berührt, so rollt die Rückkugel schlupffrei der Decke entlang.