
Neue Clifford–Morley Kreisketten

Peter Thurnheer

Peter Thurnheer doktorierte 1979 an der ETH Zürich bei Professor K. Chandrasekharan auf dem Gebiet der Zahlentheorie. Er unterrichtete an Gymnasien, Fachhochschulen und Universitäten an unterschiedlichen Orten, von Zürich, Bülach, über Trogen, Paris bis Port-au-Prince. Vor allem aber hielt er an der ETH Zürich während vielen Jahren Vorlesungen, hauptsächlich über Calculus, aber auch über Darstellende Geometrie, Kombinatorik und Klassische Zahlentheorie.

Im Folgenden verstehen wir unter einer n -Konfiguration n Geraden der Ebene in allgemeiner Lage. Die 4-Konfiguration wurde sehr ausführlich untersucht, zuerst von J. Steiner [6] und A. Miquel [4]. Eine Vielzahl äusserst interessanter Resultate aus diesem Zusammenhang (siehe zum Beispiel [2, Sätze 3, 4], [8]) weglassend, erwähnen wir nur die für das Weitere wichtigen Aussagen.

Jakob Steiner, Auguste Miquel

- a) *Eine 4-Konfiguration enthält 4 Dreiecke. Die Mittelpunkte ihrer Umkreise liegen auf einem Kreis, dem Steiner Kreis der 4-Konfiguration, und die Umkreise schneiden sich in einem Punkt C auf diesem Kreis, dem Miquel oder Clifford Punkt der Konfiguration. Dieser ist somit der Knoten einer Kardioid, welche die Umkreisschar umhüllt.*

Die am intensivsten untersuchte Figur der elementaren Geometrie ist nach dem Dreieck wohl das vollständige Vierseit. Jakob Steiner und Auguste Miquel haben unter vielem Anderen gezeigt, dass sich die Umkreise der vier in einem Vierseit enthaltenen Dreiecke in einem Punkt – dem Miquel oder Clifford Punkt – schneiden und dass ihre Mittelpunkte auf einem Kreis – dem Steiner Kreis – liegen. Seligmann Kantor verallgemeinerte diese Resultate auf das vollständige Fünfsseit. William Clifford und Frank Morley konstruierten schliesslich Kreisketten: Analoge Aussagen für Konfigurationen mit beliebig vielen Geraden. Seit dem 19. Jahrhundert nicht bemerkt wurde offenbar, dass analoge Ketten auch gebildet werden können, wenn man anstatt von den Umkreisen von den In- und Ankreisen der Dreiecke im Vierseit ausgeht: Dies wird in der vorliegenden Arbeit gezeigt. Dabei stellt sich heraus, dass in dieser Situation die Anzahl der speziellen, interessanten Kreise und Punkte mit der Anzahl der betrachteten Geraden exponentiell wächst.

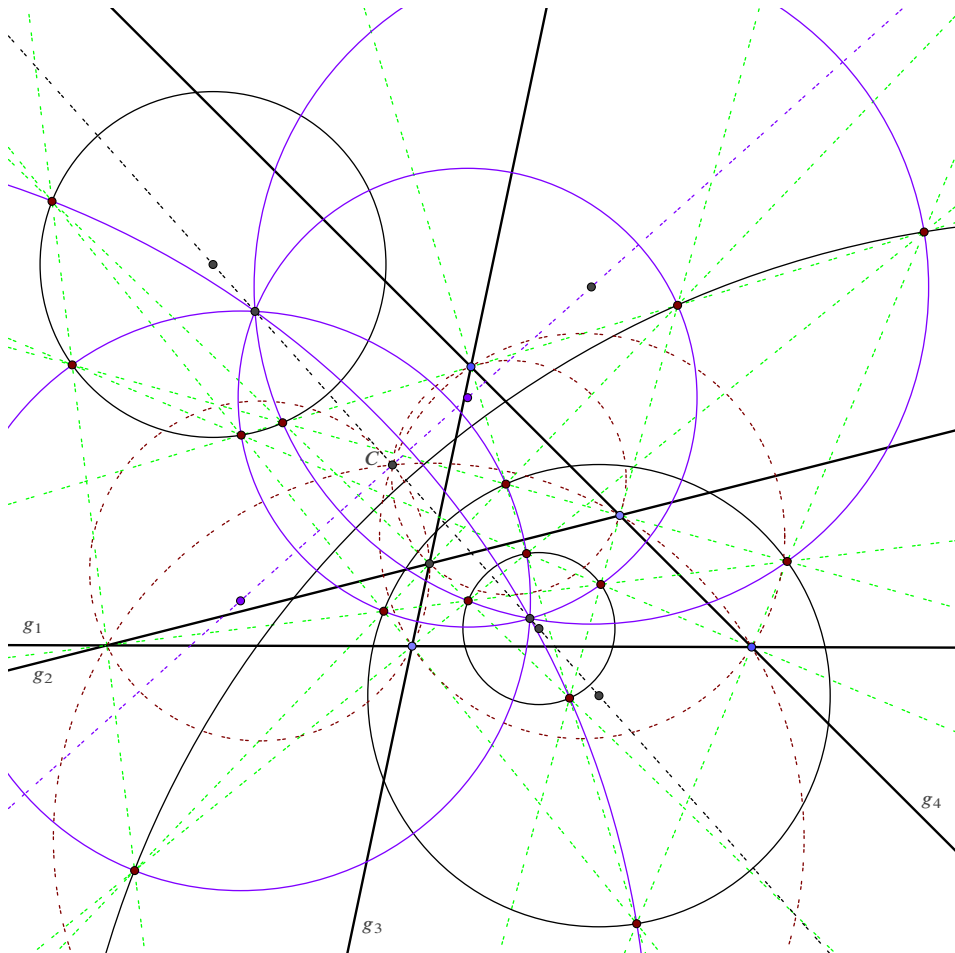


Fig. 1: Die acht 4-Zentrumskreise einer 4-Konfiguration. Ihre Mittelpunkte liegen auf 2 Geraden, die sich im Clifford Punkt C senkrecht schneiden

- b) Jedes der 4 Dreiecke einer 4-Konfiguration hat einen Inkreis und 3 Ankreise. Je 4 der Mittelpunkte dieser 16 Kreise liegen auf 8 neuen Kreisen – wir nennen sie die 4-Zentrumskreise der 4-Konfiguration (Figur 1).

Mehrere Mathematiker bewiesen, ausgehend von der Situation in a), Resultate in Konfigurationen mit mehr als 4 Geraden, so zum Beispiel S. Kantor [3]. W. Clifford [1] und F. Morley [5] konstruierten schliesslich Kreisketten folgender Art:

William Clifford, Frank Morley

- a) Eine 5-Konfiguration enthält fünf 4-Konfigurationen. Die Mittelpunkte der fünf zugehörigen Steiner Kreise liegen auf einem Kreis, dem Steiner Kreis der 5-Konfiguration. Und so weiter: Die Mittelpunkte der n Steiner Kreise der n , in einer n -Konfiguration

ration enthaltenen $(n-1)$ -Konfigurationen liegen auf einem Kreis, dem Steiner Kreis der n -Konfiguration.

- b) Die Steiner Kreise der n , ($n \geq 5$) in einer n -Konfiguration enthaltenen $(n-1)$ -Konfigurationen schneiden sich in einem Punkt, dem Zentrumspunkt der n -Konfiguration. Dieser ist somit der Knoten einer Limaçon Kurve, welche diese Steiner Kreisschar umhüllt.
- c) Die Clifford Punkte der fünf, in einer 5-Konfiguration enthaltenen 4-Konfigurationen liegen auf einem Kreis, dem Clifford Kreis der 5-Konfiguration. Die Clifford Kreise der sechs in einer 6-Konfiguration enthaltenen 5-Konfigurationen schneiden sich in einem Punkt, dem Clifford Punkt der 6-Konfiguration. Und so weiter: Eine n -Konfiguration enthält $n(n-1)$ -Teilkonfigurationen. Dabei existiert ein Clifford Punkt, in dem sich die n Clifford Kreise der Teilkonfigurationen schneiden, falls n gerade und ein Clifford Kreis, auf dem die n Clifford Punkte der Teilkonfigurationen liegen, falls n ungerade ist.

Zusatz [7].

Der Zentrumspunkt einer 5-Konfiguration liegt auf dem Clifford Kreis der Konfiguration.

Wir werden nun sehen, dass auch ausgehend von den In- und Ankreisen der Dreiecke in einer 4-Konfiguration Ketten im Clifford–Morleyschen Sinne konstruiert werden können. Im Weiteren nennen wir den Inkreis und die 3 Ankreise eines Dreiecks die 3-Zentrumskreise der entsprechenden 3-Konfiguration.

Satz

- a) Eine 5-Konfiguration enthält fünf 4-Konfigurationen, also insgesamt vierzig 4-Zentrumskreise. Dabei existieren sechzehn Kreise – wir nennen sie die 5-Zentrumskreise – von denen jeder fünf 4-Zentrumskreismittelpunkte enthält, aus jeder der fünf 4-Teilkonfigurationen einen. Die fünf 4-Zentrumskreise, deren Mittelpunkte auf einem dieser sechzehn 5-Zentrumskreise p liegen, schneiden sich in einem Punkt Q – wir nennen ihn einen $5Q$ -Punkt. Dabei liegt der Punkt Q auf p . Er ist somit der Knoten einer Kardioide, welche diese 4-Zentrumskreisschar umhüllt.
- b) Eine 6-Konfiguration enthält sechs 5-Konfigurationen, also insgesamt sechsundneunzig 5-Zentrumskreise und $5Q$ -Punkte. Dabei existieren zweiunddreissig Kreise – die 6-Zentrumskreise – von denen jeder sechs 5-Zentrumskreismittelpunkte enthält. Die sechs 5-Zentrumskreise, deren Mittelpunkte auf einem dieser 6-Zentrumskreise liegen, schneiden sich in einem Punkt – einem 6-Zentrumspunkt. Dieser ist somit der Knoten einer Limaçon Kurve, welche diese 5-Zentrumskreisschar umhüllt. Weiter existieren zweiunddreissig Kreise – die $6Q$ -Kreise – von denen jeder sechs der sechsundneunzig $5Q$ -Punkte, sowie einen 6-Zentrumspunkt, enthält.
- c) Und so weiter: Eine n -Konfiguration enthält $n(n-1)$ -Konfigurationen, also insgesamt $n \cdot 2^{n-2} (n-1)$ -Zentrumskreise, $(n-1)$ -Zentrumspunkte und $(n-1) Q$ -Punkte oder $(n-1) Q$ -Kreise. Dabei existieren 2^{n-1} Kreise – die n -Zentrumskreise – von denen jeder $n(n-1)$ -Zentrumskreismittelpunkte enthält. Die n zugehörigen $(n-1)$ -Zentrumskreise schneiden sich in einem Punkt – einem n -Zentrumspunkt. Dieser ist somit der Knoten einer Limaçon Kurve, welche die entsprechende $(n-1)$ -Zentrumskreisschar umhüllt. Zudem existieren, falls n gerade ist, 2^{n-1} Kreise – die

nQ -Kreise – welche je $n(n-1)Q$ -Punkte enthalten, respektive, falls n ungerade ist, 2^{n-1} Punkte – die nQ -Punkte – in denen sich je $n(n-1)Q$ -Kreise schneiden.

Bemerkung. Auseinander zu halten sind insbesondere die Begriffe n -Zentrumskreismittelpunkt und n -Zentrumspunkt. Für $n \geq 4$ sind die n -Zentrumskreise die Kreise, welche $(n-1)$ -Zentrumskreismittelpunkte enthalten.

Dabei gehen durch jeden $(n-1)$ -Zentrumskreismittelpunkt zwei n -Zentrumskreise.

Für $n \geq 5$ sind die n -Zentrumspunkte die Punkte, in denen sich die $(n-1)$ -Zentrumskreise, deren Mittelpunkte auf einem n -Zentrumskreis liegen, schneiden. Zu jedem n -Zentrumskreis gibt es somit einen n -Zentrumspunkt. Damit haben wir insbesondere die n -Zentrumspunkte auch für $n = 5$ definiert. Dabei gilt Folgendes:

Die 5-Zentrumspunkte fallen mit den 5Q-Punkten zusammen. Diese Punkte liegen auf den zugehörigen 5-Zentrumskreisen. Die 6-Zentrumspunkte liegen auf den 6Q-Kreisen.

Drei Phänomene, die in n -Konfigurationen mit mehr als 5 respektive 6 Geraden im Allgemeinen nicht mehr auftreten. Analog zu obiger Aussage über die Zentrumskreismittelpunkte gilt für $n \geq 6$ auch:

Ist n gerade, so gehen durch jeden $(n-1)Q$ -Punkt zwei nQ -Kreise. Ist n ungerade, so geht jeder $(n-1)Q$ -Kreis durch zwei nQ -Punkte.

Wir stellen die Aussagen des Satzes noch in tabellarischer Form dar.

n =Anzahl Geraden in der Konfiguration	n -Zentrumskreise	$(n-1)$ -Zentrumskreise	n -Zentrumspunkte	nQ -Punkte	nQ -Kreise
3	4 (In-, Ankreise)	–	–	–	–
4	8	16	–	–	–
5	16	40	16		–
6	32	96	32	–	32
...
n ungerade	2^{n-1}	$n \cdot 2^{n-2}$	2^{n-1}	2^{n-1}	–
n gerade	2^{n-1}	$n \cdot 2^{n-2}$	2^{n-1}	–	2^{n-1}

Beweis

Bezeichnungen. Die Geraden der n -Ausgangskonfiguration seien g_1, g_2, \dots, g_n ; der Schnittpunkt der Geraden g_j und g_k sei S_{jk} ; die beiden Winkelhalbierenden von g_j, g_k im Punkt S_{jk} seien ${}_1w_{jk}$ und ${}_2w_{jk}$ (nachdem wir jeweils eine der beiden Winkelhalbierenden gewählt haben, lassen wir den vorangestellten Index weg); der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_{jk} und w_{mn} sei $A_{jk, mn}$. Im Weiteren nennen wir n -Konfigurationen, die Ausgangsgeraden g_j enthalten, gn -Konfigurationen, solche, die Winkelhalbierende enthalten, wn -Konfigurationen.

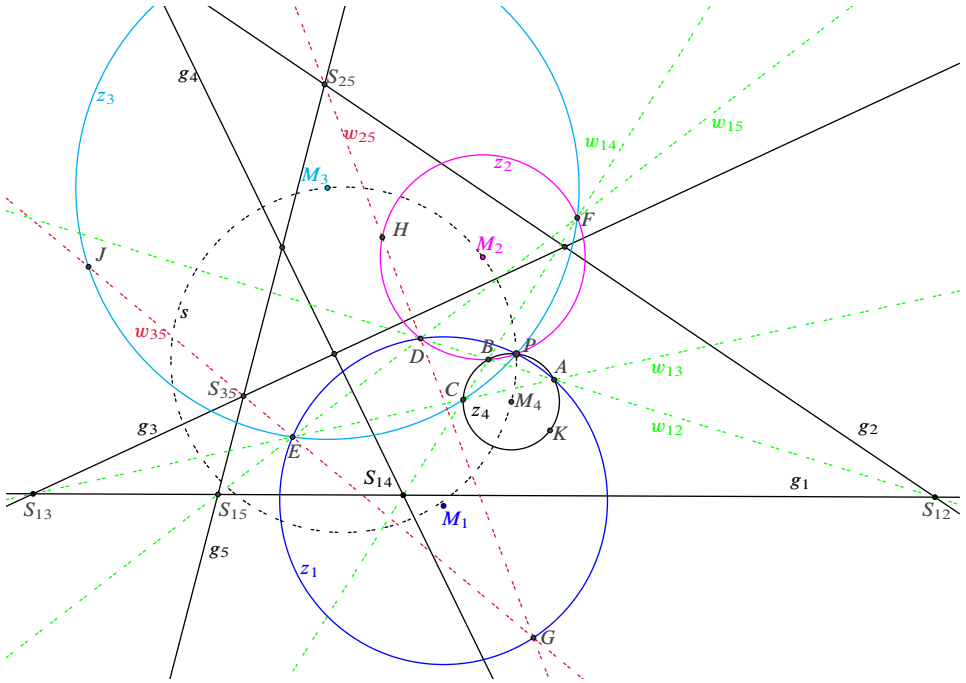


Fig. 2

1. Schritt. Wir beweisen exemplarisch die Existenz von einem der sechzehn 5-Zentrumskreise p respektive 5 Q -Punkte Q in einer g_5 -Ausgangskonfiguration – in Figur 2 die Geraden g_j , $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

In jedem der 4 Schnittpunkte S_{1j} , $j = 2, 3, 4, 5$ wählen wir eine der beiden Winkelhalbierenden ${}_1w_{1j} = w_{1j}$. Diese Winkelhalbierenden bilden die w_4 -Konfiguration $\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\}$. Sie schneiden sich in den Punkten A, B, \dots, F . Dies sind offensichtlich ausschliesslich Mittelpunkte von 3-Zentrumskreisen von g_3 -Teilkonfigurationen der g_5 -Ausgangskonfiguration. Die Umkreise der in dieser w_4 -Konfiguration enthaltenen Dreiecke seien z_j , $j = 1, 2, 3, 4$. Nach dem Satz von Steiner–Miquel liegen ihre Mittelpunkte M_j auf dem Steiner Kreis s der w_4 -Konfiguration und sie schneiden sich im Clifford Punkt P auf s .

Nun zeigen wir, dass auf den Kreisen z_j neben den Dreiecksecken ein weiterer 3-Zentrumskreismittelpunkt liegt. Dazu betrachten wir in Figur 3 den 3-Zentrumskreismittelpunkt $G = A_{25,35}$. Der Punkt $D = A_{12,15}$ als Inkreismittelpunkt des Dreiecks g_1, g_2, g_5 liegt auch auf w_{25} und analog liegt $E = A_{13,15}$ auch auf w_{35} . Nun benützt man mehrmals, dass ein Aussenwinkel im Dreieck gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel ist. Angewandt zuerst auf den Aussenwinkel bei S_{35} des Dreiecks S_{15}, S_{35}, S_{13} , dann auf denjenigen bei S_{15} des Dreiecks S_{25}, S_{15}, S_{12} und schliesslich auf denjenigen bei S_{35} des Dreiecks S_{25}, S_{35}, G liefert dies die Feststellung $\alpha = \sphericalangle(EGD) = \xi + \varphi$. Erneute Anwendung auf den Aussenwinkel β des Dreiecks S_{12}, A, S_{13} zeigt, dass

gilt $\alpha = \sphericalangle(EGD) = \beta = \sphericalangle(EAD)$. Daraus folgt, dass auch der 3-Zentrumskreismittelpunkt G auf dem Kreis z_1 liegt. Analog zeigt man, dass die 3-Zentrumskreismittelpunkte $H = A_{24,25}$, $J = A_{34,35}$, $K = A_{24,34}$ auf z_2 , z_3 respektive z_4 liegen. Die Kreise z_j , $j = 1, 2, 3, 4$ sind 4-Zentrumskreise.

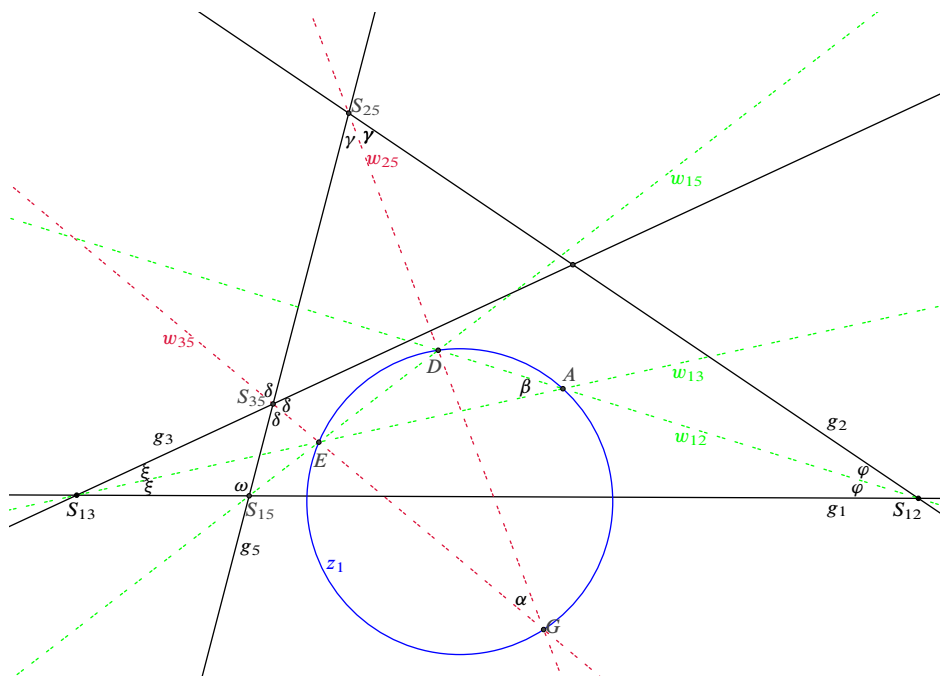


Fig. 3

Als Nächstes zeigen wir, dass der Mittelpunkt M_5 eines weiteren 4-Zentrumskreises z_5 , der P enthält, auf s liegt. Dazu betrachten wir in Figur 4 die w_4 -Konfiguration $\{w_{15}, w_{25}, w_{35}, w_{45}\}$. Die Eckpunkte der in dieser w_4 -Konfiguration auftretenden Dreiecke sind die 3-Zentrumskreismittelpunkte D, E, \dots, J . Zum Beispiel ist der Punkt $E = A_{13,15}$ als Mittelpunkt eines Ankreises des Dreiecks S_{13}, S_{15}, S_{35} auch Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_{15} und w_{35} . Damit sind die Kreise z_1, z_2, z_3 Umkreise von Dreiecken auch dieser w_4 -Konfiguration. Für diese bestimmen sie den Steiner Kreis, der damit identisch ist mit s und den Clifford Punkt, der damit gleich P ist. Analog wie oben sieht man, dass der vierte Umkreis z_5 in dieser w_4 -Konfiguration neben den Dreiecksecken G, H, J auch den 3-Zentrumskreismittelpunkt $K = A_{24,34}$ enthält, also ebenfalls ein 4-Zentrumskreis ist. Auf dem Kreis s liegen die Zentren M_1, M_2, \dots, M_5 von fünf 4-Zentrumskreisen, welche sich im Punkt P auf s schneiden. Also ist s einer der 5- Z entrumskreise p und P einer der 5- Q -Punkte Q .

Man stellt noch fest, dass der Index 1 in den Punkten $H = A_{24,25}$, $J = A_{34,35}$, $K = A_{24,34}$, welche den Kreis z_5 definieren, nicht vorkommt. Der Kreis z_5 ist ein 4-Zentrumskreis aus der g_4 -Teilkonfiguration $\{g_2, g_3, g_4, g_5\}$. Die analoge Feststellung für die

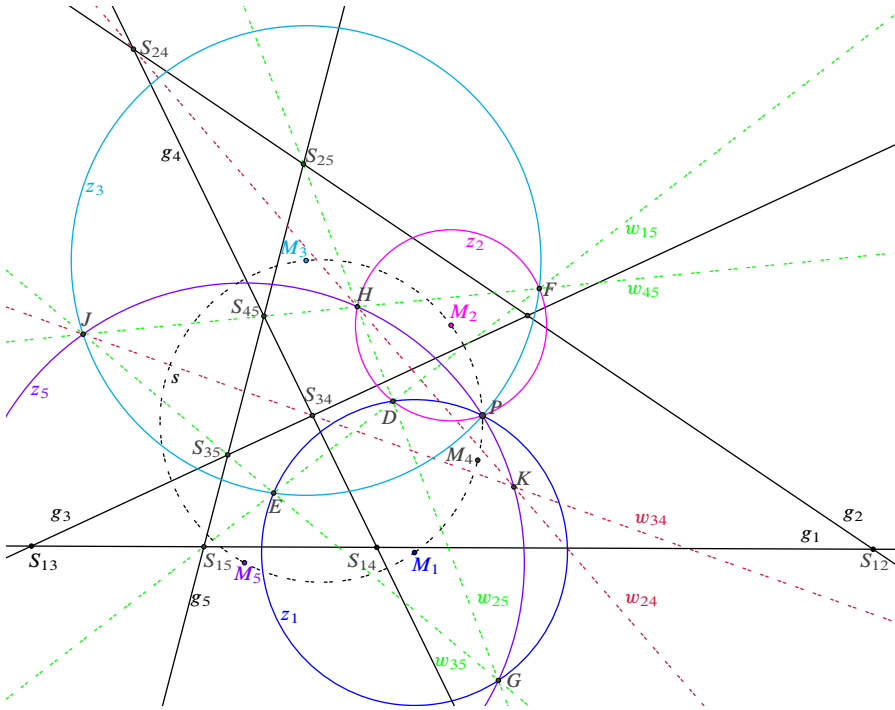


Fig. 4

andern Kreise z_j , $j = 1, 2, 3, 4$ zeigt, dass der 5-Zentrumskreis p den Mittelpunkt von je einem 4-Zentrumskreis aus jeder der fünf g_4 -Teilkonfigurationen enthält.

Nun kann man aber in jedem der 4 Schnittpunkte S_{1j} , $j = 2, 3, 4, 5$ zwischen zwei verschiedenen Winkelhalbierenden wählen. Man erhält so insgesamt 16 verschiedene w_4 -Konfigurationen $\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\}$, von denen man ausgehen kann und welche jede einen der sechzehn 5-Zentrumskreise respektive 5Q-Punkte in Teil a) des Satzes definiert.

Festzuhalten aus den Überlegungen zu den Figuren 2 und 4 ist insbesondere die

Folgerung. Zwei w_4 -Konfigurationen der Form

$$\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\} \quad \text{und} \quad \{w_{15}, w_{25}, w_{35}, w_{45}\}$$

definieren denselben 5-Zentrumskreis und denselben 5Q-Punkt, wenn man für w_{j5} in S_{j5} , $j = 2, 3, 4$, diejenige Winkelhalbierende wählt, welche durch den Punkt $A_{15,1j}$ geht.

2. Schritt. Nun enthalte die Ausgangskonfiguration eine weitere Gerade g_6 . Wieder konstruieren wir exemplarisch einen der gesuchten 6-Zentrumskreise, 6-Zentrumspunkte respektive einen 6Q-Kreis, ausgehend von einer der sechzehn w_4 -Konfigurationen $\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\}$. Wir nehmen zu dieser die Winkelhalbierende ${}_1w_{16} = w_{16}$ hinzu, das heisst wir betrachten die w_5 -Konfiguration $W_1 = \{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{16}\}$. Schliesslich

betrachten wir zusätzlich die $w5$ -Konfiguration $W_2 = \{w_{16}, w_{26}, w_{36}, w_{46}, w_{56}\}$, wobei für w_{j6} in S_{j6} , $j = 2, 3, 4, 5$ diejenige Winkelhalbierende zu wählen ist, die durch den Punkt $A16,1j$ geht. Wieder stellt man fest, dass alle Ecken der in diesen Konfigurationen auftretenden Dreiecke Mittelpunkte von 3-Zentrumskreisen von $g3$ -Teilkonfigurationen der $g6$ -Ausgangskonfiguration sind. Jede der fünf $w4$ -Teilkonfigurationen der beiden $w5$ -Konfigurationen W_1, W_2 definiert einen 5-Zentrumskreis, und einen $5Q$ -Punkt. Nach dem Satz von Clifford–Morley liegen die Mittelpunkte dieser 5-Zentrumskreise auf dem Steiner Kreis s_1 von W_1 , respektive auf dem Steiner Kreis s_2 von W_2 , die 5-Zentrumskreise schneiden sich im Zentrumspunkt Z_1 von W_1 , respektive im Zentrumspunkt Z_2 von W_2 und die fünf $5Q$ -Punkte liegen auf dem Clifford Kreis c_1 von W_1 respektive dem Clifford Kreis c_2 von W_2 . Nach dem Zusatz zum Satz von Clifford–Morley liegt zudem der Punkt Z_j auf dem Kreis c_j , $j = 1, 2$. Wir stellen die Bezeichnungen der eingeführten Elemente zusammen: In der 1. und 4. Spalte stehen die $w4$ -Teilkonfigurationen, in der 2. und 5. Spalte die Bezeichnungen der 5-Zentrumskreise und in der 3. und 6. Spalte die Bezeichnungen der $5Q$ -Punkte, welche durch die $w4$ -Teilkonfigurationen definiert werden.

$\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\}$	p_1	P_1	$\{w_{16}, w_{26}, w_{36}, w_{46}\}$	q_1	R_1
$\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{16}\}$	p_2	P_2	$\{w_{16}, w_{26}, w_{36}, w_{56}\}$	q_2	R_2
$\{w_{12}, w_{13}, w_{16}, w_{15}\}$	p_3	P_3	$\{w_{16}, w_{26}, w_{56}, w_{46}\}$	q_3	R_3
$\{w_{12}, w_{16}, w_{14}, w_{15}\}$	p_4	P_4	$\{w_{16}, w_{56}, w_{36}, w_{46}\}$	q_4	R_4
$\{w_{16}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\}$	p_5	P_5	$\{w_{56}, w_{26}, w_{36}, w_{46}\}$	q_5	R_5

Nun wenden wir die Folgerung aus Schritt 1 mit verschiedenen Indekskombinationen an. Mit 6 anstelle von 5 erhält man $q_1 = p_2$, $R_1 = P_2$, mit 6 anstelle von 5 und 5 anstelle von 4 erhält man $q_2 = p_3$, $R_2 = P_3$ und analog ist $q_3 = p_4$, $R_3 = P_4$, $q_4 = p_5$, $R_4 = P_5$. Aber die 4 Kreise q_1, q_2, q_3, q_4 respektive die $5Q$ -Punkte R_1, R_2, R_3, R_4 definieren den Steiner Kreis s_2 und den Zentrumspunkt Z_2 , respektive den Clifford Kreis c_2 von W_2 , sodass gilt $s_1 = s_2$, $Z_1 = Z_2$, $c_1 = c_2$ und q_5 ist ein sechster 5-Zentrumskreis, der Z_1 enthält und dessen Mittelpunkt auf s_1 liegt, R_5 ein sechster $5Q$ -Punkt der auf c_1 liegt. Auf s_1 liegen die Mittelpunkte von sechs 5-Zentrumskreisen, welche sich in Z_1 schneiden und auf c_1 liegen sechs $5Q$ -Punkte; s_1 ist ein 6-Zentrumskreis, Z_1 ein 6-Zentrumspunkt und c_1 ein $6Q$ -Kreis, der Z_1 enthält.

Diese Überlegungen können nun zwei Mal gemacht werden für jeden der sechzehn 5-Zentrumskreise und $5Q$ -Punkte, welche definiert werden durch eine der sechzehn $w4$ -Konfigurationen $\{w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}\}$, von der wir ausgegangen sind, nämlich einmal unter Hinzunahme der Winkelhalbierenden $w_{16} = {}_1w_{16}$, einmal mit $w_{16} = {}_2w_{16}$. Dies führt schliesslich zu den zweiunddreissig 6-Zentrumskreisen, 6-Zentrumspunkten und $6Q$ -Kreisen in Teil b) des Satzes.

3. Schritt. Entscheidend in der vorangegangenen Argumentation war die Feststellung, dass zwei $w4$ -Konfigurationen einer bestimmten Art denselben 5-Zentrumskreis und $5Q$ -Punkt definieren, was die Konstruktion entsprechender 6-Zentrumskreise, 6-Zentrumspunkte und $6Q$ -Kreise ermöglichte, welche ihrerseits wieder durch zwei $w5$ -Konfigurationen W_1, W_2 analoger Art definiert werden können. Induktiv erhält man damit Teil c) des Satzes, wenn man noch beachtet, dass man in jedem weiteren Induktionsschritt den

Satz von Clifford–Morley anwenden kann auf die 2^{n-2} $(n-1)$ -Zentrumskreise, $(n-1)$ -Zentrumspunkte respektive $(n-1)Q$ -Kreise oder $(n-1)Q$ -Punkte, welche definiert werden durch die 2^{n-2} verschiedenen $w(n-1)$ -Konfigurationen $\{w_{12}, w_{13}, \dots, w_{1n-1}\}$, von denen man ausgeht, und man für die Wahl der zuzufügenden Winkelhalbierenden w_{1n} noch zwei Möglichkeiten hat.

Bemerkung. F. Morleys Vorgehen in [5] liefert nicht nur den Beweis der Existenz der im Satz von Clifford–Morley auftretenden Kurven und Punkte, sondern es erlaubt sogar, diese explizit zu berechnen in Funktion der Grössen, welche die Geraden g_j der zugrunde liegenden gn -Konfiguration definieren. Dasselbe gilt auch für die in obigem Satz auftretenden Elemente, da auch die, diese Elemente definierenden Winkelhalbierenden w_{jk} durch die Grössen, welche die Ausgangsgeraden g_j definieren, dargestellt werden können.

Illustration. F. Morley folgend beschreiben wir Geraden durch Koordinatengleichungen in der komplexen Ebene. Für eine Gerade g ist diese Koordinatengleichung von folgender Form [5, Seiten 97 und 98] (für $z \in \mathbb{C}$ sei \bar{z} die konjugiert komplexe Zahl)

$$g : z \cdot \tau + \bar{z} = \bar{x}.$$

Dabei ist $x \in \mathbb{C}$ die die Gerade g definierende Zahl und $\tau = \bar{x}/x$. Die Gerade g ist die Mittelnormale der Strecke $0, x$. Seien nun die Geraden g_j , $j = 1, 2$ gegeben durch die entsprechenden Grössen x_j und sei $\tau_j = \bar{x}_j/x_j$. Die Koordinatengleichungen von g_1, g_2 sowie ihrer Winkelhalbierenden durch den Punkt S_{12} sind dann von folgender Form

$$g_j : z \cdot \tau_j + \bar{z} = \bar{x}_j \quad j w_{12} : z \cdot \omega_j + \bar{z} = v_j \quad j = 1, 2.$$

Ist $\varphi_j = x_j/|x_j|$, $j = 1, 2$ so ist $|\varphi_j| = 1$, also $\bar{\varphi}_j = 1/\varphi_j$ und die Gerade g_j ist parallel zu $i \cdot \varphi_j$. Die Winkelhalbierenden ${}_1w_{12}, {}_2w_{12}$ sind damit senkrecht zu $\varphi_1 + \varphi_2$ respektive $\varphi_1 - \varphi_2$. Mit reellen Zahlen α_j wird deshalb $v_1 = \alpha_1(\varphi_1 + \varphi_2)$; $v_2 = \alpha_2(\varphi_1 - \varphi_2)$ und damit

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)/(\varphi_1 + \varphi_2) = 1/\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2, \\ \omega_2 &= (\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2)/(\varphi_1 - \varphi_2) = -1/\varphi_1 \cdot \varphi_2 = -\bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2. \end{aligned}$$

Da der Punkt S_{12} auf den beiden Winkelhalbierenden liegt, erfüllt er die Koordinatengleichungen:

$${}_1w_{12} : z \cdot \bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2 + \bar{z} = S_{12} \cdot \bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2 + \bar{S}_{12} \quad {}_2w_{12} : z \cdot \bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2 - \bar{z} = S_{12} \cdot \bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2 - \bar{S}_{12}.$$

Indem man \bar{z} aus den Koordinatengleichungen der Geraden g_1, g_2 eliminiert, erhält man schliesslich für ihren Schnittpunkt $S_{12} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)/(\tau_1 - \tau_2)$, was, in obige Koordinatengleichungen eingesetzt, eine Darstellung der beiden Winkelhalbierenden durch die die Geraden g_j definierenden Zahlen x_j liefert.

Dank. Vielmals danken möchte ich Frau Dr. Valentina Georgoulas für die grosse und feingelungene Arbeit, die sie geleistet hat, um den Text und insbesondere die Figuren ins LaTeX-Format zu übertragen.

Literatur

- [1] William Clifford. Synthetic proof of Miquel's theorem. *Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, 5 (1870), 124–141.
- [2] Norbert Hungerbühler, Clemens Pohle. Communicating harmonic pencils of lines. *International Journal of Geometry*, Vol. 9 (2020), No. 2, 15–38.
- [3] S. Kantor. Über das vollständige Fünfseit. *Wiener Berichte* (1878), 78.
- [4] Auguste Miquel. Théorèmes de Géométrie. *Journal de mathématiques pures et appliquées 1ère série*, 3 (1838), 485–487.
- [5] Frank Morley. On the metric geometry of the plane n -line. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1(2) (1900), 97–115.
- [6] Jakob Steiner. Questions proposées. Théorème sur le quadrilatère complet. *Annales de Gergonne*, 18 (1827–1828), 302–304.
- [7] Peter Thurnheer. Morley: „Kreisketten“ und komplexe Zahlen. *Bulletin VSMP*, 130 (2016), 32–37.
- [8] Gunter Weiss. Geometrie – Tochter der Kunst, Mutter der Mathematik, 2014.
<https://studylibde.com/doc/3101320/>

Peter Thurnheer
Entlisbergstr. 29
CH-8038 Zürich
e-mail: tpeter@retired.ethz.ch