

---

---

## Zur Entstehung der Mengenlehre II: Aus Briefen zwischen Richard Dedekind und Georg Cantor

---

---

Urs Stambach

Urs Stambach, \*1939, studierte an der ETH Zürich, wo er 1965 bei Beno Eckmann promovierte. Nach einem mehrjährigen Aufenthalt an der Cornell University in Ithaca, NY wurde er 1969 Professor an der ETH in Zürich. Sein Hauptarbeitsgebiet war die homologische Algebra und deren Anwendungen in der Gruppentheorie, insbesondere in der modularen Darstellungstheorie. Er ist Autor bzw. Mitautor mehrerer Bücher. Seit seiner Emeritierung im Jahre 2005 beschäftigt er sich – intensiver als vorher – mit Geschichte, Literatur und Musik.

Der erste Teil dieses Textes behandelte die Entwicklung im Briefwechsel zwischen Richard Dedekind und Georg Cantor, die sich aus einer Frage Cantors vom 29. November 1873 ergab: Lassen sich die positiven ganzen Zahlen eineindeutig den positiven reellen Zahlen zuordnen? Im darauf folgenden intensiven Gedankenaustausch ergab sich, dass die Frage zu verneinen war. Dieses Resultat drückte Cantor wenig später wie folgt aus: Die unendliche Menge der natürlichen Zahlen und die unendliche Menge der reellen Zahlen weisen unterschiedliche *Mächtigkeiten* auf.

Nur kurze Zeit nach dem erwähnten Briefaustausch, nämlich am 5. Januar 1874, legte Cantor Dedekind in einem Brief eine weitere Frage vor:

*Lässt sich eine Fläche (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Punkte der Fläche ein Punkt der Linie und umgekehrt zu jedem Punkte der Linie ein Punkt der Fläche gehört? Mir will es im Augenblick noch scheinen, dass die Beantwortung*

Der vorliegende zweite Beitrag zur Entstehung der Mengenlehre (für den ersten Teil siehe Elem. Math. 73 (2018), 74–80) beschäftigt sich mit der von Cantor 1874 formulierten Frage nach der Existenz einer eineindeutigen Zuordnung zwischen den Punkten der Einheitsstrecke und den Punkten des Einheitsquadrates. Das Beispiel, das Cantor im Jahre 1877 in einem Brief an Dedekind beschrieb, rüttelte an grundlegenden Prämissen, auf welche die damalige Mathematik aufbaute und erregte entsprechendes Aufsehen. Eine Reihe von weiteren Forschungen deckten in den Folgejahren schliesslich die Bedingungen auf, unter denen Abbildungen die Dimension invariant lassen.

dieser Frage, – obgleich man [...] zum Nein sich gedrängt sieht, dass man den Beweis fast für überflüssig halten möchte, – grosse Schwierigkeiten hat.

Diese Frage blieb längere Zeit unbeantwortet. Erst drei Jahre später, am 20. Juni 1877, teilte Cantor Dedekind einen Lösungsvorschlag mit. Er bat dabei: *Ich wünschte von Ihnen zu hören, ob Sie ein von mir angewandtes Schlussverfahren für arithmetisch strenge halten?* Cantor umschrieb das Problem völlig klar wie folgt: *Es handelt sich darum zu zeigen, dass Flächen, Körper, ja selbst Gebilde von  $\rho$  Dimensionen sich eindeutig zuordnen lassen stetigen Linien, also Gebilden von nur einer Dimension, dass also Flächen, Körper, ja sogar Gebilde von  $\rho$  Dimensionen, dieselbe Mächtigkeit haben, wie Curven.* Und etwas später im Brief: *Ist es möglich die  $\rho$  Grössen  $x_1, x_2, \dots, x_\rho$  der einen  $y$  so zuzuordnen, dass zu jedem bestimmten Werthesystem  $(x_1, x_2, \dots, x_\rho)$  ein bestimmter Werth  $y$  und auch umgekehrt zu jedem bestimmten Werth  $y$  ein und nur ein bestimmtes Werthesystem  $(x_1, x_2, \dots, x_\rho)$  gehört?* – Diese Frage ist, obgleich ich jahrelang das Gegentheil für richtig gehalten, wie mir nun scheint, zu bejahen.

Anschliessend beschrieb Cantor das folgende Verfahren (hier für zwei Dimensionen): Sind  $x_1 = 0.a_1a_2\dots$  und  $y_1 = 0.b_1b_2\dots$  die Koordinaten des Punktes im Quadrat, jeweils geschrieben als unendliche Dezimalbrüche, so lasse man diesem die Zahl  $z = 0.a_1b_1a_2b_2\dots$  entsprechen.

Am 22. Juni antwortete Dedekind an Cantor:

*Hochgeehrter Herr College!*

*Der einzige Einwand, den ich gegen Ihre interessante Schlussfolgerung im Augenblick erheben kann und den Sie vielleicht ohne Mühe beseitigen werden, ist folgender. Sie sagen: "Jede Zahl  $x$  ( $\geq 0$  und  $\leq 1$ ) lässt sich auf eine und nur eine Weise in Form eines unendlichen Dezimalbruches darstellen, so dass*

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_v}{10^v} + \dots$$

*wo  $\alpha_v$  ganze Zahlen sind, die  $\geq 0$  und  $\leq 9$ . Jede Zahl  $x$  bestimmt also eine unendliche Reihe  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  und umgekehrt." Das Unterstreichen des Wortes "unendliche" lässt mich vermuthen, dass Sie den Fall eines endlichen Bruches, worin auf ein von 0 verschiedenes  $\alpha_v$  nur noch die Ziffer 0 =  $\alpha_{v+1}$  =  $\alpha_{v+2}$  = etc. folgt, ausschliessen und statt*

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_v}{10^v} + \frac{0}{10^{v+1}} + \frac{0}{10^{v+2}} + \dots + \frac{0}{10^{v+v'}} + \dots$$

*stets*

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_v - 1}{10^v} + \frac{9}{10^{v+1}} + \frac{9}{10^{v+2}} + \dots + \frac{9}{10^{v+v'}} + \dots$$

*geschrieben haben wollen, um jede Möglichkeit einer doppelten Darstellung einer und derselben Zahl  $x$  auszuschliessen (die Zahl 0 würde allerdings in der Form 0, 00000... dargestellt werden müssen, 0, 3 aber in der Form 0, 2999...).*

*Wenn dies Ihre Meinung ist (man könnte natürlich ebensogut den Fall ausschliessen, dass von einer bestimmten Stelle ab nur die Ziffer 9 auftritt; dann würde aber etwas ähnliches*

auftreten), so ist mein Einwand folgender. Ich beschränke mich der Einfachheit halber auf den Fall  $\rho = 2$  und setze:

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_v \dots$$

$$y = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \dots = 0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_v \dots$$

und bilde mit Ihnen aus diesen beiden Hälften jedesmal die dritte Zahl

$$z = 0, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots,$$

wo

$$\gamma_1 = \alpha_1, \gamma_2 = \beta_2, \gamma_3 = \alpha_2, \dots, \gamma_{2v-1} = \alpha_v, \gamma_{2v} = \beta_v, \dots,$$

so ist allerdings  $z$  eine völlig bestimmte Funktion der beiden stetigen Variablen  $x, y$  und im selben Intervall ( $0 \leq z \leq 1$ ) enthalten. Allein dann gibt es doch unendlich viele echte Brüche, welche  $z$  niemals gleich wird, z. B.

$$0, 478310507090\alpha_7 0\alpha_8 0\alpha_9 0 \dots \alpha_v 0 \dots$$

und ebenso jeder Bruch  $0, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots$ , in welchem von einer bestimmten Stelle ab entweder  $\gamma_{2v-1}$  oder  $\gamma_{2v}$  immer  $= 0$  ist; denn die umgekehrte Ableitung von  $x, y$  aus einem solchen  $z$  würde auf ein nicht vorhandenes (ausgeschlossenes)  $x$  oder  $y$  führen.

Ich weiss nicht, ob mein Einwurf von wesentlicher Bedeutung für Ihre Idee ist, doch wollte ich ihn nicht zurückhalten.

Mit freundlichem Gruss

Ihr ergebenster

R. Dedekind

Braunschweig 22. Juni 1877

Cantor antwortete postwendend, am 23. Juni 1877, auf einer Postkarte:

Leider haben Sie mit Ihrem Einwurfe ganz recht; glücklicherweise trifft derselbe aber nur den Beweis, nicht die Sache.

Bereits am 25. Juni schlug Cantor eine Variante seines Beweises vor, die Kettenbrüche verwendet. Auf diesen Beweisansatz soll hier nicht näher eingegangen werden; statt dessen wird weiter unten in diesem Text ein später gefundener und einfacherer Beweis dargestellt, der auf Cantors ursprünglicher Idee beruht. Offenbar hatte Cantor beim Verfassen des Briefes bereits eine solche Möglichkeit in Betracht gezogen, denn er schrieb: [V]ielleicht findet sich später, dass die fehlende Stelle in jenem Beweise sich einfacher erledigen lässt, als es momentan in meinen Kräften stehen würde.

Diesmal benötigte Dedekind für seine Antwort etwas länger, so dass ihm Cantor in seiner Ungeduld am 29. Juni 1877 einen weiteren Brief schrieb:

Hochgeehrter Herr College!

Entschuldigen Sie gütigst meinen Eifer für die Sache, wenn ich Ihre Güte und Mühe so oft in Anspruch nehme; die Ihnen jüngst von mir zugegangenen Mittheilungen sind für

*mich selbst so unerwartet, so neu, dass ich gewissermassen nicht eher zu einer gewissen Gemüthsruhe kommen kann, als bis ich von Ihnen, sehr verehrter Freund, eine Entscheidung über die Richtigkeit derselben erhalten haben werde. Ich kann, so lange Sie mir nicht zugestimmt haben, nur sagen: je le vois, mais je ne le crois pas. Und da ersuche ich Sie, mir auf einer Postkarte schreiben zu wollen, bis wann Sie die Prüfung der Sache ausgeführt haben möchten, ob ich auf die Erfüllung meiner gewiss recht anspruchsvollen Bitte rechnen darf.*

Am 2. Juli 1877 war Dedekind dann in der Lage zu antworten:

*Ihren Beweis habe ich noch einmal geprüft, und ich habe keine Lücke darin entdeckt; ich glaube gewiss, dass Ihr interessanter Satz richtig ist, und beglückwünsche Sie zu demselben.*

Die Arbeit Cantors wurde am 12. Juli des gleichen Jahres beim Crelleschen Journal eingereicht; sie erschien aber nach Verzögerungen erst im Jahre 1878.<sup>1</sup> Diese Verzögerungen, für die wohl Kronecker verantwortlich war, führten bei Cantor zu Irritationen: Als im November seine Arbeit noch nicht gedruckt war, erwog Cantor gegenüber Dedekind, die Arbeit zurückzuziehen und als Separatdruck erscheinen zu lassen. Mit einem Hinweis auf eigene, ähnliche Erfahrungen mit Kronecker riet Dedekind aber dringend davon ab.<sup>2</sup>

An dieser Stelle soll der Beweis des Resultates von Cantor noch angefügt werden, wie er sich aus einer Modifikation der ursprünglichen Idee Cantors ergibt; sie ist offenbar Julius König zu verdanken.<sup>3</sup>

Man schreibt jede Zahl in  $[0, 1]$  als einen unendlichen Dezimalbruch, der nicht mit lauter Nullen endet. Es seien  $x = 0.a_1a_2a_3 \dots$  und  $y = 0.b_1b_2b_3 \dots$  die beiden Dezimalbrüche, welche die Koordinaten des Punktes im Quadrat beschreiben. Man ordnet diesem Paar den Dezimalbruch  $z = 0.c_1c_2c_3 \dots$  zu, wobei nun  $c_i$  anders als früher jeweils auch eine längere Sequenz von Ziffern bezeichnen kann. Die  $c_i$  mit ungeradem Index  $i$  ergeben sich aus  $x$  und die  $c_i$  mit geradem Index  $i$  aus  $y$ . Die Festlegung geschieht der Reihe nach wie oben; nur in dem Falle, wo laut jener Vorschrift  $c_i = 0$  zu setzen wäre, wird davon abgewichen: In diesem Fall wird  $c_i$  gleich der Sequenz von allen Ziffern bis und mit der nächsten, von Null verschiedenen Ziffer gesetzt. Ein Beispiel mag das Vorgehen näher erklären:

Es sei  $x = 0.\underline{2500738} \dots$  und  $y = 0.\underline{1004033} \dots$ . Dann ist  $z = 0.\underline{21500400703338} \dots$ .

Es ist offensichtlich, dass die so definierte Abbildung des (abgeschlossenen) Einheitsquadrates auf die Einheitsstrecke bijektiv ist.

Man kann der damaligen Brisanz dieses Resultates nachfühlen, wenn man weitere Bemerkungen in den Briefen vom 25. Juni und 2. Juli etwas nachgeht. Am 25. Juni erzählte Cantor:

*Seit mehreren Jahren habe ich mit Interesse die Bemühungen verfolgt, denen man sich im Anschluss an Gauss, Riemann, Helmholtz und anderen zur Klarstellung aller derjenigen Fragen hingegeben hat, welche die ersten Voraussetzungen der Geometrie betreffen. Dabei fiel mir auf, dass alle in dieses Feld schlagenden Untersuchungen ihrerseits von*

einer unbewiesenen Voraussetzung ausgehen, die mir nicht als selbstverständlich, vielmehr einer Begründung bedürftig erschienen ist. Ich meine die Voraussetzung, dass eine  $\rho$ -fach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit<sup>4</sup> zur Bestimmung ihrer Elemente  $\rho$  voneinander unabhängiger reeller Coordinaten bedarf, dass diese Zahl der Coordinaten für eine und dieselbe Mannigfaltigkeit weder vergrößert noch verkleinert werden könne. – Diese Voraussetzung war auch bei mir zu einer Ansichtssache geworden, ich war von ihrer Richtigkeit fest überzeugt; mein Standpunct unterschied sich nur von allen anderen dadurch, dass ich jene Voraussetzung als einen Satz ansah, der eines Beweises in hohem Grad bedurfte und ich spitzte meinen Standpunct zu einer Frage zu, die ich einigen Fachgenossen, im Besonderen auch bei Gelegenheit des Gaussjubiläums in Göttingen<sup>5</sup> vorgelegt habe, nemlich (sic!) zu folgender Frage:

Lässt sich ein stetiges Gebilde von  $\rho$  Dimensionen, wo  $\rho > 1$  auf ein stetiges Gebilde von einer Dimension eindeutig beziehen, so dass jedem Punct des einen ein und nur ein Punkt des anderen entspricht?

Die meisten, welchen ich die Frage vorgelegt, wunderten sich sehr darüber, dass ich sie stellen können, da es sich ja von selbst verstünde, dass zur Bestimmung eines Punctes in einer Ausgedehntheit von  $\rho$  Dimensionen immer  $\rho$  unabhängige Coordinaten gebraucht werden. Wer jedoch in den Sinn der Frage eindrang, musste bekennen, dass es zum mindestens eines Beweises bedürfe, warum sie mit dem "selbstverständlichen" nein zu beantworten sei. Wie gesagt, gehörte ich selbst zu denen, welche es für das Wahrscheinlichste hielten, dass jene Frage mit einem Nein zu beantworten sei, – bis ich vor ganz kurzer Zeit durch ziemlich verwickelte Gedankenreihen zu der Ueberzeugung gelangte, dass jene Frage ohne alle Einschränkung zu bejahen ist. Bald darauf fand ich den Beweis.

Es folgen weitere Bemerkungen zu den Konsequenzen, die sich aus diesem Resultat ergeben. Auf diesen Teil des Briefes geht Dedekind in seinem Antwortschreiben vom 2. Juli ein, aus dem oben bereits zitiert wurde:

Doch möchte ich, wie ich Ihnen schon durch die Postkarte angekündigt habe, eine Bemerkung äussern, die gegen die Konsequenzen gerichtet ist, die Sie in Ihrem Brief vom 25. Juni an die Mittheilung und den Beweis des Satzes geknüpft haben und die sich auf den Begriff der stetigen Mannigfaltigkeit von  $\rho$  Dimensionen beziehen. Nach Ihren Worten könnte es scheinen – meine Auffassung könnte unrichtig sein – als ob Sie auf Grund Ihres Satzes die Bedeutung oder die Richtigkeit dieses Begriffes in Zweifel ziehen wollten; Sie sagen z.B. am Schlusse des Briefes: "Nun scheint es mir, dass alle philosophischen und mathematischen Deduktionen, welche von jener irrtümlichen Voraussetzung" [der Bestimmtheit der Dimensionszahl] "Gebrauch machen, unzulässig sind. Vielmehr wird der Unterschied, welcher zwischen Gebilden verschiedener Dimensionszahl liegt, in ganz anderen Momenten gefunden werden müssen, als der für charakteristisch gehaltenen Zahl der unabhängigen Coordinaten."

Hingegen erkläre ich (trotz Ihres Satzes, oder vielmehr in Folge der durch Ihren Satz veranlassten Betrachtungen) meine Überzeugung oder meinen Glauben (ich habe nicht Zeit gehabt auch nur den Versuch eines Beweises zu machen) dafür, dass die Dimensionenzahl einer stetigen Mannigfaltigkeit nach wie vor die erste und wichtigste Invariante derselben ist, und ich muss alle bisherigen Schriftsteller über diesen Gegenstand in Schutz nehmen.

Zwar gebe ich Ihnen gerne zu, dass diese Constanz der Dimensionenzahl durchaus des Beweises bedürftig ist, und solange dieser Beweis nicht geführt ist, darf man daran zweifeln. Ich zweifle aber nicht an der Konstanz, obgleich Sie ja durch Ihren Satz vernichtet zu sein scheint. Alle Schriftsteller haben aber offenbar die stillschweigende ganz naturgemässe Voraussetzung gemacht, dass bei einer neuen Bestimmung der Punkte einer stetigen Mannigfaltigkeit durch neue Koordinaten diese letzteren auch (im Allgemeinen) stetige Funktionen der alten Koordinaten sein sollen, um das, was bei der ersten Ortsbestimmung als stetig zusammenhängend erscheint, bei der zweiten Ortsbestimmung ebenfalls als stetig verbunden zu erhalten. Ich glaube nun vorläufig an den folgenden Satz: "Gelingt es, eine gegenseitig eindeutige und vollständige Korrespondenz zwischen den Punkten einer stetigen Mannigfaltigkeit  $A$  von  $a$  Dimensionen einerseits und den Punkten einer stetigen Mannigfaltigkeit  $B$  von  $b$  Dimensionen andererseits herzustellen, so ist diese Korrespondenz selbst, wenn  $a$  und  $b$  ungleich sind, nothwendig eine durchweg unstetige." Durch diesen Satz würde auch die Erscheinung geklärt werden, die sich bei Ihrem ersten Beweise Ihres Satzes heraus gestellt hat, nämlich gerade die Unvollständigkeit dieses Beweises; die Beziehung, welche Sie damals (durch Decimalbrüche) zwischen den Punkten eines  $p$ -fachen Gebietes und den Punkten eines "Einstrecks" (sic!) festsetzen wollten, wäre (oder täusche ich mich hierin) eine stetige gewesen, wenn sie nur auch alle Punkte des Einstrecks umfasst hätte; ebenso scheint mir bei Ihrem jetzigen Beweise die anfängliche Korrespondenz zwischen den Punkten des  $p$ -"Strecks", deren Koordinaten sämtliche irrational sind, und den Punkten des Einstrecks mit ebenfalls irrationalen Koordinaten in gewissem Sinn (Kleinheit der Änderungen) so stetig zu sein, wie möglich; aber die Ausfüllung der Lücken zwingt Sie, eine grauenhafte Schwindel erregende Unstetigkeit in die Korrespondenz eintreten zu lassen, durch welche Alles in Atome aufgelöst wird, so dass jeder noch so kleine stetig zusammenhängender Theil des einen Gebietes in seinem Bilde als durchaus zerrissen unstetig erscheint.

Ich hoffe, mich deutlich genug ausgedrückt zu haben; die Absicht meines Schreibens besteht nur darin, Sie zu bitten, nicht ohne eine gründliche Prüfung meines Einwandes gegen die bisher für wahr gehaltenen Glaubensartikel der Mannigfaltigkeitslehre öffentlich zu polemisieren.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr ergebenster

R. Dedekind

Braunschweig 2. Juli 1877

Dedekind hat in seiner Bemerkung intuitiv den Kern der Sache klar erkannt; die zugehörigen Beweise und Präzisierungen liessen aber noch längere Zeit auf sich warten.

Es besteht kein Zweifel, dass Cantors Resultat die mathematische Welt verunsicherte. In seinem Bericht *Der Begriff der  $n$ -fachen stetigen Mannigfaltigkeit*, Jber. Deutsche Math. Vereinigung 7 (1899), 50–56 hat Enno Jürgens rückblickend dazu bemerkt: *Die Cantor'sche Abhandlung [brachte] jedenfalls vielen Mathematikern eine grosse und hochinteressante Überraschung*. Verschiedene Mathematiker haben sofort nach Cantors Veröffentlichung versucht, die Frage der  $n$ -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu klären, wobei sich die allgemeine Auffassung offenbar weitgehend mit der von Dedekind deckte. Es erschienen Beweisversuche von Jakob Lüroth (1844–1910) (*Ueber gegenseitig eindeutige*

und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander, Sitzungsber. phys. med. Sozietät in Erlangen 10 (1878), 190–195), von Johannes Thomae (1840–1921) (*Sätze aus der Functionentheorie*, Nachrichten der k. Ges. der Wiss. Göttingen (1878), 466–468), von Enno Jürgens (1849–1907) (*Über eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Tagblatt der 51. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte in Cassel 1878, 137–140), von Eugen Netto (1846–1919) (*Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, J. reine angew. Math. 86 (1879) 263–268) und von Georg Cantor selber (*Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten*, Nachrichten der k. Ges. der Wiss. Göttingen (1879), 127–135). Diese Versuche beschränkten sich auf die niedrigdimensionalen Fälle oder enthielten wesentliche Lücken. Die mathematische Welt wollte aber offenbar von dieser offenen Situation keine Kenntnis nehmen. Im oben bereits zitierten Rückblick von 1899 bemerkte Enno Jürgens: *So viel ich weiss, ist der allgemeine Beweis hierfür noch nicht erbracht worden. Wohl haben schon gleich in den Jahren 1878 und 1879 Thomae, Netto und Cantor Beweise veröffentlicht; und da auch in der Mathematik das gedruckte Wort, zumal wenn es von angesehenen Autoren herrührt, gern gläubige Aufnahme findet, so ist es erklärlich, dass seitdem die ganze Frage als bereits erledigt gegolten hat, und dass hervorragende Mathematiker jene Arbeiten noch neuerdings einfach citieren. Um so mehr aber ist es an der Zeit, dem entgegenzutreten und gerade hier in der Deutschen Mathematiker-Vereinigung auszusprechen, dass mit jenen Beweisen die Sache keineswegs ihren Abschluss gefunden hat.*

Der Grund für die Misserfolge liegt – wie man aus der Rückschau unschwer feststellen kann – darin, dass die notwendigen Techniken in der Mathematik noch nicht entwickelt waren. Es handelte sich bei der Frage der Dimensionsinvarianz um ein Problem, das in der Topologie (Analysis situs) seinen natürlichen Platz findet. Die Begriffswelt und die Techniken dieses Gebietes waren damals noch gar nicht geschaffen. Es dauerte auch eine gewisse Zeit, bis die topologische Natur des Problems erkannt wurde, in diesem Sinn sind die allgemeinen Beweisversuche von Jürgens und Netto die interessantesten. Darauf soll hier aber nicht näher eingegangen werden. Nur der (korrekte) Beweis von Netto für den Fall einer Abbildung von zwei auf eine Dimension soll im Folgenden noch kurz dargestellt werden; für diesen Spezialfall wurden auch von Jürgens und Cantor korrekte Beweise geliefert.

Eugen Netto beweist die Behauptung, dass eine eineindeutige Abbildung  $f$  des Quadrates  $[0, 1] \times [0, 1]$  auf die Strecke  $[0, 1]$  nicht stetig sein kann (siehe E. Netto: *Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, J. reine angew. Mathematik 86 (1879), 263–268). Dazu betrachtet er eine ganz im Innern des Quadrates liegende geschlossene Kurve  $K$  (etwa einen Kreis) und ihr Bild  $A$  auf der Strecke  $[0, 1]$ . Es seien  $a$  und  $b$  das Maximum bzw. Minimum der Funktion  $f$  auf den Punkten der Kurve  $K$ . Man beachte, dass wegen der Injektivität und der Stetigkeit von  $f$  die Menge  $A$  verschieden von  $[0, 1]$  sein muss. Wegen der Eineindeutigkeit von  $f$  gehören zu  $a$  und  $b$  zwei wohlbestimmte Kurvenpunkte  $a_1$  und  $b_1$ . Man wähle nun einen Punkt  $x$  in  $A$  und einen Punkt  $y$  ausserhalb von  $A$ . Es seien  $x_1$  und  $y_1$  die zugehörigen Urbilder und man betrachte eine Kurve im Quadrat, die  $x_1$  mit  $y_1$  verbindet und die weder  $a_1$  noch  $a_2$  enthält. Dann erhält man einen Widerspruch zur Eineindeutigkeit, weil die entsprechende Bildkurve wegen des Zwischenwertsatzes notwendigerweise  $a$  oder  $b$  treffen muss.

Mehr als zehn Jahre später, zeigte Giuseppe Peano in seiner Arbeit *Sur une courbe, qui remplit une aire plane*, Math. Ann. 36 (1890) 157–160, dass die Stetigkeit der Abbildungsfunktion allein für die Dimensionsinvarianz auch in diesem niedrigdimensionalen Fall nicht genügt: Er beschreibt eine stetige, aber nicht eineindeutige Abbildung des Intervalles  $[0, 1]$  auf das Einheitsquadrat.

Erst viel später konnte die ursprüngliche Frage vollständig geklärt werden: Im Jahre 1911 zeigte L.E.J. Brouwer in einer fulminanten Arbeit, dass eine eineindeutige und beidseitig stetige Abbildung die Dimension invariant lässt.<sup>6</sup> Brouwer führte darin eine Reihe von Ideen und Techniken ein, die sich – ausgebaut und weiterentwickelt – bald darauf als absolut grundlegend für das Gebiet der Algebraischen Topologie erwiesen. Wie die in Teil I erwähnte Arbeit von Cantor, so steht somit auch die Arbeit von Brouwer am Anfang eines ganz neuen Zweiges der Mathematik: War es bei Cantors Arbeit die Mengenlehre, so ist es bei Brouwers Arbeit die Algebraische Topologie.

**Dank.** Es ist mir ein Bedürfnis, der Bibliothek der Technischen Universität Braunschweig zu danken. Sie hat mir vor Jahren in völlig unbürokratischer Weise erlaubt, die Originale der Briefe zwischen Dedekind und Cantor einzusehen.

### Anmerkungen

- 1) Georg Cantor: *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*. J. reine angew. Mathematik 84 (1878), 242–258.
- 2) Genaueres zu diesem Vorgang ist in I. Grattan-Guinness: *The rediscovery of the Cantor–Dedekind Correspondence*, Jber. Deutsche Math. Vereinigung 76 (1974), 104–139 zu finden.
- 3) Siehe A. Schönflies: *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Jber. Deutsche Math. Vereinigung 8 (1900), zweites Heft, p. 23.
- 4) Der Begriff *Mannigfaltigkeit* hatte zu jener Zeit noch nicht die heutige scharf definierte Bedeutung. Cantor benützt *Mannigfaltigkeit* hier gleichbedeutend mit *Gebilde* (siehe weiter unten).
- 5) Veranstaltung zum 100. Geburtstag von Carl Friedrich Gauss im Jahre 1877.
- 6) L.E.J. Brouwer: *Beweis der Invarianz der Dimensionszahl*, Math. Ann. 70 (1911), 161–165.

Urs Stambach  
Department of Mathematics  
ETH-Zentrum  
CH-8092 Zurich, Switzerland  
e-mail: stamb@math.ethz.ch