

---

---

# Jakob Hermanns Lösung des Kepler-Problems mit einer Erhaltungsgrösse

---

---

Ueli Manz

Ueli Manz studierte Mathematik an der ETH Zürich. Danach arbeitete er dort einige Jahre als Assistent und unterrichtete parallel dazu in Winterthur an der Kantonsschule im Lee. 1997 wechselte er an die Kantonsschule Schaffhausen, wo er seither unterrichtet. Während dieser Zeit promovierte er über Differentialgleichungen und arbeitete für einige Jahre wieder an der ETH als Mentor im Bereich der Lehrerausbildung. Aktuell beschäftigt er sich in seiner Freizeit mit verschiedenen mathemathikhistorischen Themen.

## 1 Einleitung

### 1.1 Die keplerschen Gesetze

Im Jahre 1609 veröffentlichte Johannes Kepler (1571–1630) sein zweites grosses Werk, die *Astronomia Nova* (lat.: neue Astronomie). Er rang den Bahndaten des Mars in mühevoller Arbeit zwei Aussagen ab, die als das erste und das zweite keplersche Gesetz in die Geschichte eingingen. Zehn Jahre später kam aus dem Vergleich der Bahndaten verschiedener Planeten in den *Harmonices Mundi* (lat.: die Harmonie der Welt) das dritte keplersche Gesetz hinzu.

In den Jahrzehnten nach der Veröffentlichung von Keplers Gesetzen der Planetenbewegung war das vordringliche Problem der Himmelsmechanik die Bestimmung des Kraftgesetzes. Diese gelang Isaac Newton in seinen bahnbrechenden Arbeiten. Wie weit ihm umgekehrt auch die Herleitung der keplerschen Gesetze aus dem Kraftgesetz glückte, ist bis heute umstritten. Die vielleicht erste korrekte Herleitung gelang dem Schweizer Jakob Hermann. Der Autor stellt Hermanns Lösung vor und bespricht einen berechtigten Einwand von Johann Bernoulli. Zudem zeigt er auf, wie Hermanns Idee auf eine Erhaltungsgrösse führt, die im Verlaufe der Jahrhunderte immer wieder neu entdeckt wurde. Die Arbeit schliesst mit einer eleganten Herleitung von Hamiltons Hodographen.

## 1.2 Das Kraftgesetz

Auch spekulierte Kepler bereits über die Kraft, welche die Planeten auf ihrer Bahn halten sollte. Er vermutete noch, dass sie umkehrt proportional zum Abstand sei. 1667 behauptete der französische Astronom Ismaël Bullialdus (1605–1694) erstmals, dass die Kraft umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes sei. 1680 griff Robert Hooke (1635–1703) diese Vermutung in einem Brief an Isaac Newton (1643–1727) auf. Später bestand Newton allerdings darauf, das Kraftgesetz selber entdeckt zu haben.

## 1.3 Das direkte und das inverse Problem

Die Herleitung des Kraftgesetzes aus den Beobachtungen war ein zentrales Problem der Naturphilosophie in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts. Das mag uns heute erstaunen, sind wir doch viel mehr an ihrer *Umkehrung* interessiert, an der Herleitung der keplerschen Gesetze aus dem Kraftgesetz. Die anders gelagerte Gewichtung spiegelt sich auch in der Begriffsbildung wider. Die Herleitung des Kraftgesetzes war als *direktes Problem* und die Herleitung der keplerschen Gesetze als *inverses Problem* bekannt, ein Umstand, der heute manchmal für Verwirrung sorgt.

Für den Spezialfall der Kreisbahnen kann das direkte Problem leicht mit Hilfe des dritten keplerschen Gesetzes gelöst werden. Für elliptische Bahnen, wie sie Kepler beobachtete, ist die Lösung aber deutlich schwieriger. Nachweislich als Erstem gelang sie Newton im Jahr 1684 in seinem Manuskript *De motu corporum in gyrum* (lat.: über die Bewegung von Körpern auf einer Bahn). Dieses erweiterte er dann zu seiner monumentalen *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (lat.: die mathematischen Grundlagen der Naturphilosophie), kurz *Principia* genannt (vgl. [7]).

Die Herleitung der Bahnkurven aus dem Kraftgesetz erwies sich nochmals als erheblich schwieriger. In wieweit Newton dies löste, wird bis heute kontrovers diskutiert, wie die Artikel von Robert Weinstock [9] und Bruce Pourciau [8] zeigen.

## 1.4 Jakob Hermann



Abbildung 1  
Jakob Hermann  
(Quelle: [10]).

Die vielleicht erste Lösung des inversen Problems gelang dem Schweizer Jakob Hermann (1678–1733), der wie sein entfernter Verwandter Leonhard Euler aus Basel stammte.

Seine Ausbildung erhielt Hermann von Jakob Bernoulli (1655–1705). 1707 wurde er Professor in Padua. Nach Stationen in Frankfurt an der Oder (ab 1713) und St. Petersburg (ab 1724) kehrte er 1731 nach Basel zurück, wo er zwei Jahre später verstarb (vgl. [1]).

Hermann veröffentlichte seine Lösung 1710 im wenig bekannten *Giornale de' letterati d'Italia* [5]. Einem breiteren Publikum wurde sie durch Auszüge seines Briefwechsels mit Johann Bernoulli (1667–1748) bekannt, die 1710 von der *Académie royale des sciences* abgedruckt wurden (vgl. [6]).

Im gleichen Band erschien auch Johann Bernoullis Antwort [2]. Dass diese ätzend ausfiel, erstaunt wenig, wenn man Johann Bernoullis Umgang mit seinen Konkurrenten kennt. Darüber hinaus war Hermann ein Schüler von Johanns Bruder Jakob und Johann hatte selber eine Lösung des prestigeträchtigen inversen Problems gefunden.

## 2 Hermanns Herleitung der Differentialgleichung

Anders als Newtons Principia atmet Hermanns Lösung den modernen Geist des leibnizschen Calculus. Deshalb können wir hier seine Darstellung ohne Probleme übernehmen. Einzig seinen in jener Zeit üblichen Gebrauch unendlich kleiner Grössen übernehmen wir nicht. Statt mit Differentialen arbeiten wir mit endlichen Differenzen und Grenzübergängen.

### 2.1 Die Ausgangslage

Hermann betrachtete einen Planeten, der sich unter dem Einfluss einer Zentralkraft mit Zentrum  $S$  bewegt. In Abbildung 2 ist links seine Zeichnung aus [5] zu sehen und rechts eine moderne Nachzeichnung mit Ergänzungen.

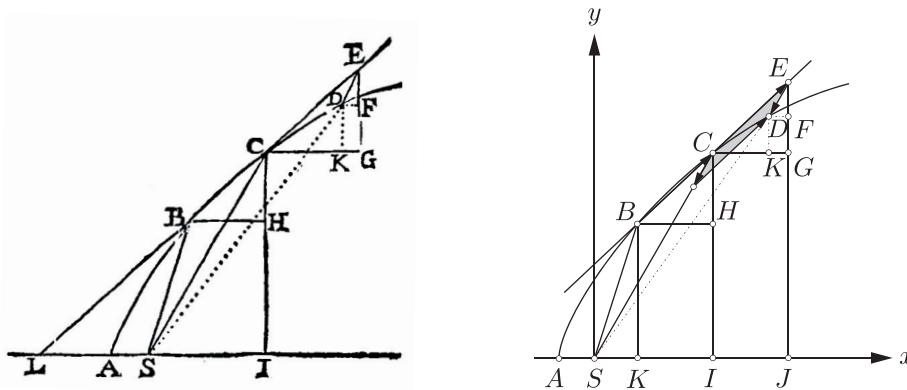


Abbildung 2 Hermanns Originalzeichnung und eine Nachzeichnung mit Ergänzungen.

Zu einem gewissen Zeitpunkt sei der Planet im Punkt  $B$ , eine kurze Zeitspanne  $\Delta t$  später im Punkt  $C$  und eine weitere Zeitspanne  $\Delta t$  später in  $D$ .

### 2.2 Die Kraft wirkt stossweise

Hermann nahm wie Newton an, die Kraft würde nur stossweise wirken. Das erlaubte ihm, die weitere Bewegung des Planeten in zwei Komponenten zu zerlegen:

- Allein auf Grund seiner Trägheit würde sich der Planet in  $C$  mit unveränderter Geschwindigkeit weiter entlang der Geraden  $BC$  bewegen. Dabei würde er in der Zeitspanne  $\Delta t$  dieselbe Strecke zurücklegen. Hermann nannte den Endpunkt  $E$ . Es gilt damit  $\overline{CE} = \overline{BC}$ .

- Nun erfolgt in  $C$  aber ein Kraftstoss in Richtung  $S$ . Der ist so gross, dass der Planet nicht in  $E$  anlangt, sondern auf der Bahnkurve im Punkt  $D$ . In der Nachzeichnung rechts ist das entsprechende *Streckenparallelogramm* eingezeichnet.

### 2.3 Differenzen für eine Differentialgleichung

Anders als Newton arbeitete Hermann in einem Koordinatensystem und benutzte die neue Differentialrechnung. In diesem Sinne setzte er:

$$x := \overline{SI}, y := \overline{IC} \quad \text{und} \quad \Delta x := \overline{BH}, \Delta y := \overline{HC}.$$

Zusätzlich führen wir noch  $\Delta x_C := \overline{CK}$  und  $\Delta y_C := \overline{KD}$  ein. Damit folgt mit dem grau eingezeichneten Streckenparallelogramm:

$$\begin{aligned} \Delta^2 x &:= -\overline{DF} = -\overline{KG} = -(\overline{CG} - \overline{CK}) = \Delta x_C - \Delta x, \\ \Delta^2 y &:= -\overline{FE} = -\overline{GE} - \overline{GF} = -(\overline{HC} - \overline{KD}) = \Delta y_C - \Delta y. \end{aligned}$$

### 2.4 Der Flächensatz

Ohne Begründung hielt Hermann fest, dass die Inhalte der Dreiecke  $CSD$  und  $BSC$  (im Grenzübergang) gleich gross sind. Er nahm wohl an, dass seine Leser mit Newtons Principia bestens vertraut sind.

Für den Beweis gehen wir denn auch genau gleich vor wie Newton in seinem Beweis des Flächensatzes (vgl. [7]):

- Die Dreiecke  $BSC$  und  $CSE$  haben denselben Flächeninhalt, denn ihre Grundlinien  $BC$  und  $CE$  sind gleich lang und sie haben dieselbe Höhe (den Abstand von  $S$  zur Geraden durch  $B, C$  und  $E$ ).
- Die Dreiecke  $CSE$  und  $CSD$  haben ebenfalls denselben Flächeninhalt, denn  $SC$  ist ihre gemeinsame Grundlinie und ihre Höhen stimmen überein, da  $DE$  gemäss Definition parallel zu  $SC$  ist.

Ebenfalls ohne Begründung gab Hermann für den Flächeninhalt folgende Formel:

$$A_{CSD} = A_{BSC} = \frac{1}{2} (y\Delta x - x\Delta y).$$

Wieder sei hier die Herleitung nachgeholt:

$$\begin{aligned} A_{BSC} &= A_{SKB} + A_{KIH B} + A_{BHC} - A_{SIC} \\ &= \frac{1}{2}(x - \Delta x)(y - \Delta y) + \Delta x(y - \Delta y) + \frac{1}{2}\Delta x\Delta y - \frac{1}{2}xy \\ &= \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}x\Delta y - \frac{1}{2}y\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x\Delta y + y\Delta x - \Delta x\Delta y + \frac{1}{2}\Delta x\Delta y - \frac{1}{2}xy \\ &= \frac{1}{2}y\Delta x - \frac{1}{2}x\Delta y. \end{aligned}$$

Im Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  folgt daraus, dass die Ableitung der Flächenfunktion konstant ist:

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2} (\dot{x}y - x\dot{y}) = \text{const.} \quad (1)$$

Auch dieses Ergebnis verwendete Hermann später ohne weitere Erklärung oder Begründung.

## 2.5 Die Beschleunigung

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $DEF$  und  $SCI$  schloss Hermann, dass

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SI}}$$

gilt und weiter

$$\overline{DE} = \overline{DF} \cdot \frac{\overline{SC}}{\overline{SI}} = -\Delta^2 x \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Für die Beschleunigung erhalten wir damit

$$\frac{\overline{DE}}{\Delta t^2} = -\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

und im Grenzübergang

$$\frac{d^2 \overline{DE}}{dt^2} = -\ddot{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

## 2.6 Das zweite newtonsche Gesetz

Die Kraft im Punkt  $C$  ist gemäss Voraussetzung umgekehrt proportional zu  $\overline{SC}^2$ . Mit dem zweiten newtonschen Gesetz folgt damit für die Beschleunigung:

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\overline{SC}^2} \sim \frac{d^2 \overline{DE}}{dt^2} = -\ddot{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

So erhielt Hermann die *Differe-Differentialgleichung* (Differentialgleichung 2. Ordnung)

$$-a\ddot{x} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2)$$

mit einer gewissen Proportionalitätskonstanten  $a$ .

### 3 Hermanns Lösung der Differentialgleichung

#### 3.1 Hermanns Geniestreich

Multipliziert man eine Gleichung mit einer Konstanten ungleich 0, so ändert sich die Lösungsmenge nicht. Diese unscheinbare Tatsache nutzt man gewöhnlich, um Gleichungen zu vereinfachen. Hermann hingegen tat genau das Gegenteil: Er multiplizierte seine Differentialgleichung mit einer Konstanten, so dass sie scheinbar *komplizierter* wurde!

In seinem Geniestreich zog Hermann für den konstanten Faktor die Ableitung der Flächenfunktion in Erwägung. Diese ist ja gemäss (1) konstant. Sie erlaubte ihm tatsächlich, die *erste* Integration auszuführen, wie er schnell feststellen konnte. Für die *zweite* Integration blieb er deshalb seiner Erfolgsidee treu und verwendete nochmals dieselbe Konstante.

Insgesamt multiplizierte er also die Differentialgleichung mit dem Term  $\frac{1}{4}(\dot{x}y - x\dot{y})^2$ , der – wie erwähnt – wegen (1) konstant ist. Lässt man den unnötigen Faktor  $\frac{1}{4}$  noch weg, so wird aus Gleichung (2):

$$-a \cdot (\dot{x}y - x\dot{y})^2 \cdot \ddot{x} = (\dot{x}y - x\dot{y})^2 \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Die konstanten Faktoren  $a$  und  $(\dot{x}y - x\dot{y})^2$  auf der linken Seite fasste Hermann dann zu einer Konstanten zusammen, die er der Einfachheit halber wiederum  $a$  nannte. Damit erhielt er die Differentialgleichung:

$$-a\ddot{x} = (\dot{x}y - x\dot{y})^2 \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

#### 3.2 Die erste Integration

Hermann gab für die erste Integration ohne Begründung folgendes Ergebnis:

$$-a\dot{x} = (\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (4)$$

Auf eine Integrationskonstante verzichtete er, was ihm prompt Kritik von Johann Bernoulli eintrug. Mehr dazu später.

Die linke Seite von (4) ist klar. Wie Hermann die rechte Seite der Differentialgleichung integrierte, wissen wir heute nicht mehr mit Sicherheit. Eine spätere Arbeit von Hermann (vgl. [1]) legt nahe, dass er eine geeignete Substitution verwendete. Das ist der Lösungsweg, den wir hier angeben. Dasselbe Ergebnis hätte man auch mit etwas Geschick mit partieller Integration erhalten können.

Wir behandeln einen der Faktoren  $\dot{x}y - x\dot{y}$  in der Differentialgleichung als konstanten Vorfaktor. Für die restlichen Faktoren der rechten Seite erhalten wir so mit der Substitution  $p := x/y$ :

$$\begin{aligned} (\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} &= (\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{x}{y^3 ((x/y)^2 + 1)^{3/2}} \\ &= \frac{x}{y} \cdot \frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{y^2} \frac{1}{(1 + (x/y)^2)^{3/2}} = p \cdot \dot{p} \cdot \frac{1}{(1 + p^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Der letzte Term lässt sich nun leicht integrieren:

$$\begin{aligned} \int (y\dot{x} - x\dot{y}) \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dt &= \int p \cdot \dot{p} \cdot \frac{1}{(1 + p^2)^{3/2}} dt \\ &= -\frac{1}{(1 + p^2)^{1/2}} = -\frac{1}{(1 + (x/y)^2)^{1/2}} \\ &= -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Fügt man den konstanten Vorfaktor  $\dot{x}y - x\dot{y}$  wieder hinzu, so hat man Hermanns Lösung.

### 3.3 Die zweite Integration

Für den zweiten Integrationsschritt dividierte Hermann die Differentialgleichung durch  $x^2$ . Da er auf die Dimension der Terme achtete, musste er die Gleichung zusätzlich mit einer Konstanten  $b$  multiplizieren:

$$-ab \frac{\dot{x}}{x^2} = b(\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{-y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Wieder gab Hermann das Ergebnis der Integration ohne Begründung an:

$$ab \frac{1}{x} + c = b \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x},$$

bzw.

$$a + \frac{c}{b}x = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

Erstaunlicherweise führte er hier also eine Integrationskonstante ein.

Wiederum ist die linke Seite klar. Für die rechte Seite der Differentialgleichung können wir ähnlich wie oben vorgehen. Mit  $q := y/x$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} b(\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{-y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} &= b \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2} \cdot \frac{y}{x \sqrt{1 + (y/x)^2}} \\ &= b \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (y/x)^2}} = b \cdot \dot{q} \cdot q \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + q^2}}, \end{aligned}$$

was sich leicht integrieren lässt:

$$\begin{aligned} b \int (y\dot{x} - x\dot{y}) \frac{-y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} dt &= b \int \dot{q} \cdot q \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + q^2}} dt \\ &= b \cdot \sqrt{1 + q^2} = b \cdot \sqrt{1 + (y/x)^2} = b \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}. \end{aligned}$$

Damit haben wir Hermanns Behauptung bewiesen.

### 3.4 Kegelschnitte als Bahnkurven

Im Weiteren hielt Hermann – man ahnt es schon – ohne Begründung fest, dass man für  $c < b$  eine Ellipse, für  $c = b$  eine Parabel und für  $c > b$  eine Hyperbel hat. Der Beweis ist leicht erbracht. Quadriert man Gleichung (5), so erhält man:

$$a^2 + \frac{2ac}{b}x + \frac{c^2}{b^2}x^2 = x^2 + y^2,$$

bzw.

$$y^2 = a^2 + \frac{2ac}{b}x - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)x^2.$$

Der Vergleich mit der bekannten Scheitelpunktgleichung der Kegelschnitte (vgl. [11]) ergibt unmittelbar Hermanns Behauptung.

### 3.5 Die fehlende Integrationskonstante

Wie bereits erwähnt, kritisierte Johann Bernoulli das Fehlen der Integrationskonstante in seinem Antwortbrief an Hermann (vgl. [2]). Dadurch hätte Hermann nicht für jeden Fall gezeigt, dass ausschliesslich Kegelschnitte als Bahnkurven in Frage kämen. Hermann schrieb darauf an anderer Stelle, dass die Konstante gleich 0 sei, da der Nullpunkt des Koordinatensystems im Kraftzentrum liege, wie Eric Aiton in [1] berichtet. Um diese Erklärung zu prüfen, folgen wir Bernoullis Analyse in [2].

Bernoulli führte bei der ersten Integration die Konstante  $e$  ein:

$$-a\dot{x} + e = (\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (6)$$

Für die zweite Integration multiplizierte er sie mit der Konstanten  $\dot{x}y - x\dot{y}$  um integrieren zu können. Im Gegensatz zu Hermann schien Bernoulli dabei keine Bedenken wegen der Dimension gehabt zu haben.

Seine Differentialgleichung lautete damit:

$$-\frac{ab\dot{x}}{x^2} + \frac{be(\dot{x}y - x\dot{y})}{x^2} = \frac{b(xy\dot{y} - \dot{x}y^2)}{x^2\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Offen ist nur noch das Integral des zweiten Terms auf der linken Seite. Es lässt sich mit der bekannten Substitution  $q := y/x$  leicht berechnen:

$$\int \frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{x^2} dt = \int -\dot{q} dt = -q = -\frac{y}{x}.$$

Damit folgt:

$$\frac{ab}{x} - \frac{bey}{x} + c = \frac{b\sqrt{x^2 + y^2}}{x},$$



bzw.

$$a + \frac{c}{b}x - ey = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (7)$$

Quadrieren liefert:

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2 - \frac{2ce}{b}xy + e^2y^2 + \frac{2ac}{b}x - 2aey &= x^2 + y^2 \\ \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)x^2 + \frac{2ce}{b}xy + (1 - e^2)y^2 - \frac{2ac}{b}x + 2aey &= a^2. \end{aligned}$$

Das ist die Gleichung eines Kegelschnitts in allgemeiner Lage (vgl. [11]). Wählt man die Achse des Kegelschnitts als  $x$ -Achse, so ist  $e$  tatsächlich gleich 0.

Bernoullis Berechnung zeigt, dass es nicht genügt, das Kraftzentrum in den Nullpunkt des Koordinatensystems zu legen, wie Hermann nachträglich behauptet hatte.

In Hermanns Text fällt auch auf, dass er  $LI$  als *Achse* der Kurve bezeichnet. In diesem Fall schneidet die Kurve  $LI$  aus Symmetriegründen rechtwinklig. Im Schnittpunkt gilt dann  $y = 0$  und  $\dot{x} = 0$ . Das ist nur möglich, wenn die Integrationskonstante  $e$  in (6) gleich 0 ist:

$$e = a\dot{x} + (\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = a \cdot 0 + 0 \cdot \frac{-0}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = 0.$$

Dass die Lösungskurven eine Symmetrieachse haben, lässt sich aber nicht a priori rechtfertigen. Da dürfte die Suggestivkraft der bekannten Lösung Hermann in die Irre geführt haben.

#### 4 Eine Erhaltungsgrösse

Hermann stiess auf seinem Weg zur Lösung des inversen Problems auf etwas, das man heute *Erhaltungsgrösse* nennt. Eine etwas verallgemeinerte Form wurde im Laufe der nachfolgenden Jahrzehnte und Jahrhunderte von verschiedenen Mathematikern und Physikern immer wieder neu entdeckt. Sie wird heute meist nach Pierre-Simon Laplace (1749–1827), Carl Runge (1856–1927) und Wilhelm Lenz (1888–1957) benannt, wobei auch William Rowan Hamilton (1805–1865) und Josiah Willard Gibbs (1839–1903) zu den Wiederentdeckern gehörten. Einen Überblick über die Geschichte gibt Herbert Goldstein in [3] und [4].

Der Laplace–Runge–Lenz-Vektor (kurz LRL-Vektor) wird meist definiert durch:

$$\vec{A} := m\dot{\vec{x}} \times \vec{L} - GMm^2 \frac{\vec{x}}{r} \quad \text{mit} \quad r := |\vec{x}|, \quad (8)$$

wobei  $G$  die Gravitationskonstante,  $M$  und  $m$  die Massen der beiden Himmelskörper und  $\vec{L}$  den Drehimpulsvektor bezeichnen.

Auf den ersten Blick ist kein Zusammenhang zwischen (4) und (8) erkennbar. Er lässt sich aber in drei kleinen Schritten herstellen.

#### 4.1 Schritt 1: Die „fehlende“ Differentialgleichung

Hermann hätte in gleicher Weise auch eine Differentialgleichung für  $y$  herleiten und integrieren können. Da er aber das inverse Problem bereits gelöst hatte, sah er keinen Grund dafür.

Holen wir sein „Versäumnis“ nach. Die Differentialgleichung für  $y$  lautet:

$$-a\ddot{y} = (\dot{x}y - x\dot{y})^2 \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Für das Integral der linken Seite erhalten wir

$$-a \int \ddot{y} dt = -a\dot{y} + e_1.$$

Wir behandeln einen der Faktoren  $\dot{x}y - x\dot{y}$  in der Differentialgleichung wieder als konstanten Vorfaktor. Für die restlichen Faktoren der rechten Seite erhalten wir so mit der Substitution  $q := y/x$ :

$$\begin{aligned} (\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} &= (\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{y}{x^3 (1 + (y/x)^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{y}{x} \cdot \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2} \frac{1}{(1 + (y/x)^2)^{3/2}} = -q \cdot \dot{q} \cdot \frac{1}{(1 + q^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Der letzte Term lässt sich wieder leicht integrieren:

$$\begin{aligned} \int (\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dt &= - \int q \cdot \dot{q} \cdot \frac{1}{(1 + q^2)^{3/2}} dt \\ &= \frac{1}{(1 + q^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1 + (y/x)^2)^{1/2}} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Fügt man den konstanten Vorfaktor  $\dot{x}y - x\dot{y}$  wieder hinzu, so hat man die „fehlende“ Lösung:

$$-a\dot{y} + e_1 = (\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (9)$$

Zusammen mit der Gleichung, die bereits Bernoulli herleitete (inklusive Integrationskonstante), haben wir:

$$\begin{aligned} -a\dot{y} + e_1 &= (\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ -a\dot{x} + e_2 &= (\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

bzw. mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ :

$$\begin{aligned} e_1 &= a\dot{y} + (\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{x}{r}, \\ -e_2 &= -a\dot{x} + (\dot{x}y - x\dot{y}) \frac{y}{r}. \end{aligned} \quad (10)$$

## 4.2 Schritt 2: Moderne Konstanten

Vergleichen wir Hermanns *ursprüngliche* Differentialgleichung (2) mit der modernen Form

$$\ddot{x} = -GM \frac{x}{r^3},$$

so stellen wir fest, dass  $a = 1/(GM)$  ist. Hermann multiplizierte die Gleichung aber noch mit dem Quadrat von  $\dot{x}y - x\dot{y}$ . Diese Grösse ist bis auf das Vorzeichen gleich dem sog. *spezifischen Drehimpuls*, d.h. dem Drehimpuls  $L$  geteilt durch die Masse  $m$  des Planeten:

$$\dot{x}y - x\dot{y} = -L/m.$$

Damit erhalten wir für die Variable  $a$  in der Form (3) der Differentialgleichung

$$a = \frac{1}{GM} \cdot \left(-\frac{L}{m}\right)^2 = \frac{L^2}{GMm^2}.$$

Mit diesen Konstanten wird aus (10) zunächst

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{L^2}{GMm^2} \dot{y} + \frac{-L}{m} \cdot \frac{x}{r}, \\ -e_2 &= -\frac{L^2}{GMm^2} \dot{x} + \frac{-L}{m} \cdot \frac{y}{r} \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} a_1 &:= \frac{GMm^3}{L} e_1 = Lm\dot{y} - GMm^2 \cdot \frac{x}{r}, \\ a_2 &:= -\frac{GMm^3}{L} e_2 = -Lm\dot{x} - GMm^2 \cdot \frac{y}{r}. \end{aligned} \tag{11}$$

## 4.3 Vektoren

Mit den Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir schliesslich die Gleichung des LRL-Vektors:

$$\vec{A} = m\dot{\vec{x}} \times \vec{L} - GMm^2 \frac{\vec{x}}{r}.$$

## 4.4 Die Bedeutung des LRL-Vektors

Auf kegelschnittförmigen Bahnen gibt es genau einen Punkt, welcher der Sonne am nächsten liegt. In diesem *Perihel* (gr. peri – nahe, helios – Sonne) stehen der Ortsvektor  $\vec{x}$ , der

Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\vec{x}}$  und der Drehimpulsvektor  $\vec{L}$  paarweise senkrecht aufeinander. Deshalb ist  $m\dot{\vec{x}} \times \vec{L}$  parallel zu  $\vec{x}$ . In der Folge ist  $\vec{A}$  parallel zu  $\vec{x}$ . Der LRL-Vektor zeigt damit vom Brennpunkt in Richtung Perihel (vgl. Abbildung 3).

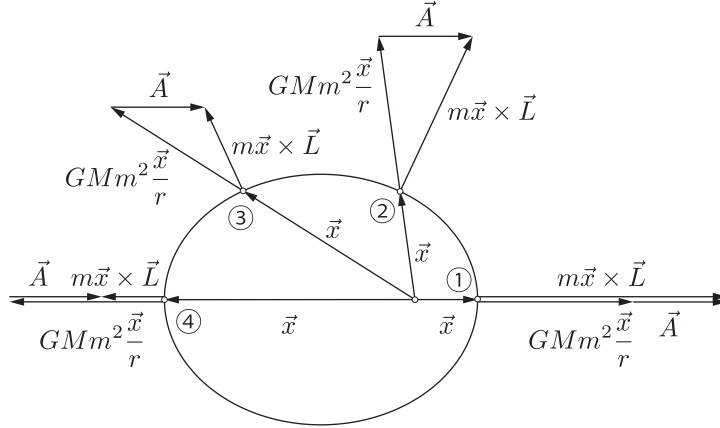


Abbildung 3 Der LRL-Vektor als Erhaltungsgröße.

Da der LRL-Vektor eine Erhaltungsgröße ist, findet im Kepler-Problem somit keine *Periheldrehung* statt.

#### 4.5 Die Herleitung der Bahnkurve mit dem LRL-Vektor

Mit Hilfe des LRL-Vektors kann die Bahnkurve äusserst elegant hergeleitet werden. Dazu multiplizieren wir  $\vec{A}$  skalar mit  $\vec{x}$  und vereinfachen:

$$\begin{aligned}
 |\vec{A}| \cdot r \cos(\varphi) &= \vec{A} \circ \vec{x} = \left( m\dot{\vec{x}} \times \vec{L} - GMm^2 \frac{\dot{\vec{x}}}{r} \right) \circ \vec{x} \\
 &= m\dot{\vec{x}} \times \vec{L} \circ \vec{x} - GMm^2 \frac{\dot{\vec{x}} \circ \vec{x}}{r} \\
 &= m\vec{x} \times \dot{\vec{x}} \circ \vec{L} - GMm^2 \frac{r^2}{r} = \vec{L} \circ \vec{L} - GMm^2 r \\
 &= L^2 - GMm^2 r.
 \end{aligned}$$

Dann lösen wir nach  $r$  auf:

$$\begin{aligned}
 L^2 &= \left( GMm^2 + |\vec{A}| \cos(\varphi) \right) \cdot r \\
 r &= \frac{L^2}{GMm^2 + |\vec{A}| \cos(\varphi)} = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1 + \frac{|\vec{A}|}{GMm^2} \cos(\varphi)}.
 \end{aligned}$$

Das ist die *Polarform* der Kegelschnittgleichung (vgl. [11]) mit dem *Parameter*

$$p = \frac{L^2}{GMm^2}$$

und der *numerischen Exzentrizität*

$$\varepsilon = \frac{|\vec{A}|}{GMm^2}.$$

#### 4.6 Hamiltons Hodograph

Sei nun die  $x$ -Achse des Koordinatensystems so gewählt, dass sie parallel zum LRL-Vektor verläuft. Dann ist auch dessen zweite Komponente  $a_2$  gleich 0. Aus dem Gleichungssystem (11) lässt sich der Radius  $r$  leicht eliminieren. In einem ersten Schritt isolieren wir die Terme mit dem Radius:

$$\begin{aligned} a_1 - Lm\dot{y} &= -GMm^2 \frac{x}{r}, \\ Lm\dot{x} &= -GMm^2 \frac{y}{r}. \end{aligned}$$

Dann quadrieren wir beide Gleichungen und addieren sie:

$$\begin{aligned} (Lm\dot{x})^2 + (a_1 - Lm\dot{y})^2 &= \left(GMm^2 \frac{y}{r}\right)^2 + \left(GMm^2 \frac{x}{r}\right)^2 \\ L^2m^2\dot{x}^2 + L^2m^2\left(\dot{y} - \frac{a_1}{Lm}\right)^2 &= G^2M^2m^4 \frac{x^2 + y^2}{r^2} \\ \dot{x}^2 + \left(\dot{y} - \frac{a_1}{Lm}\right)^2 &= \left(\frac{GMm}{L}\right)^2. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung stellt einen Kreis in der  $\dot{x}$ - $\dot{y}$ -Ebene dar (vgl. Abbildung 4).

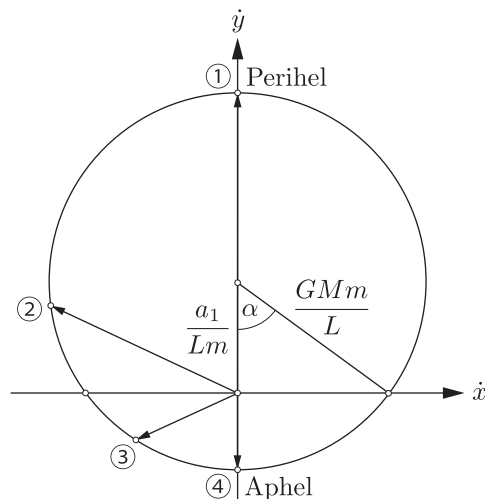


Abbildung 4 Hamiltons Hodograph.

Die Geschwindigkeitsvektoren an den Stellen ① bis ④ entsprechen den Positionen in der vorhergehenden Graphik. Der Cosinus des Winkels  $\alpha$  ist gleich der numerischen Exzentrizität:

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{a_1}{Lm}}{\frac{GMm}{L}} = \frac{a_1}{GMm^2} = \frac{GMm^2 \varepsilon}{GMm^2} = \varepsilon.$$

Diese Art graphischer Darstellung von Geschwindigkeiten geht auf den englischen Astronomen James Bradley (1693–1762) zurück. Bekannt wurde sie durch den irischen Mathematiker und Physiker William Rowan Hamilton (1805–1865), der diese Darstellung *Hodograph* nannte (von gr. *hodós* – Weg).

## Literatur

- [1] Eric. J. Aiton: The Contributions of Isaac Newton, Johann Bernoulli, Jakob Hermann to the Inverse Problem of Central Forces. H.-J. Hess, F. Nagel (ed.), Der Ausbau des Calculus durch Leibniz und die Brüder Bernoulli (Studia Leibnitiana, Sonderheft 17), Wiesbaden 1989, S. 48–58.
- [2] Johann Bernoulli: Extrait de la Réponse de M. Bernoulli à M. Herman, daté de Basle le 7. Octobre 1710. Histoire de l'Académie royale des sciences, 1710, S. 521–533:  
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k34901/f709.image>  
Zuletzt besucht: Januar 2018.
- [3] Herbert Goldstein: Prehistory of the „Runge–Lenz“ vector. Am. J. Phys. **43** (1975), S. 737.
- [4] Herbert Goldstein: More on the prehistory of the Laplace or Runge–Lenz vector. Am. J. Phys. **44** (1976), S. 1123–1124.
- [5] Jakob Hermann: Metodo d'investigare l'Orbite de Pianeti. Giornale de' letterati d'Italia, 1710, S. 447–467:  
<https://books.google.ch/books?id=2Qg0AAAAMAAJ&pg=PA447>  
Zuletzt besucht: Januar 2018.
- [6] Extrait d'une lettre de M. Herman à M. [Johann] Bernoulli, daté de Padoüe le 12. Juillet 1710. Histoire de l'Académie royale des sciences (1710), S. 519–521:  
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k34901/f707.image>  
Zuletzt besucht: Januar 2018.
- [7] Isaac Newton: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Diverse Ausgaben und Übersetzungen, z.B. von I. Bernard Cohen, Anne Whitman, University of California, 2016 oder Wikisource:  
[https://de.wikisource.org/wiki/Mathematische\\_Principien\\_der\\_Naturlehre/Buch1-VIII](https://de.wikisource.org/wiki/Mathematische_Principien_der_Naturlehre/Buch1-VIII). Zuletzt besucht: Januar 2018.
- [8] Bruce H. Pourciau: On Newton's Proof That Inverse-Square Orbits Must be Conics. Annals of Science, **48** (1991), 159–172.
- [9] Robert Weinstock: Dismantling a centuries-old myth: Newton's Principia and inverse-square orbits. Am. J. Phys. **50** (1982), S. 610–617.
- [10] Wikipedia: Jakob Hermann: [https://de.wikipedia.org/wiki/Jakob\\_Hermann](https://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_Hermann)  
Zuletzt besucht: Januar 2018.
- [11] Wikipedia: Kegelschnitte: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kegelschnitt>  
Zuletzt besucht: Januar 2018.

Ueli Manz  
Kantonsschule Schaffhausen  
Pestalozzistrasse 20  
8200 Schaffhausen  
e-mail: ueli.manz@kanti.sh.ch