Elemente der Mathematik 77 (2022), 47–50
DOI 10.4171/EM/472

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2022 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Aufgabe 1419: In der Ebene eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ mit Seitenlängen a_1, a_2, a_3 und Höhenschnittpunkt H sei ein von A_1, A_2, A_3 verschiedener Punkt P gegeben. Mit

$$r_1 = PA_1, \quad r_2 = PA_2, \quad r_3 = PA_3$$

beweise man folgende Ungleichungen:

$$\frac{a_2a_3 - r_2r_3}{r_1} \leq \sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \leq \frac{a_2r_3 + a_3r_2}{a_1}.$$

Die Gleichheitszeichen gelten genau für $P = H$. Man untersuche Spezialfälle.

Gheorghe Bercea, München, D

Aufgabe 1420: Die Felder eines $2 \times n$-Gitterrechtecks G_n sind so mit den Ziffern $1, 2, 3, 4$ zu belegen, dass die Ziffernsumme in jedem Teilquadrat von G_n gleich 7 beträgt. Man bestimme die Anzahl z_n solcher Belegungen rekursiv und als Funktion von n.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1421 (Die einfache dritte Aufgabe): n^3 $(n \geq 2)$ Würfelchen der Kantenlänge 1 seien zu einem Würfel mit der Kantenlänge n angeordnet und davon seien zwei schwarz und die übrigen weiss gefärbt. Die zwei ausgezeichneten schwarzen Würfelchen seien zufällig im $n \times n \times n$-Würfel verteilt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind sie benachbart, wenn dies bedeutet, dass zwei Seitenquadrate oder zwei Kanten oder bloss zwei Ecken der beiden schwarzen Würfelchen zusammenfallen?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2021

Aufgabe 1407. Die Normalparabel p_1: $y = x^2$ und eine zweite, gleich grosse Parabel p_2 (wieder mit Parameter $p = \frac{1}{2}$), deren Achse normal zur Achse der ersten Parabel steht, habe folgende Eigenschaft: Es gibt ein nicht degeneriertes Dreieck, dessen Ecken auf der Parabel p_1 liegen und dessen Seitengeraden die Parabel p_2 berühren. Wo liegen die Scheitelpunkte der möglichen liegenden Parabeln p_2?

Walter Burgherr, Rothenburg, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 11 Leser haben Lösungen eingesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Diese Aufgabe lässt sich relativ problemlos analytisch lösen. Die Rechnungen lassen sich etwas vereinfachen, wenn man die umgekehrte Fragestellung betrachtet. Wir folgen den Ausführungen von *Hans Brandstetter*, der auf diese Art vorgegangen ist.

Die Lösung der Aufgabe wird wesentlich einfacher, wenn man an die Parabel p_1: $y = x^2$ drei Tangenten legt, diese schneidet und Bedingungen findet unter denen die drei Tangentenschnittpunkte auf einer Normalparabel p_n: $(y-b)^2 = (x-a)$ mit Scheitelpunkt $S(a, b)$ liegen.

Die drei Tangenten t_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) mit Tangentialpunkten $T_i(x_i, x_i^2)$ an die Parabel p_1 haben die Gleichungen t_i: $y = 2xx_i - x_i^2$. Die Schnittpunkte $S_{ij} = t_i \cap t_j$ haben die Koordinaten $S_{ij}(\frac{x_i+x_j}{2}, x_i x_j)$. Wir setzen die drei Tangentenschnittpunkte S_{ij} in die Gleichung der Normalparabel p_n ein und lösen das Gleichungssystem nach a, b, x_3 auf:

$$\left.\begin{aligned} S_{12} \in p_n\colon \quad (x_1x_2 - b)^2 &= \frac{x_1 + x_2}{2} - a \\ S_{13} \in p_n\colon \quad (x_1x_3 - b)^2 &= \frac{x_1 + x_3}{2} - a \\ S_{23} \in p_n\colon \quad (x_2x_3 - b)^2 &= \frac{x_2 + x_3}{2} - a \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} a &= -\frac{(2x_1^2x_2^2 - x_1 - x_2)^2}{16x_1^2x_2^2} \\ b &= \frac{2x_1^2x_2^2 - x_1 - x_2}{4x_1x_2} \\ x_3 &= -\frac{1}{2x_1x_2} \end{aligned}\right.$$

Da man auch nach x_3 auflösen kann, sehen wir, dass die Bedingung, dass alle drei Schnittpunkte auf der Normalparabel p_n liegen, nur erfüllt werden kann, wenn der dritte Tangentialpunkt T_3 in Abhängigkeit von T_1 und T_2 als $T_3(-\frac{1}{2x_1x_2}, \frac{1}{4x_1^2x_2^2})$ gewählt wird.

Der Zusammenhang $a = -b^2$ in der Lösung zeigt, dass der Nullpunkt, also der Scheitelpunkt von p_1, stets auf den möglichen Parabeln p_n liegt. Umgekehrt heisst das, dass die Scheitelpunkte jener möglichen Parabeln, die die Tangentialpunkte T_i enthalten, auf jener Parabel liegen, auf der die Tangentenschnittpunkte liegen.

Aufgabe 1408. Man zeige die folgende asymptotische Äquivalenz für $n \to \infty$:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} k!\right)^{\frac{1}{n}} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{e} \frac{n^{\frac{n}{2}+1}}{e^{\frac{3n}{4}}}.$$

Rafael Jakimczuk, Buenos Aires, ARG

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind von folgenden 12 Lesern Lösungen eingetroffen: Ulrich Abel (Friedberg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Gerhard Wanner (Genève, CH).

Es ist klar, dass man mit der Stirling-Formel startet und dann weitere Abschätzungen machen muss. Wir folgen den Ausführungen von *Henri Carnal*, der das sehr sorgfältig macht.

Zu zeigen ist (wenn man $(a_n - b_n) \to 0$ durch $a_n \cong b_n$ ersetzt)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k!) \cong \log(\sqrt{2\pi}) - \Big(\frac{3n}{4}+1\Big) + \Big(\frac{n}{2}+1\Big)\log(n).$$

Man benützt die Stirling-Formel

$$\log(k!) = \log(\sqrt{2\pi}) - k + \Big(\frac{1}{2}+k\Big)\log(k) + O\Big(\frac{1}{k}\Big).$$

Durch Summation ergibt sich

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k!) \cong \log(\sqrt{2\pi}) - \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2n}\log(n!) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\log(k). \tag{1}$$

Für den dritten Summanden ergibt sich wiederum mit der Stirling-Formel $\frac{1}{2n}\log(n!) \cong -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log(n)$. Für die Summation rechts betrachten wir die Funktion $f(x) = x^2\log(x)$ und $a_k = f(k+\frac{1}{2}) - f(k-\frac{1}{2})$. Mit

$$\log\Big(k \pm \frac{1}{2}\Big) = \log(k) + \log\Big(1 \pm \frac{1}{2k}\Big) = \log(k) \pm \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} \pm \cdots \tag{2}$$

bekommt man

$$\begin{aligned} a_k &= \Big(k+\frac{1}{2}\Big)^2\Big(\log(k) + \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + \cdots\Big) - \Big(k-\frac{1}{2}\Big)^2\Big(\log(k) - \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} - \cdots\Big) \\ &= 2k\log(k) + k + O\Big(\frac{1}{k}\Big). \end{aligned}$$

Und daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\log(k) &\cong \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - k) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\Big(f\Big(k+\frac{1}{2}\Big) - f\Big(k-\frac{1}{2}\Big)\Big) - \frac{n+1}{4} \\ &\cong \frac{1}{2n} f\Big(n+\frac{1}{2}\Big) - \frac{n+1}{4} = \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2n}\log\Big(n+\frac{1}{2}\Big) - \frac{n+1}{4} \\ &\cong \frac{n+1}{2}\log(n) + \frac{1}{4} - \frac{n+1}{4} = \frac{n+1}{2}\log(n) - \frac{n}{4}, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile nochmals (2) angewendet wurde. Setzt man schliesslich in (1) ein, so ergibt sich wie gewünscht

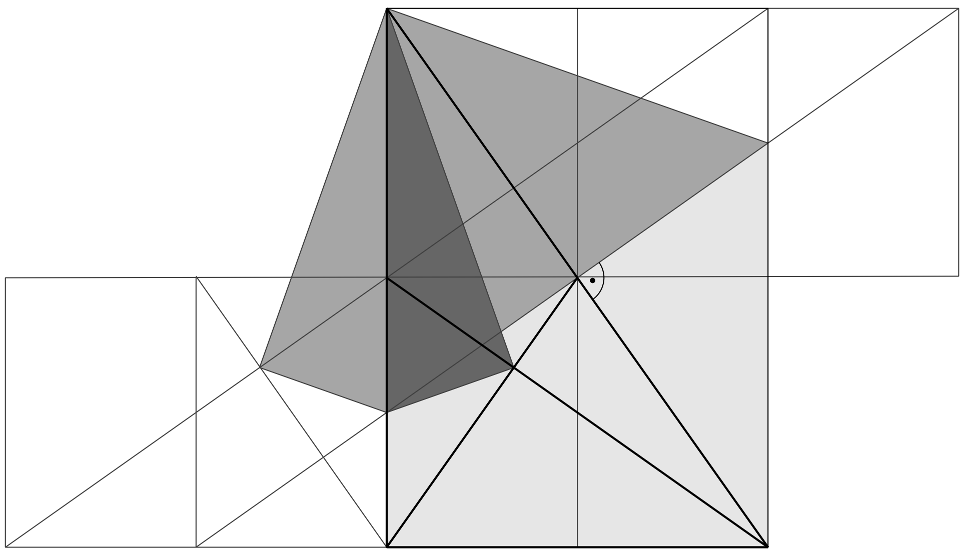
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k!) \cong \log(\sqrt{2\pi}) - \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log(n) + \frac{n+1}{2}\log(n) - \frac{n}{4}$$
$$= \log(\sqrt{2\pi}) - \Big(\frac{3n}{4}+1\Big) + \Big(\frac{n}{2}+1\Big)\log(n).$$

Aufgabe 1409 (Die einfache dritte Aufgabe). Man falte das Blatt eines DIN A4 Zeichenblockes so, dass eine Ecke auf die gegenüberliegende Ecke zu liegen kommt. Die nun über den Block stehende Ecke des gefalteten Blattes wird entlang der Blockkante zurück ins Innere gefaltet. Zeige, dass die zurückgefaltete Ecke die Länge und Breite des darunter liegenden Blattes je im Verhältnis 2 : 1 teilt.

Raphael Muhr, Oberammergau, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 16 Lesern wurden Lösungen zugesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Rolfdieter Frank (Koblenz, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Friedrich Juhnke (Magdeburg, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Während eine rechnerische Lösung nicht schwierig ist, konnte *François Sigrist*, dessen Lösung wir folgen, den gesuchten Punkt als Schwerpunkt eines Dreiecks identifizieren. Der ganze Beweis besteht nur aus einer Figur.



Sans paroles.