

---

---

## Neue Clifford–Morley Kreisketten

---

---

Peter Thurnheer

Peter Thurnheer doktorierte 1979 an der ETH Zürich bei Professor K. Chandrasekharan auf dem Gebiet der Zahlentheorie. Er unterrichtete an Gymnasien, Fachhochschulen und Universitäten an unterschiedlichen Orten, von Zürich, Bülach, über Trogen, Paris bis Port-au-Prince. Vor allem aber hielt er an der ETH Zürich während vielen Jahren Vorlesungen, hauptsächlich über Calculus, aber auch über Darstellende Geometrie, Kombinatorik und Klassische Zahlentheorie.

Im Folgenden verstehen wir unter einer  $n$ -Konfiguration  $n$  Geraden der Ebene in allgemeiner Lage. Die 4-Konfiguration wurde sehr ausführlich untersucht, zuerst von J. Steiner [6] und A. Miquel [4]. Eine Vielzahl äusserst interessanter Resultate aus diesem Zusammenhang (siehe zum Beispiel [2, Sätze 3, 4], [8]) weglassend, erwähnen wir nur die für das Weitere wichtigen Aussagen.

### Jakob Steiner, Auguste Miquel

- a) *Eine 4-Konfiguration enthält 4 Dreiecke. Die Mittelpunkte ihrer Umkreise liegen auf einem Kreis, dem Steiner Kreis der 4-Konfiguration, und die Umkreise schneiden sich in einem Punkt  $C$  auf diesem Kreis, dem Miquel oder Clifford Punkt der Konfiguration. Dieser ist somit der Knoten einer Kardioid, welche die Umkreisschar umhüllt.*

Die am intensivsten untersuchte Figur der elementaren Geometrie ist nach dem Dreieck wohl das vollständige Vierseit. Jakob Steiner und Auguste Miquel haben unter vielem Anderen gezeigt, dass sich die Umkreise der vier in einem Vierseit enthaltenen Dreiecke in einem Punkt – dem Miquel oder Clifford Punkt – schneiden und dass ihre Mittelpunkte auf einem Kreis – dem Steiner Kreis – liegen. Seligmann Kantor verallgemeinerte diese Resultate auf das vollständige Fünfseit. William Clifford und Frank Morley konstruierten schliesslich Kreisketten: Analoge Aussagen für Konfigurationen mit beliebig vielen Geraden. Seit dem 19. Jahrhundert nicht bemerkt wurde offenbar, dass analoge Ketten auch gebildet werden können, wenn man anstatt von den Umkreisen von den In- und Ankreisen der Dreiecke im Vierseit ausgeht: Dies wird in der vorliegenden Arbeit gezeigt. Dabei stellt sich heraus, dass in dieser Situation die Anzahl der speziellen, interessanten Kreise und Punkte mit der Anzahl der betrachteten Geraden exponentiell wächst.

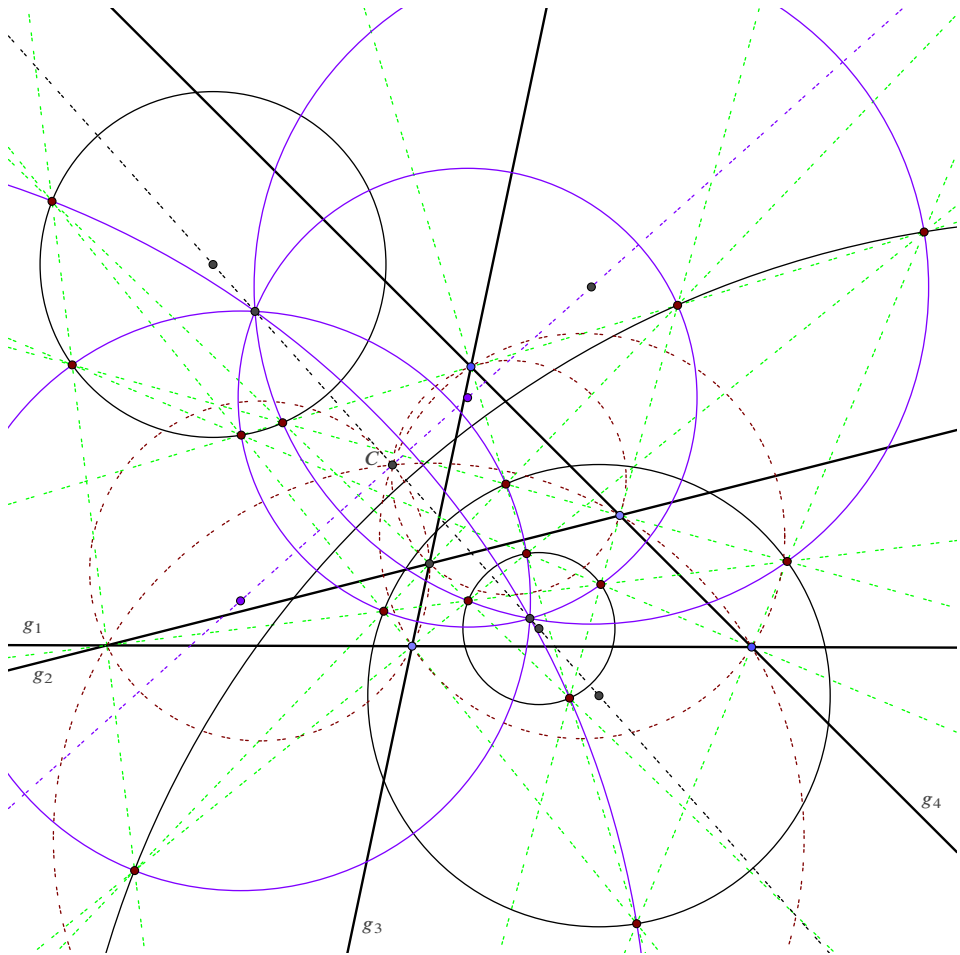


Fig. 1: Die acht 4-Zentrumskreise einer 4-Konfiguration. Ihre Mittelpunkte liegen auf 2 Geraden, die sich im Clifford Punkt  $C$  senkrecht schneiden

- b) Jedes der 4 Dreiecke einer 4-Konfiguration hat einen Inkreis und 3 Ankreise. Je 4 der Mittelpunkte dieser 16 Kreise liegen auf 8 neuen Kreisen – wir nennen sie die 4-Zentrumskreise der 4-Konfiguration (Figur 1).

Mehrere Mathematiker bewiesen, ausgehend von der Situation in a), Resultate in Konfigurationen mit mehr als 4 Geraden, so zum Beispiel S. Kantor [3]. W. Clifford [1] und F. Morley [5] konstruierten schliesslich Kreisketten folgender Art:

#### William Clifford, Frank Morley

- a) Eine 5-Konfiguration enthält fünf 4-Konfigurationen. Die Mittelpunkte der fünf zugehörigen Steiner Kreise liegen auf einem Kreis, dem Steiner Kreis der 5-Konfiguration. Und so weiter: Die Mittelpunkte der  $n$  Steiner Kreise der  $n$ , in einer  $n$ -Konfiguration

ration enthaltenen  $(n-1)$ -Konfigurationen liegen auf einem Kreis, dem Steiner Kreis der  $n$ -Konfiguration.

- b) Die Steiner Kreise der  $n$ , ( $n \geq 5$ ) in einer  $n$ -Konfiguration enthaltenen  $(n-1)$ -Konfigurationen schneiden sich in einem Punkt, dem Zentrumspunkt der  $n$ -Konfiguration. Dieser ist somit der Knoten einer Limaçon Kurve, welche diese Steiner Kreisschar umhüllt.
- c) Die Clifford Punkte der fünf, in einer 5-Konfiguration enthaltenen 4-Konfigurationen liegen auf einem Kreis, dem Clifford Kreis der 5-Konfiguration. Die Clifford Kreise der sechs in einer 6-Konfiguration enthaltenen 5-Konfigurationen schneiden sich in einem Punkt, dem Clifford Punkt der 6-Konfiguration. Und so weiter: Eine  $n$ -Konfiguration enthält  $n(n-1)$ -Teilkonfigurationen. Dabei existiert ein Clifford Punkt, in dem sich die  $n$  Clifford Kreise der Teilkonfigurationen schneiden, falls  $n$  gerade und ein Clifford Kreis, auf dem die  $n$  Clifford Punkte der Teilkonfigurationen liegen, falls  $n$  ungerade ist.

### Zusatz [7].

Der Zentrumspunkt einer 5-Konfiguration liegt auf dem Clifford Kreis der Konfiguration.

Wir werden nun sehen, dass auch ausgehend von den In- und Ankreisen der Dreiecke in einer 4-Konfiguration Ketten im Clifford–Morleyschen Sinne konstruiert werden können. Im Weiteren nennen wir den Inkreis und die 3 Ankreise eines Dreiecks die 3-Zentrumskreise der entsprechenden 3-Konfiguration.

### Satz

- a) Eine 5-Konfiguration enthält fünf 4-Konfigurationen, also insgesamt vierzig 4-Zentrumskreise. Dabei existieren sechzehn Kreise – wir nennen sie die 5-Zentrumskreise – von denen jeder fünf 4-Zentrumskreismittelpunkte enthält, aus jeder der fünf 4-Teilkonfigurationen einen. Die fünf 4-Zentrumskreise, deren Mittelpunkte auf einem dieser sechzehn 5-Zentrumskreise  $p$  liegen, schneiden sich in einem Punkt  $Q$  – wir nennen ihn einen  $5Q$ -Punkt. Dabei liegt der Punkt  $Q$  auf  $p$ . Er ist somit der Knoten einer Kardioide, welche diese 4-Zentrumskreisschar umhüllt.
- b) Eine 6-Konfiguration enthält sechs 5-Konfigurationen, also insgesamt sechsundneunzig 5-Zentrumskreise und  $5Q$ -Punkte. Dabei existieren zweiunddreissig Kreise – die 6-Zentrumskreise – von denen jeder sechs 5-Zentrumskreismittelpunkte enthält. Die sechs 5-Zentrumskreise, deren Mittelpunkte auf einem dieser 6-Zentrumskreise liegen, schneiden sich in einem Punkt – einem 6-Zentrumspunkt. Dieser ist somit der Knoten einer Limaçon Kurve, welche diese 5-Zentrumskreisschar umhüllt. Weiter existieren zweiunddreissig Kreise – die  $6Q$ -Kreise – von denen jeder sechs der sechsundneunzig  $5Q$ -Punkte, sowie einen 6-Zentrumspunkt, enthält.
- c) Und so weiter: Eine  $n$ -Konfiguration enthält  $n(n-1)$ -Konfigurationen, also insgesamt  $n \cdot 2^{n-2} (n-1)$ -Zentrumskreise,  $(n-1)$ -Zentrumspunkte und  $(n-1) Q$ -Punkte oder  $(n-1) Q$ -Kreise. Dabei existieren  $2^{n-1}$  Kreise – die  $n$ -Zentrumskreise – von denen jeder  $n(n-1)$ -Zentrumskreismittelpunkte enthält. Die  $n$  zugehörigen  $(n-1)$ -Zentrumskreise schneiden sich in einem Punkt – einem  $n$ -Zentrumspunkt. Dieser ist somit der Knoten einer Limaçon Kurve, welche die entsprechende  $(n-1)$ -Zentrumskreisschar umhüllt. Zudem existieren, falls  $n$  gerade ist,  $2^{n-1}$  Kreise – die

$nQ$ -Kreise – welche je  $n(n-1)Q$ -Punkte enthalten, respektive, falls  $n$  ungerade ist,  $2^{n-1}$  Punkte – die  $nQ$ -Punkte – in denen sich je  $n(n-1)Q$ -Kreise schneiden.

**Bemerkung.** Auseinander zu halten sind insbesondere die Begriffe  $n$ -Zentrumskreismittelpunkt und  $n$ -Zentrumspunkt. Für  $n \geq 4$  sind die  $n$ -Zentrumskreise die Kreise, welche  $(n-1)$ -Zentrumskreismittelpunkte enthalten.

Dabei gehen durch jeden  $(n-1)$ -Zentrumskreismittelpunkt zwei  $n$ -Zentrumskreise.

Für  $n \geq 5$  sind die  $n$ -Zentrumspunkte die Punkte, in denen sich die  $(n-1)$ -Zentrumskreise, deren Mittelpunkte auf einem  $n$ -Zentrumskreis liegen, schneiden. Zu jedem  $n$ -Zentrumskreis gibt es somit einen  $n$ -Zentrumspunkt. Damit haben wir insbesondere die  $n$ -Zentrumspunkte auch für  $n = 5$  definiert. Dabei gilt Folgendes:

Die 5-Zentrumspunkte fallen mit den 5Q-Punkten zusammen. Diese Punkte liegen auf den zugehörigen 5-Zentrumskreisen. Die 6-Zentrumspunkte liegen auf den 6Q-Kreisen.

Drei Phänomene, die in  $n$ -Konfigurationen mit mehr als 5 respektive 6 Geraden im Allgemeinen nicht mehr auftreten. Analog zu obiger Aussage über die Zentrumskreismittelpunkte gilt für  $n \geq 6$  auch:

Ist  $n$  gerade, so gehen durch jeden  $(n-1)Q$ -Punkt zwei  $nQ$ -Kreise. Ist  $n$  ungerade, so geht jeder  $(n-1)Q$ -Kreis durch zwei  $nQ$ -Punkte.

Wir stellen die Aussagen des Satzes noch in tabellarischer Form dar.

$n$ =Anzahl Geraden in der Konfiguration	$n$ -Zentrumskreise	$(n-1)$ -Zentrumskreise	$n$ -Zentrumspunkte	$nQ$ -Punkte	$nQ$ -Kreise
3	4 (In-, Ankreise)	–	–	–	–
4	8	16	–	–	–
5	16	40	16		–
6	32	96	32	–	32
...	...	...	...	...	...
$n$ ungerade	$2^{n-1}$	$n \cdot 2^{n-2}$	$2^{n-1}$	$2^{n-1}$	–
$n$ gerade	$2^{n-1}$	$n \cdot 2^{n-2}$	$2^{n-1}$	–	$2^{n-1}$

## Beweis

**Bezeichnungen.** Die Geraden der  $n$ -Ausgangskonfiguration seien  $g_1, g_2, \dots, g_n$ ; der Schnittpunkt der Geraden  $g_j$  und  $g_k$  sei  $S_{jk}$ ; die beiden Winkelhalbierenden von  $g_j, g_k$  im Punkt  $S_{jk}$  seien  ${}_1w_{jk}$  und  ${}_2w_{jk}$  (nachdem wir jeweils eine der beiden Winkelhalbierenden gewählt haben, lassen wir den vorangestellten Index weg); der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden  $w_{jk}$  und  $w_{mn}$  sei  $A_{jk, mn}$ . Im Weiteren nennen wir  $n$ -Konfigurationen, die Ausgangsgeraden  $g_j$  enthalten,  $gn$ -Konfigurationen, solche, die Winkelhalbierende enthalten,  $wn$ -Konfigurationen.

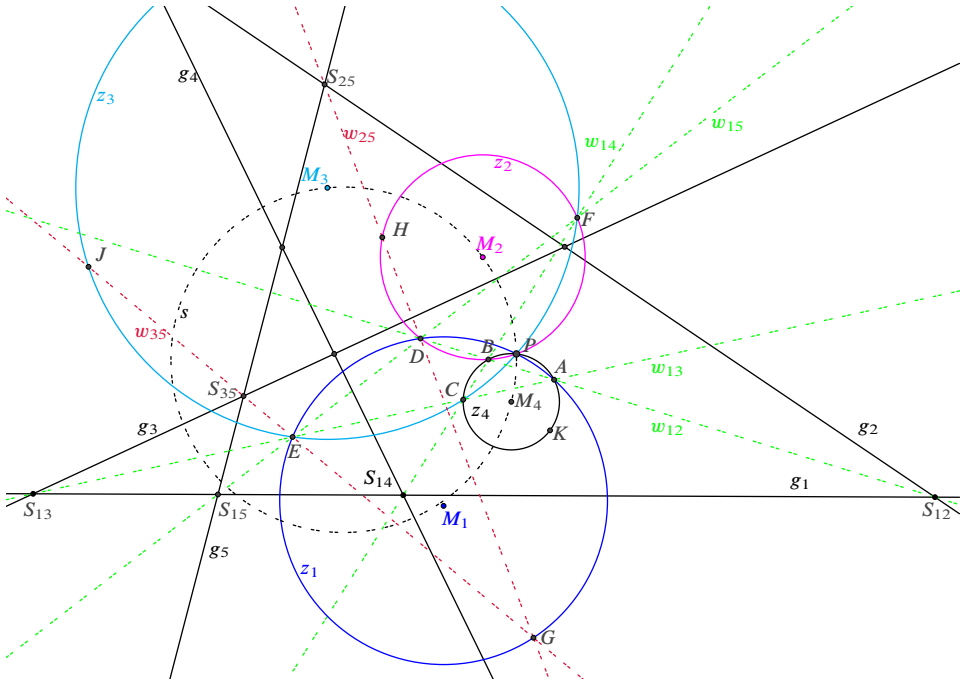


Fig. 2

**1. Schritt.** Wir beweisen exemplarisch die Existenz von einem der sechzehn 5-Zentrumskreise  $p$  respektive 5Q-Punkte  $Q$  in einer  $g_5$ -Ausgangskonfiguration – in Figur 2 die Geraden  $g_j, j = 1, 2, 3, 4, 5$ .

In jedem der 4 Schnittpunkte  $S_{1j}, j = 2, 3, 4, 5$  wählen wir eine der beiden Winkelhalbierenden  ${}_1w_{1j} = w_{1j}$ . Diese Winkelhalbierenden bilden die  $w_4$ -Konfiguration  $\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\}$ . Sie schneiden sich in den Punkten  $A, B, \dots, F$ . Dies sind offensichtlich ausschliesslich Mittelpunkte von 3-Zentrumskreisen von  $g_3$ -Teilkonfigurationen der  $g_5$ -Ausgangskonfiguration. Die Umkreise der in dieser  $w_4$ -Konfiguration enthaltenen Dreiecke seien  $z_j, j = 1, 2, 3, 4$ . Nach dem Satz von Steiner–Miquel liegen ihre Mittelpunkte  $M_j$  auf dem Steiner Kreis  $s$  der  $w_4$ -Konfiguration und sie schneiden sich im Clifford Punkt  $P$  auf  $s$ .

Nun zeigen wir, dass auf den Kreisen  $z_j$  neben den Dreiecksecken ein weiterer 3-Zentrumskreismittelpunkt liegt. Dazu betrachten wir in Figur 3 den 3-Zentrumskreismittelpunkt  $G = A_{25,35}$ . Der Punkt  $D = A_{12,15}$  als Inkreismittelpunkt des Dreiecks  $g_1, g_2, g_5$  liegt auch auf  $w_{25}$  und analog liegt  $E = A_{13,15}$  auch auf  $w_{35}$ . Nun benützt man mehrmals, dass ein Aussenwinkel im Dreieck gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel ist. Angewandt zuerst auf den Aussenwinkel bei  $S_{35}$  des Dreiecks  $S_{15}, S_{35}, S_{13}$ , dann auf denjenigen bei  $S_{15}$  des Dreiecks  $S_{25}, S_{15}, S_{12}$  und schliesslich auf denjenigen bei  $S_{35}$  des Dreiecks  $S_{25}, S_{35}, G$  liefert dies die Feststellung  $\alpha = \sphericalangle(EGD) = \xi + \varphi$ . Erneute Anwendung auf den Aussenwinkel  $\beta$  des Dreiecks  $S_{12}, A, S_{13}$  zeigt, dass

gilt  $\alpha = \sphericalangle(EGD) = \beta = \sphericalangle(EAD)$ . Daraus folgt, dass auch der 3-Zentrumskreismittelpunkt  $G$  auf dem Kreis  $z_1$  liegt. Analog zeigt man, dass die 3-Zentrumskreismittelpunkte  $H = A_{24,25}$ ,  $J = A_{34,35}$ ,  $K = A_{24,34}$  auf  $z_2$ ,  $z_3$  respektive  $z_4$  liegen. Die Kreise  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  sind 4-Zentrumskreise.

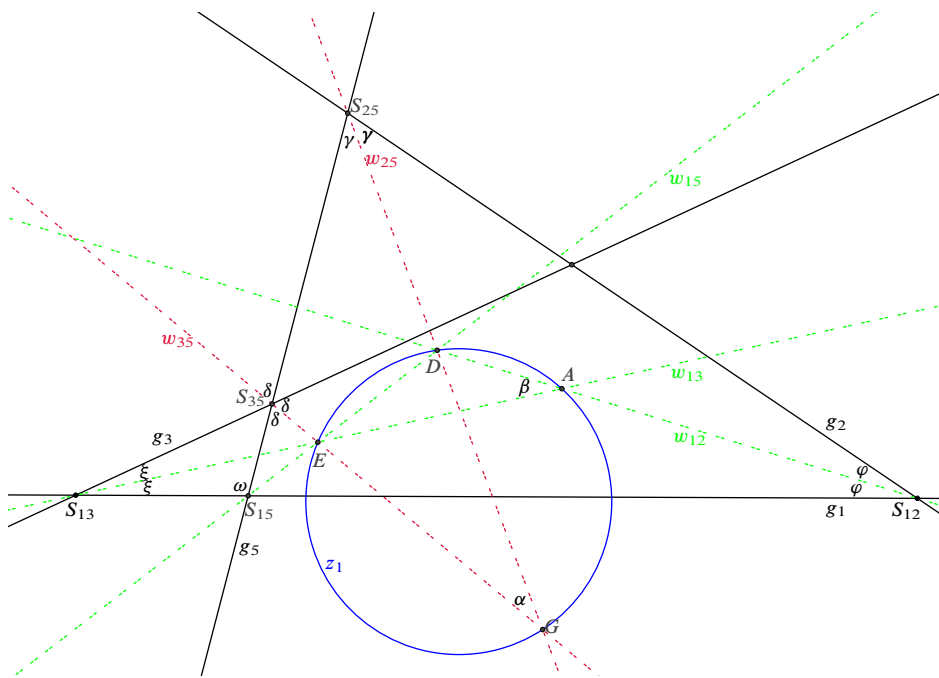


Fig. 3

Als Nächstes zeigen wir, dass der Mittelpunkt  $M_5$  eines weiteren 4-Zentrumskreises  $z_5$ , der  $P$  enthält, auf  $s$  liegt. Dazu betrachten wir in Figur 4 die  $w_4$ -Konfiguration  $\{w_{15}, w_{25}, w_{35}, w_{45}\}$ . Die Eckpunkte der in dieser  $w_4$ -Konfiguration auftretenden Dreiecke sind die 3-Zentrumskreismittelpunkte  $D, E, \dots, J$ . Zum Beispiel ist der Punkt  $E = A_{13,15}$  als Mittelpunkt eines Ankreises des Dreiecks  $S_{13}, S_{15}, S_{35}$  auch Schnittpunkt der Winkelhalbierenden  $w_{15}$  und  $w_{35}$ . Damit sind die Kreise  $z_1, z_2, z_3$  Umkreise von Dreiecken auch dieser  $w_4$ -Konfiguration. Für diese bestimmen sie den Steiner Kreis, der damit identisch ist mit  $s$  und den Clifford Punkt, der damit gleich  $P$  ist. Analog wie oben sieht man, dass der vierte Umkreis  $z_5$  in dieser  $w_4$ -Konfiguration neben den Dreiecksecken  $G, H, J$  auch den 3-Zentrumskreismittelpunkt  $K = A_{24,34}$  enthält, also ebenfalls ein 4-Zentrumskreis ist. Auf dem Kreis  $s$  liegen die Zentren  $M_1, M_2, \dots, M_5$  von fünf 4-Zentrumskreisen, welche sich im Punkt  $P$  auf  $s$  schneiden. Also ist  $s$  einer der 5 $Q$ -Kreise  $p$  und  $P$  einer der 5 $Q$ -Punkte  $Q$ .

Man stellt noch fest, dass der Index 1 in den Punkten  $H = A_{24,25}$ ,  $J = A_{34,35}$ ,  $K = A_{24,34}$ , welche den Kreis  $z_5$  definieren, nicht vorkommt. Der Kreis  $z_5$  ist ein 4-Zentrumskreis aus der  $g_4$ -Teilkonfiguration  $\{g_2, g_3, g_4, g_5\}$ . Die analoge Feststellung für die

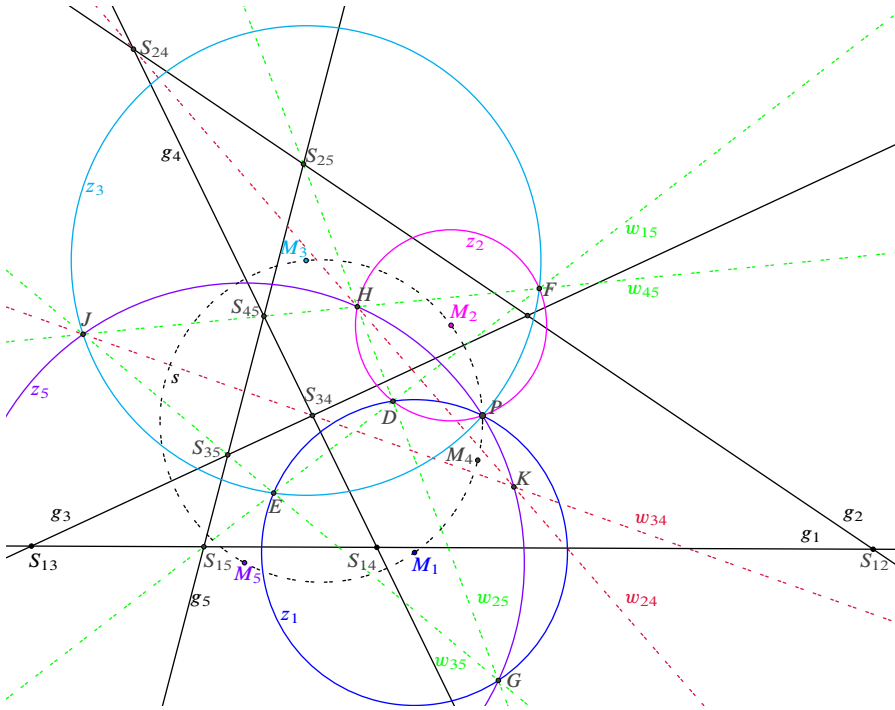


Fig. 4

andern Kreise  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  zeigt, dass der 5-Zentrumskreis  $p$  den Mittelpunkt von je einem 4-Zentrumskreis aus jeder der fünf  $g_4$ -Teilkonfigurationen enthält.

Nun kann man aber in jedem der 4 Schnittpunkte  $S_{1j}$ ,  $j = 2, 3, 4, 5$  zwischen zwei verschiedenen Winkelhalbierenden wählen. Man erhält so insgesamt 16 verschiedene  $w_4$ -Konfigurationen  $\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\}$ , von denen man ausgehen kann und welche jede einen der sechzehn 5-Zentrumskreise respektive 5Q-Punkte in Teil a) des Satzes definiert.

Festzuhalten aus den Überlegungen zu den Figuren 2 und 4 ist insbesondere die

**Folgerung.** Zwei  $w_4$ -Konfigurationen der Form

$$\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\} \quad \text{und} \quad \{w_{15}, w_{25}, w_{35}, w_{45}\}$$

definieren denselben 5-Zentrumskreis und denselben 5Q-Punkt, wenn man für  $w_{j5}$  in  $S_{j5}$ ,  $j = 2, 3, 4$ , diejenige Winkelhalbierende wählt, welche durch den Punkt  $A_{15,1j}$  geht.

**2. Schritt.** Nun enthalte die Ausgangskonfiguration eine weitere Gerade  $g_6$ . Wieder konstruieren wir exemplarisch einen der gesuchten 6-Zentrumskreise, 6-Zentrumspunkte respektive einen 6Q-Kreis, ausgehend von einer der sechzehn  $w_4$ -Konfigurationen  $\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\}$ . Wir nehmen zu dieser die Winkelhalbierende  ${}_1w_{16} = w_{16}$  hinzu, das heisst wir betrachten die  $w_5$ -Konfiguration  $W_1 = \{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{16}\}$ . Schliesslich

betrachten wir zusätzlich die  $w5$ -Konfiguration  $W_2 = \{w_{16}, w_{26}, w_{36}, w_{46}, w_{56}\}$ , wobei für  $w_{j6}$  in  $S_{j6}$ ,  $j = 2, 3, 4, 5$  diejenige Winkelhalbierende zu wählen ist, die durch den Punkt  $A16,1j$  geht. Wieder stellt man fest, dass alle Ecken der in diesen Konfigurationen auftretenden Dreiecke Mittelpunkte von 3-Zentrumskreisen von  $g3$ -Teilkonfigurationen der  $g6$ -Ausgangskonfiguration sind. Jede der fünf  $w4$ -Teilkonfigurationen der beiden  $w5$ -Konfigurationen  $W_1, W_2$  definiert einen 5-Zentrumskreis, und einen  $5Q$ -Punkt. Nach dem Satz von Clifford–Morley liegen die Mittelpunkte dieser 5-Zentrumskreise auf dem Steiner Kreis  $s_1$  von  $W_1$ , respektive auf dem Steiner Kreis  $s_2$  von  $W_2$ , die 5-Zentrumskreise schneiden sich im Zentrumspunkt  $Z_1$  von  $W_1$ , respektive im Zentrumspunkt  $Z_2$  von  $W_2$  und die fünf  $5Q$ -Punkte liegen auf dem Clifford Kreis  $c_1$  von  $W_1$  respektive dem Clifford Kreis  $c_2$  von  $W_2$ . Nach dem Zusatz zum Satz von Clifford–Morley liegt zudem der Punkt  $Z_j$  auf dem Kreis  $c_j$ ,  $j = 1, 2$ . Wir stellen die Bezeichnungen der eingeführten Elemente zusammen: In der 1. und 4. Spalte stehen die  $w4$ -Teilkonfigurationen, in der 2. und 5. Spalte die Bezeichnungen der 5-Zentrumskreise und in der 3. und 6. Spalte die Bezeichnungen der  $5Q$ -Punkte, welche durch die  $w4$ -Teilkonfigurationen definiert werden.

$\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\}$	$p_1$	$P_1$	$\{w_{16}, w_{26}, w_{36}, w_{46}\}$	$q_1$	$R_1$
$\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{16}\}$	$p_2$	$P_2$	$\{w_{16}, w_{26}, w_{36}, w_{56}\}$	$q_2$	$R_2$
$\{w_{12}, w_{13}, w_{16}, w_{15}\}$	$p_3$	$P_3$	$\{w_{16}, w_{26}, w_{56}, w_{46}\}$	$q_3$	$R_3$
$\{w_{12}, w_{16}, w_{14}, w_{15}\}$	$p_4$	$P_4$	$\{w_{16}, w_{56}, w_{36}, w_{46}\}$	$q_4$	$R_4$
$\{w_{16}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\}$	$p_5$	$P_5$	$\{w_{56}, w_{26}, w_{36}, w_{46}\}$	$q_5$	$R_5$

Nun wenden wir die Folgerung aus Schritt 1 mit verschiedenen Indekskombinationen an. Mit 6 anstelle von 5 erhält man  $q_1 = p_2$ ,  $R_1 = P_2$ , mit 6 anstelle von 5 und 5 anstelle von 4 erhält man  $q_2 = p_3$ ,  $R_2 = P_3$  und analog ist  $q_3 = p_4$ ,  $R_3 = P_4$ ,  $q_4 = p_5$ ,  $R_4 = P_5$ . Aber die 4 Kreise  $q_1, q_2, q_3, q_4$  respektive die  $5Q$ -Punkte  $R_1, R_2, R_3, R_4$  definieren den Steiner Kreis  $s_2$  und den Zentrumspunkt  $Z_2$ , respektive den Clifford Kreis  $c_2$  von  $W_2$ , sodass gilt  $s_1 = s_2$ ,  $Z_1 = Z_2$ ,  $c_1 = c_2$  und  $q_5$  ist ein sechster 5-Zentrumskreis, der  $Z_1$  enthält und dessen Mittelpunkt auf  $s_1$  liegt,  $R_5$  ein sechster  $5Q$ -Punkt der auf  $c_1$  liegt. Auf  $s_1$  liegen die Mittelpunkte von sechs 5-Zentrumskreisen, welche sich in  $Z_1$  schneiden und auf  $c_1$  liegen sechs  $5Q$ -Punkte;  $s_1$  ist ein 6-Zentrumskreis,  $Z_1$  ein 6-Zentrumspunkt und  $c_1$  ein  $6Q$ -Kreis, der  $Z_1$  enthält.

Diese Überlegungen können nun zwei Mal gemacht werden für jeden der sechzehn 5-Zentrumskreise und  $5Q$ -Punkte, welche definiert werden durch eine der sechzehn  $w4$ -Konfigurationen  $\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\}$ , von der wir ausgegangen sind, nämlich einmal unter Hinzunahme der Winkelhalbierenden  $w_{16} = {}_1w_{16}$ , einmal mit  $w_{16} = {}_2w_{16}$ . Dies führt schliesslich zu den zweiunddreissig 6-Zentrumskreisen, 6-Zentrumspunkten und  $6Q$ -Kreisen in Teil b) des Satzes.

**3. Schritt.** Entscheidend in der vorangegangenen Argumentation war die Feststellung, dass zwei  $w4$ -Konfigurationen einer bestimmten Art denselben 5-Zentrumskreis und  $5Q$ -Punkt definieren, was die Konstruktion entsprechender 6-Zentrumskreise, 6-Zentrumspunkte und  $6Q$ -Kreise ermöglichte, welche ihrerseits wieder durch zwei  $w5$ -Konfigurationen  $W_1, W_2$  analoger Art definiert werden können. Induktiv erhält man damit Teil c) des Satzes, wenn man noch beachtet, dass man in jedem weiteren Induktionsschritt den



Satz von Clifford–Morley anwenden kann auf die  $2^{n-2}$   $(n-1)$ -Zentrumskreise,  $(n-1)$ -Zentrumspunkte respektive  $(n-1)Q$ -Kreise oder  $(n-1)Q$ -Punkte, welche definiert werden durch die  $2^{n-2}$  verschiedenen  $w(n-1)$ -Konfigurationen  $\{w_{12}, w_{13}, \dots, w_{1n-1}\}$ , von denen man ausgeht, und man für die Wahl der zuzufügenden Winkelhalbierenden  $w_{1n}$  noch zwei Möglichkeiten hat.

**Bemerkung.** F. Morleys Vorgehen in [5] liefert nicht nur den Beweis der Existenz der im Satz von Clifford–Morley auftretenden Kurven und Punkte, sondern es erlaubt sogar, diese explizit zu berechnen in Funktion der Grössen, welche die Geraden  $g_j$  der zugrunde liegenden  $gn$ -Konfiguration definieren. Dasselbe gilt auch für die in obigem Satz auftretenden Elemente, da auch die, diese Elemente definierenden Winkelhalbierenden  $w_{jk}$  durch die Grössen, welche die Ausgangsgeraden  $g_j$  definieren, dargestellt werden können.

**Illustration.** F. Morley folgend beschreiben wir Geraden durch Koordinatengleichungen in der komplexen Ebene. Für eine Gerade  $g$  ist diese Koordinatengleichung von folgender Form [5, Seiten 97 und 98] (für  $z \in \mathbb{C}$  sei  $\bar{z}$  die konjugiert komplexe Zahl)

$$g : z \cdot \tau + \bar{z} = \bar{x}.$$

Dabei ist  $x \in \mathbb{C}$  die die Gerade  $g$  definierende Zahl und  $\tau = \bar{x}/x$ . Die Gerade  $g$  ist die Mittelnormale der Strecke  $0, x$ . Seien nun die Geraden  $g_j$ ,  $j = 1, 2$  gegeben durch die entsprechenden Grössen  $x_j$  und sei  $\tau_j = \bar{x}_j/x_j$ . Die Koordinatengleichungen von  $g_1, g_2$  sowie ihrer Winkelhalbierenden durch den Punkt  $S_{12}$  sind dann von folgender Form

$$g_j : z \cdot \tau_j + \bar{z} = \bar{x}_j \quad j w_{12} : z \cdot \omega_j + \bar{z} = v_j \quad j = 1, 2.$$

Ist  $\varphi_j = x_j/|x_j|$ ,  $j = 1, 2$  so ist  $|\varphi_j| = 1$ , also  $\bar{\varphi}_j = 1/\varphi_j$  und die Gerade  $g_j$  ist parallel zu  $i \cdot \varphi_j$ . Die Winkelhalbierenden  ${}_1w_{12}, {}_2w_{12}$  sind damit senkrecht zu  $\varphi_1 + \varphi_2$  respektive  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Mit reellen Zahlen  $\alpha_j$  wird deshalb  $v_1 = \alpha_1(\varphi_1 + \varphi_2)$ ;  $v_2 = \alpha_2(\varphi_1 - \varphi_2)$  und damit

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)/(\varphi_1 + \varphi_2) = 1/\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2, \\ \omega_2 &= (\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2)/(\varphi_1 - \varphi_2) = -1/\varphi_1 \cdot \varphi_2 = -\bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2. \end{aligned}$$

Da der Punkt  $S_{12}$  auf den beiden Winkelhalbierenden liegt, erfüllt er die Koordinatengleichungen:

$${}_1w_{12} : z \cdot \bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2 + \bar{z} = S_{12} \cdot \bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2 + \bar{S}_{12} \quad {}_2w_{12} : z \cdot \bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2 - \bar{z} = S_{12} \cdot \bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2 - \bar{S}_{12}.$$

Indem man  $\bar{z}$  aus den Koordinatengleichungen der Geraden  $g_1, g_2$  eliminiert, erhält man schliesslich für ihren Schnittpunkt  $S_{12} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)/(\tau_1 - \tau_2)$ , was, in obige Koordinatengleichungen eingesetzt, eine Darstellung der beiden Winkelhalbierenden durch die die Geraden  $g_j$  definierenden Zahlen  $x_j$  liefert.

**Dank.** Vielmals danken möchte ich Frau Dr. Valentina Georgoulas für die grosse und feingelungene Arbeit, die sie geleistet hat, um den Text und insbesondere die Figuren ins LaTeX-Format zu übertragen.

---

## Literatur

- [1] William Clifford. Synthetic proof of Miquel's theorem. *Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, 5 (1870), 124–141.
- [2] Norbert Hungerbühler, Clemens Pohle. Communicating harmonic pencils of lines. *International Journal of Geometry*, Vol. 9 (2020), No. 2, 15–38.
- [3] S. Kantor. Über das vollständige Fünfseit. *Wiener Berichte* (1878), 78.
- [4] Auguste Miquel. Théorèmes de Géométrie. *Journal de mathématiques pures et appliquées 1ère série*, 3 (1838), 485–487.
- [5] Frank Morley. On the metric geometry of the plane  $n$ -line. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1(2) (1900), 97–115.
- [6] Jakob Steiner. Questions proposées. Théorème sur le quadrilatère complet. *Annales de Gergonne*, 18 (1827–1828), 302–304.
- [7] Peter Thurnheer. Morley: „Kreisketten“ und komplexe Zahlen. *Bulletin VSMP*, 130 (2016), 32–37.
- [8] Gunter Weiss. Geometrie – Tochter der Kunst, Mutter der Mathematik, 2014.  
<https://studylibde.com/doc/3101320/>

Peter Thurnheer  
Entlisbergstr. 29  
CH-8038 Zürich  
e-mail: [tpeter@retired.ethz.ch](mailto:tpeter@retired.ethz.ch)