

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2019 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

**Aufgabe 1377:** Sei  $k$  eine natürliche Zahl, die teilerfremd zu 10 ist, und  $a_n$  die Dezimalzahl

$$k \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ Ziffern}} k, \quad (n \geq 1).$$

Man bestimme ein  $k \geq 1$  und eine Primzahl  $p$  so, dass  $p$  alle  $a_n$  teilt.

Jürgen Spilker, Stegen, D

**Aufgabe 1378:** Seien  $w_\alpha$ ,  $w_\beta$  und  $w_\gamma$  die Winkelhalbierenden eines Dreieck  $ABC$ . Spiegelt man einmal  $A$  an  $w_\beta$  und zyklisch ( $B$  an  $w_\gamma$  etc.) und das andere mal  $A$  an  $w_\gamma$  und zyklisch, so erhält man zwei neue Dreiecke. Zeige, dass deren Flächen zusammengenommen der doppelten Fläche des ursprünglichen Dreiecks entspricht.

Raphael Muhr, Oberammergau, D

**Aufgabe 1379 (Die einfache dritte Aufgabe):** Man bestimme alle Polynome mit reellen Koeffizienten so, dass für alle reellen Zahlen  $x$  und  $y$  gilt

$$p(x + y) \leq xp(x) + yp(y).$$

Yagub N. Aliyev, Baku, AZ

### Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2017

**Aufgabe 1365.** Eine natürliche Zahl heisst Isozahl, wenn in ihrer Dezimaldarstellung alle Ziffern gleich sind. Man beweise, dass jede natürliche Zahl  $n$  der Länge  $L$ , d.h.  $10^{L-1} \leq n \leq 10^L$ , sich darstellen lässt als Summe von höchstens  $L + 1$  Isozahlen.

Jürgen Spilker, Stegen, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind Beiträge von folgenden 12 Lesern eingetroffen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Naheliegender ist, die Zahl  $n$  so in Summanden zu zerlegen, dass man jeweils die grösste Isozahl  $\leq n$  subtrahiert und dann den Prozess rekursiv auf das Ergebnis anwendet. Wir folgen der Lösung von *Jany C. Binz*, die im wesentlichen derjenigen von *Walter Burgherr* entspricht.

Es seien  $I_L$  ( $L = 1, 2, 3, \dots$ ) die  $L$ -stelligen Zahlen mit lauter Ziffern 1. Wegen  $I_{L+1} = 10I_L + 1$  lässt sich jede natürliche Zahl  $n \neq I_{L+1} - 1$  eindeutig in der Form

$$n = aI_L + r \quad \text{mit} \quad 1 \leq a \leq 9 \quad \text{und} \quad r < I_L$$

darstellen, während sich  $I_{L+1} - 1 = aI_L + bI_L$  mit  $a + b = 10$  und  $a, b \geq 1$  auf verschiedene Arten als Summe von zwei Isozahlen darstellen lässt.

Startet man mit einer Zahl  $n < I_{L+1}$  und zerlegt  $n$  als eine Summe  $n = \text{Iso}_1 + r_1$ , wie oben beschrieben und iteriert den Prozess, so verschwindet einerseits spätestens  $r_L$ , wegen  $r_L < I_1 = 1$  und  $n$  ist die Summe von höchstens  $L$  Isozahlen oder andererseits ist spätestens  $r_{L-1} = 10 = I_2 - 1$  eine Zahl von der Form  $I_k - 1$  für ein geeignetes  $k$  und  $n$  ist die Summe von höchstens  $L + 1$  Isozahlen. Wegen  $n < I_{L+1}$  hat man sogar etwas mehr als das Geforderte gezeigt.

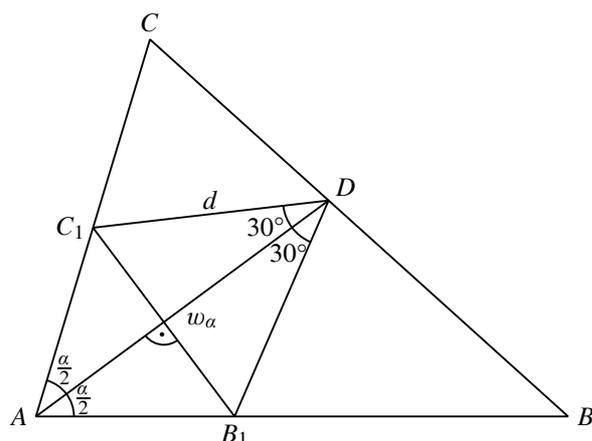
Bemerkungen: *Joachim Klose* weist darauf hin, dass die Schranke  $L + 1$  scharf ist und dass sich die Zahlen  $n_L = 10^L - L$  nicht als Summe von höchstens  $L$  Isozahlen schreiben lassen.

Einige Löser bemerkten den kleinen Fehler in der Aufgabenstellung, nämlich  $n \leq 10^L$  statt  $n < 10^L$ . Dieser Fehler schlich sich beim Redaktor ein und nicht etwa beim Autor.

**Aufgabe 1366.** Sei  $F_0$  die Fläche des kleinsten gleichseitigen Dreiecks, welches in einem Dreieck mit der Fläche  $F$  einbeschrieben ist. Man zeige  $4 \cdot F_0 \leq F$ .

Gheorghe Bercea, München, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Folgende 11 Leser haben Beiträge zugesandt: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D),



Walter Nohl (Steffisburg, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

In dieser Aufgabe kamen vielfältige Lösungsmethoden zum Einsatz. Während einige ein Minimalproblem lösten, kamen andere mit bekannten Ungleichungen schnell zum Ziel. Wir folgen der Lösung von *Frieder Grupp*, der mit elementaren Methoden direkt das Resultat erhält.

Es sei o.B.d.A. Winkel  $\alpha \geq 60^\circ$  und  $c \geq b$ . Die Winkelhalbierende  $w_\alpha$  schneide  $BC$  in  $D$  und die beiden Geraden durch  $D$ , die mit  $w_\alpha$  einen  $30^\circ$  Winkel einschliessen, schneiden  $AC$  in  $C_1$  und  $AB$  in  $B_1$ . Wegen  $\sphericalangle(CDA) = \beta + \frac{\alpha}{2} > 30^\circ$  liegen die Punkte  $C_1$  (resp.  $B_1$ ) im Innern der Strecken  $AC$  (resp.  $AB$ ).

Das Viereck  $C_1, AB_1D$  ist nun ein Drachenviereck und Dreieck  $C_1B_1D$  ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlänge mit  $d$  und dessen Fläche mit  $F_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}d^2$  bezeichnet werde. Nachfolgend wird  $4F_1 \leq F$  bewiesen, worauf  $4F_0 \leq F$  folgt.

Es gilt  $F = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha) = \frac{1}{2}w_\alpha(b+c) \sin(\frac{\alpha}{2})$ , also

$$w_\alpha = \frac{2bc}{b+c} \cos(\frac{\alpha}{2}). \quad (1)$$

Andererseits ist

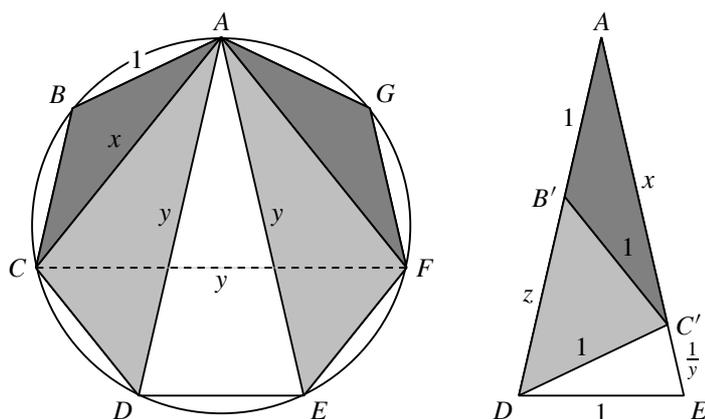
$$w_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}d + \frac{d}{2 \tan(\frac{\alpha}{2})} = \frac{\sqrt{3} \tan(\frac{\alpha}{2}) + 1}{2 \tan(\frac{\alpha}{2})}d.$$

Es gilt daher

$$F \geq 4F_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}w_\alpha(b+c) \sin(\frac{\alpha}{2}) \geq \sqrt{3}d^2 = \sqrt{3}w_\alpha^2 \frac{4 \tan^2(\frac{\alpha}{2})}{(\sqrt{3} \tan(\frac{\alpha}{2}) + 1)^2}.$$

Diese Ungleichung ist wegen (1) äquivalent zu

$$\frac{(b+c)^2}{bc} \geq \frac{16\sqrt{3} \tan(\frac{\alpha}{2})}{(\sqrt{3} \tan(\frac{\alpha}{2}) + 1)^2}.$$



Wegen  $(b+c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$  ist nun hinreichend, dass

$$\left(\sqrt{3} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1\right)^2 \geq 4\sqrt{3} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1\right)^2 \geq 0.$$

Dem Beweis entnimmt man noch, dass in  $F \geq 4F_1$  Gleichheit genau dann gilt, wenn  $\alpha = 60^\circ$  und  $b = c$  ist, das Dreieck  $ABC$  also gleichseitig ist.

**Aufgabe 1367 (Die einfache dritte Aufgabe).** Sei  $ABCDEFG$  ein regelmässiges Siebeneck. Beweise, dass

$$\frac{AD^3}{AC^3} + \frac{2AB - AC}{AB + AD} = 2.$$

Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, SRB

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von folgenden 16 Lesern sind Lösungen eingetroffen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Gheorghe Bercea (München, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Die meisten Lösungen lassen sich in eine von zwei Kategorien einteilen. Entweder wird mit dem Satz des Ptolemäus für Sehneviereck argumentiert, oder die zu beweisende Behauptung wird auf eine Identität für  $x = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$  reduziert. *Gerhard Wanner*, dessen Lösung wir präsentieren, argumentiert auch mit historischen Mitteln.

So ändern sich die Zeiten: Was damals eine grosse Entdeckung des grossen Archimedes war, nämlich das Siebeneck zu enträtseln, was dann Generationen von grossen Arabern beschäftigte (siehe z.B. J.P. Hogendijk (1984), *Greek and Arabic constructions of the regular heptagon*, Arch. f. Hist. of Ex. Sciences 30; oder Dj. Paunić, *Pravilni Poligoni*, Beograd 2006), ist jetzt „die einfache dritte Aufgabe“.

Wir nehmen  $AB = 1$  und bezeichnen  $AC = x$ ,  $AD = AE = CF = y$  (siehe linkes Bild). Da alle Kreisbögen gleich lang sind, sind alle Peripheriewinkel gleich oder ein ganzes Mehrfaches davon.

Die Idee, die so ungefähr auf F. Viète (1593) zurückgeht, ist, im linken Bild das Dreieck  $ABC$  auf  $ACD$  umzuklappen, und anschliessend beide zusammen auf  $ADE$  zu klappen. So entsteht die rechte Figur. Nun ist  $DAE \sim EDC'$  und  $CAF \sim DC'B'$ . So sehen wir im rechten Bild, zusammen mit Thales,

$$y = z + 1, \quad z = \frac{y}{x}, \quad x + \frac{1}{y} = y. \quad (1)$$

Damit wird die zu zeigende Behauptung  $z^3 + \frac{2-x}{1+y} = 2$ , nach Einsetzen von  $x = 1 + \frac{1}{z}$  und  $y = z + 1$  und Heraufmultiplizieren der Nenner zu

$$(z^3 - 2)(2z + z^2) + z - 1 = (z^2 + z + 1)(z^3 + z^2 - 2z - 1) = 0.$$

Die Gleichung  $z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0$ , die man aus (1) durch Elimination von  $x$  und  $y$  erhält, war schon Viète bekannt.

Bemerkung: Ein Leser gibt an, dass eine zu dieser Aufgabe äquivalente Aufgabenstellung als Aufgabe J348 in *Mathematical Reflections* 4 (2015) vom gleichen Autor vorgeschlagen wurde.