Elem. Math. 73 (2018) 182 – 186
0013-6018/18/040182-5
DOI 10.4171/EM/372

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2019 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1380: Man bestimme die kleinste Konstante C so, dass für alle Funktionen $f \in C^1([0,1])$ mit $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ die Ungleichung

$$C \cdot \int_0^1 f'(x)^2\,dx \geq (f(0) + f(1))^2$$

gilt.

Walther Janous, Innsbruck, A

Aufgabe 1381: Die Seiten a, b und c eines spitzwinkligen Dreiecks sollen als Achsen der Geradenspiegelungen Σ_a, Σ_b und Σ_c betrachtet werden. Setzt man diese drei Abbildungen in beliebiger Reihenfolge zusammen, so entsteht eine Schubspiegelung.

Wo liegen die Achsen der sechs möglichen Schubspiegelungen und wie lang ist der zu der jeweiligen Schubachse parallele Schiebevektor?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1382 (Die einfache dritte Aufgabe): Sei $\varphi(\cdot)$ die Euler-Funktion. Für welche $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^{\varphi(m)+1} \equiv a \mod m$$

für alle $a \in \mathbb{Z}$?

Rolfdieter Frank, Koblenz, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2017

Aufgabe 1368. Man bestimme alle ganzen Zahlen a, n, k, r mit $k > n \geq 2$ und $r \geq 1$ so, dass

$$k^a H_{n-1}^{(r)} = n^a H_{k-1}^{(r)},$$

wobei $H_m^{(r)} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu^r}$.

Horst Alzer, Waldbröl, D und Omran Kouba, Damaskus, SYR

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Lösungen von folgenden 8 Lesern eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Jürgen Spilker (Stegen, D) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Wegen den vorkommenden Brüchen kommen nur kleine Werte von a, n, k, und r als Lösungen in Frage. Die meisten Löser gingen ähnlich vor wie *Frieder Grupp*, dessen Lösung wir folgen.

Aus $n < k$ folgt $H_{n-1}^{(r)} < H_{k-1}^{(r)}$ und deshalb muss $a \geq 1$ sein. Es sei

$$f_n(a,r) = \frac{n^a}{H_{n-1}^{(r)}} = \frac{n^a}{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu^r}}.$$

Dann sind die Lösungen von $f_n(a,r) = f_k(a,r)$ mit $k > n \geq 2$ gesucht. Wir behaupten, dass

$$f_2(1,1) = f_3(1,1)$$

die einzige Lösung ist. Hierzu beweisen wir, dass $f_{n+1}(a,1) > f_n(a,1)$ für $n \geq 3$ und im Falle $r \geq 2$, dass $f_{n+1}(a,r) > f_n(a,r)$ für $n \geq 2$ ist.

Es gilt

$$\frac{f_{n+1}(a,r)}{f_n(a,r)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \cdot \frac{H_{n-1}^{(r)}}{H_{n-1}^{(r)} + \frac{1}{n^r}}.$$

Nun ist

$$\frac{f_{n+1}(1,r)}{f_n(1,r)} > 1 \Leftrightarrow (n+1)H_{n-1}^{(r)} > nH_{n-1}^{(r)} + \frac{1}{n^{r-1}} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2^r} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^r} > \frac{1}{n^{r-1}}.$$

Ist $r = 1$, so gilt diese Ungleichung für $n \geq 3$, ist $r > 1$, so gilt sie für $n \geq 2$. Im Falle $n = 2$, $r = 1$ gilt Gleichheit anstelle der Ungleichung. Weiterhin gilt für $a \geq 2$ die Ungleichung $\frac{f_{n+1}(a,r)}{f_n(a,r)} > 1$, falls $\frac{f_{n+1}(2,r)}{f_n(2,r)} > 1$. Letztere Ungleichung ist äquivalent zu

$$(n+1)^2 H_{n-1}^{(r)} > n^2 H_{n-1}^{(r)} + \frac{1}{n^{r-2}} \Leftrightarrow (2n+1)\left(1 + \frac{1}{2^r} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^r}\right) > \frac{1}{n^{r-2}},$$

welche für $n \geq 2$ aber richtig ist.

Aufgabe 1369. Ein Kreis k mit Radius a und Zentrum im Koordinatenursprung O schneide die positive x-Achse im Punkt A, die positive y-Achse im Punkt C und die negative x-Achse im Punkt D. Weiter sei $B \neq C$ ein beliebiger Punkt auf der y-Achse. Der Punkt S ist der von A verschiedene Schnittpunkt der Geraden AB mit k und N der Schnittpunkt der durch B gehenden Senkrechte zu AS mit der Geraden CD. Zeige, dass

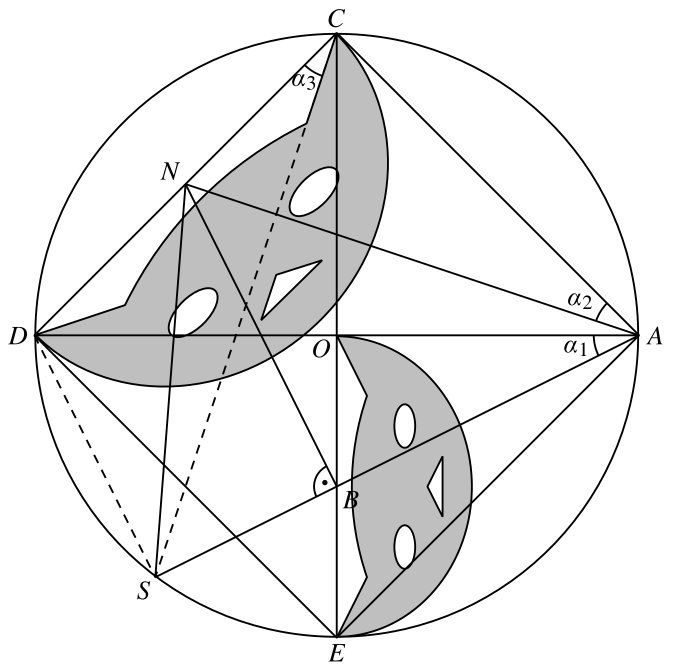
a) $\sphericalangle SAN = 45°$.

b) der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ASN auf der Geraden SC liegt.

c) die Fläche des Dreiecks ASN gleich a^2 ist.

d) die Dreiecke NCA und BOA ähnlich sind mit Faktor $\sqrt{2}$.

Raphael Muhr, Oberammergau, D



Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 19 Lesern sind Beiträge eingetroffen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D), Roland Wyss (Flumenthal, CH) und Josef Züger (Bonaduz, CH).

Geometrische Aufgaben können sich sehr vereinfachen, wenn man dahinter liegende Abbildungen entdecken kann. In diesem Fall können *Gerhard Wanner*, dessen Lösung wir folgen, und *Walter Burgherr* eine Drehstreckung als „Ursache“ ausfindig machen.

Wir denken uns, für einen festen Punkt A, zu einem beliebigen Punkt B einen Punkt N so definiert, dass BN auf AB senkrecht steht und dieselbe Länge hat, d.h. ABN ist ein halbes Quadrat. Die Abbildung $B \mapsto N$ ist also eine Drehstreckung um $-45°$ mit Faktor $\sqrt{2}$ (siehe Figur). Diese orthogonale Abbildung führt $E \mapsto D$, $O \mapsto C$ und Geraden in Geraden über. Deshalb liegt N auf der Geraden DC, wie in der Aufgabenformulierung gefordert. So sehen wir (a) und (d) sofort, wie auch $\alpha_1 = \alpha_2$.

Weiter folgt mit Eukl. III.21 (über dem Bogen DS) $\alpha_1 = \alpha_3$ und somit $\alpha_2 = \alpha_3$. Da der Schenkel AC von α_2 orthogonal zum Schenkel CD von α_3 ist, sind es auch die Schenkel AN und CS, dies beweist (b).

Durch die zwei ähnlichen Dreiecke $SAD \sim OAB$ ist

$$\frac{SA}{DA} = \frac{OA}{BA} = \frac{OA}{BN} \quad \Rightarrow \quad SA \cdot BN = DA \cdot OA = 2a^2.$$

Dies ist (c).

Aufgabe 1382 (Die einfache dritte Aufgabe). In einem Dreieck seien AD, BE und CF drei Cevatransversalen (D auf BC, E auf CA, F auf AB). Die folgende Gleichheit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{AD} + \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{BE} + \frac{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{CF}$$

ist richtig, wenn AD, BE und CF die Winkelhalbierenden sind.

Die Umkehrung ist nicht richtig. Man finde ein einfaches Gegenbeispiel für den Fall, dass die Gleichheit zwar richtig ist, aber AD, BE und CF nicht die Winkelhalbierenden sind.

Michael Vowe, Therwil, CH und Stefan Grieder, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden Lesern sind Zuschriften eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Josef Züger (Bonaduz, CH).

Intuitiv ist klar, dass die Umkehrung nicht gelten kann, da man für die Cevatransversalen zwei Freiheitsgrade hat, und die zu erfüllende Gleichung nur einen Freiheitsgrad reduziert. Wir folgen der Lösung von *Walter Burgherr*.

Für die Winkelhalbierenden w_α, w_β und w_γ gilt nach dem Sinussatz und dem Winkelhalbierendensatz

$$\frac{w_\alpha}{\sin(\beta)} = \frac{\frac{c}{b+c} \cdot a}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{und} \quad \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}.$$

Durch Elimination von $\sin(\beta)$, Ersetzen von $\sin(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ und Umformen erhält man

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{w_\alpha} = \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

Durch zyklisches Vertauschen und Addition erhält man die Behauptung.

Ein Gegenbeispiel liefert das Dreieck mit den Seiten $a = 13$, $b = 13$, $c = 10$ und $h = 12$. Es ist $\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \frac{5}{13}$ und daraus $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{13}}$ sowie $\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{12}{13}$. Nach dem Cosinussatz findet man mit $x = BD$

$$AD = \sqrt{x^2 - \frac{100x}{13} + 100} = BE.$$

In die Bedingung eingesetzt erhält man

$$2 \cdot \frac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\sqrt{x^2 - \frac{100x}{13} + 100}} + \frac{\frac{12}{13}}{12} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} + \frac{1}{10},$$

was auf die quadratische Gleichung

$$x^2 - \frac{100}{13}x + \frac{6100}{529} = 0$$

führt. Die Lösung $x_1 = \frac{130}{23}$ gehört zur Winkelhalbierenden, die zweite Lösung $x_2 = \frac{610}{299}$ stellt das Gegenbeispiel dar.

Bemerkung: *Moritz Adelmeyer* bemerkt, dass man für jedes gleichschenklige Dreieck mit $a = b$ mit Basiswinkel $\alpha \neq 60°$ ein Gegenbeispiel konstruieren kann, indem man die Winkelhalbierenden an den zugehörigen Höhen spiegelt. Für geeignete Winkel α liegen dann die gespiegelten Winkelhalbierenden ebenfalls innerhalb des Dreiecks.