
Inkreis-Konfigurationen ebener Vielecke

Beat Jaggi

Beat Jaggi hat an der Universität Bern bei Peter Mani-Levitska promoviert. Danach unterrichtete er zwanzig Jahre lang Mathematik an verschiedenen Gymnasien in Biel. Seit 2003 ist er Dozent für Fachdidaktik Mathematik am Institut der Sekundarstufe II der Pädagogischen Hochschule Bern.

1 Einleitung

Vielecke mit vorgegebenen Seiten(-längen) lassen sich in der Regel auf unterschiedliche Weise in der Ebene realisieren oder einbetten.

Unter einer **Inkreis-Konfiguration** verstehen wir im Folgenden eine Realisierung eines Vielecks, für die ein Kreis existiert, der jede Seite des Vielecks in einem inneren Punkt berührt.

Jedes Dreieck besitzt einen Inkreis und ist deshalb eine Inkreis-Konfiguration.

Für Vierecke mit den Seiten(-längen) a, b, c, d ist bekannt, dass die Bedingung $a + c = b + d$ gelten muss, damit ein Inkreis existieren kann.

Vielecke mit vorgegebenen Seitenlängen lassen sich manchmal so in die Ebene einbetten, dass ein Inkreis existiert, der jede Seite des Vielecks in einem inneren Punkt berührt. Im nachfolgenden Beitrag werden notwendige und hinreichende Bedingungen an die Seitenlängen eines Vielecks angegeben für die Existenz von Inkreis-Konfigurationen. Die Radien der entsprechenden Inkreise ergeben sich als Nullstellen von Polynomen, die in gewissen Fällen mit den Tschebychow-Polynomen verwandt sind. Eine wichtige Rolle spielt die Parität: Zum Beispiel sind Tangentenvierecke beweglich, während Dreiecke starr sind. Es zeigt sich ganz allgemein: Inkreis-Konfigurationen von Vielecken mit ungerader Seitenzahl sind starr, Inkreis-Konfigurationen von Vielecken mit gerader Eckenzahl sind einparametrische Polygonscharen.

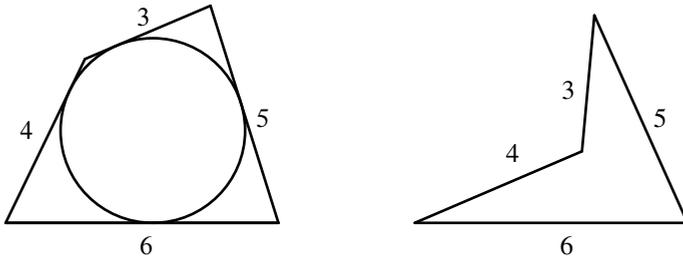


Abbildung 1

Wie Abbildung 1 zeigt, ist diese Bedingung aber nicht hinreichend. Die Konfiguration links ist eine Inkreis-Konfiguration, die Konfiguration rechts nicht.

Sind alle Seiten gleich lang, dann stellt das *reguläre* Vieleck (auch alle Innenwinkel sind gleich gross) eine Inkreis-Konfiguration dar.

Der folgende Hauptsatz gibt notwendige und hinreichende Bedingungen an, unter denen Inkreis-Konfigurationen existieren. Es zeigt sich, dass die Parität der Seitenzahl des Vielecks eine entscheidende Rolle spielt. Die Radien der entsprechenden Inkreise ergeben sich als Nullstellen eines Polynoms.

2 Hauptsatz

Satz: Ein n -Eck mit den Seiten(-längen) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ besitzt genau dann Inkreis-Konfigurationen, wenn positive reelle Zahlen $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ existieren, welche das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rcl} u_1 + u_2 & = & a_1 \\ u_2 + u_3 & = & a_2 \\ u_3 + u_4 & = & a_3 \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n-1} + u_n & = & a_{n-1} \\ u_n + u_1 & = & a_n \end{array} \right| \quad (*)$$

erfüllen.

Die Radien der entsprechenden Inkreise sind gegeben durch die positiven Nullstellen des Polynoms

$$P_n(x) = \Im \left\{ \prod_{k=1}^n (x + u_k i) \right\}.$$

(i ist die imaginäre Einheit, \Im steht für den Imaginärteil.)

Beweis: Für den ersten Teil des Satzes siehe auch [1].

Besitzt ein Vieleck mit den Seiten(-längen) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ einen Inkreis, dann teilen die Berührungspunkte dieses Inkreises jede Seite in zwei Teilstrecken.

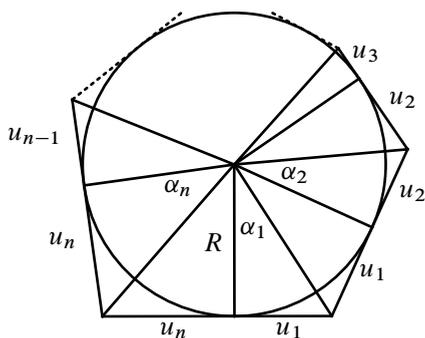


Abbildung 2

Mit den Bezeichnungen von Abbildung 2 setzen wir

$$u_1 + u_2 = a_1, \quad u_2 + u_3 = a_2, \quad u_3 + u_4 = a_3, \quad \dots, \quad u_{n-1} + u_n = a_{n-1}, \quad u_n + u_1 = a_n.$$

Die Existenz von positiven reellen Zahlen $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$, welche das Gleichungssystem (*) erfüllen, ist offensichtlich eine notwendige Voraussetzung für die Existenz eines Inkreises bei einem n -Eck mit den Seiten(-längen) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Sind umgekehrt positive Zahlen $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ gegeben, dann kann man beginnen, eine Inkreis-Konfiguration zu erzeugen. Dazu wählt man einen Kreis mit vorerst beliebigem (grossem) Radius und trägt $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ wie in Abbildung 3 als Tangentenabschnitte ab.

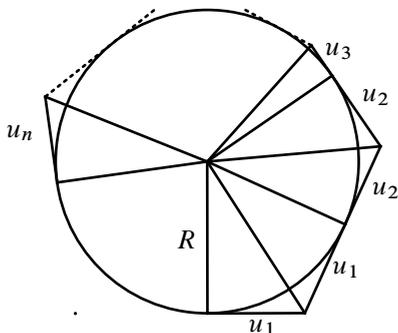


Abbildung 3

(Man beachte, dass Tangentenabschnitte, also die beiden Strecken von einem Punkt ausserhalb eines Kreises zu den beiden Berührungspunkten den beiden Tangenten aus Symmetriegründen gleich lang sind.)

In der Regel wird sich die Figur natürlich nicht schliessen, aber immerhin sind die Gleichungen $u_1 + u_2 = a_1, u_2 + u_3 = a_2, u_3 + u_4 = a_3, \dots, u_{n-1} + u_n = a_{n-1}$ erfüllt! Es fehlt nur noch $u_n + u_1 = a_n$.

Wie muss nun der Kreisradius R gewählt werden, damit sich die Figur schliesst?

Wieder mit den Bezeichnungen von Abbildung 2 gilt

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = m\pi \text{ für eine natürliche Zahl } m.$$

α_k ist das Argument der komplexen Zahl $R + u_k i$. Beim Multiplizieren von komplexen Zahlen werden die Argumente addiert. Das Argument von

$$T_n(R) = \prod_{k=1}^n (R + u_k i)$$

ist folglich $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ und muss deshalb gleich $m\pi$ sein.

$T_n(R)$ ist also reell, der Imaginärteil von $T_n(R)$ ist gleich Null. □

Bemerkung: Mit den Bezeichnungen

$$\binom{u_1, u_2, \dots, u_n}{j} = \sum_{\substack{1 \leq m_1 < m_2 < \dots \\ < m_j \leq n}}^n u_{m_1} u_{m_2} u_{m_3} \cdots u_{m_j} \quad \text{und} \quad \binom{u_1, u_2, \dots, u_n}{0} = 1$$

wird

$$T_n(R) = \prod_{k=1}^n (R + u_k i) = \sum_{j=0}^n \binom{u_1, u_2, \dots, u_n}{j} R^{n-j} \cdot i^j.$$

3 Berechnung der Tangentenabschnitte $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ aus den Seitenlängen

Es stellt sich noch die Frage, wie die Zahlen $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ aus den Seitenlängen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ berechnet werden können. Wir schreiben das Gleichungssystem (*) in Matrizenform

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Um die Determinante von A zu berechnen, entwickelt man am besten nach der ersten Spalte. Die erste Teilmatrix ist eine untere, die zweite eine obere Dreiecksmatrix. So ist

$$\det A = 1 + (-1)^{n+1}.$$

Die Determinante hängt also von der Parität von n ab.

Für n ungerade wird $\det A = 2$. Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{n-1} + a_n}{2} \\ u_2 &= \frac{a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + a_{n-1} - a_n + a_1}{2} \\ u_3 &= \frac{a_3 - a_4 + \cdots - a_{n-1} + a_n - a_1 + a_2}{2} \\ &\vdots \\ u_n &= \frac{a_n - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + a_{n-1}}{2} . \end{aligned}$$

Sind alle u_k positiv, dann gibt es für das n -Eck mit den Seiten(-längen) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (mindestens) eine Inkreis-Konfiguration.

Für n gerade ist $\det A = 0$.

Zählt man einerseits die erste, dritte, fünfte, \dots , $n - 1$ -te Gleichung zusammen und andererseits die zweite, vierte, sechste, \dots , n -te, dann stellt man fest, dass das Gleichungssystem nur dann ein Lösung hat, wenn

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{n-1} - a_n = 0 \quad \text{gilt.}$$

In diesem zweiten Fall darf eine der Unbekannten u_k , zum Beispiel u_1 frei gewählt werden. Die anderen Unbekannten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} u_2 &= a_1 - u_1 \\ u_3 &= a_2 - a_1 + u_1 \\ u_4 &= a_3 - a_2 + a_1 - u_1 \\ &\vdots \\ u_n &= a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - \cdots + a_1 - u_1 . \end{aligned}$$

Die Bedingungen $u_1 > 0, u_2 > 0, u_3 > 0, \dots, u_n > 0$ führen zu

$$\begin{aligned} 0 &< u_1 < a_1 \\ a_1 - a_2 &< u_1 < a_1 - a_2 + a_3 \\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 &< u_1 < a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 \\ &\vdots \\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{n-2} &< u_1 < a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{n-2} + a_{n-1} = a_n . \end{aligned}$$

Ist es möglich, $u_1 > 0$ so zu wählen, dass die obigen Bedingungen erfüllt sind, dann gibt es für das n -Eck eine Inkreis-Konfiguration.

4 Beispiele für Vielecke mit gerader Seitenzahl

Das allgemeine Viereck

Die vier Seitenlängen a, b, c und d müssen die Gleichung $a - b + c - d = 0$ erfüllen. Die Lösung des Gleichungssystems (*) lautet

$$u_2 = a - u_1, \quad u_3 = b - a + u_1, \quad u_4 = c - b + a - u_1 = d - u_1.$$

$u_1 > 0$ ist so zu wählen, dass u_2, u_3, u_4 ebenfalls positiv sind.

$$\begin{aligned} P_4(x) &= \mathfrak{S} \{(x + u_1i)(x + u_2i)(x + u_3i)(x + u_4i)\} \\ &= (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)x^3 - (u_1u_2u_3 + u_1u_2u_4 + u_1u_3u_4 + u_2u_3u_4)x = 0. \end{aligned}$$

Die positive Lösung ist

$$R = \sqrt{\frac{u_1u_2u_3 + u_1u_2u_4 + u_1u_3u_4 + u_2u_3u_4}{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}}.$$

Ersetzen wir u_2, u_3, u_4 wie oben beschrieben, dann wird

$$\begin{aligned} R(u_1) &= \sqrt{\frac{-(a+c)u_1^2 + 2adu_1 - ad(a-b)}{a+c}} \\ &= \sqrt{-\left(u_1 - \frac{ad - \sqrt{abcd}}{a+c}\right)\left(u_1 - \frac{ad + \sqrt{abcd}}{a+c}\right)}. \end{aligned}$$

Damit lässt sich für alle möglichen Wahlen von u_1 eine Inkreis-Konfiguration zeichnen.

Beispiel: $a = 6, b = 5, c = 3, d = 4$. Für $1 < u_1 < 4$ gilt $u_2, u_3, u_4 > 0$.

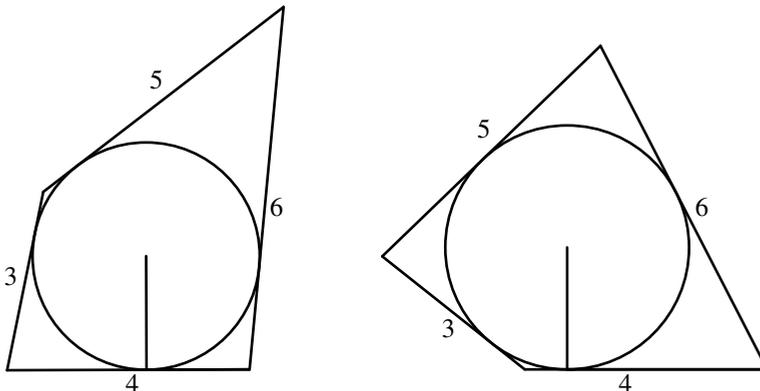


Abbildung 4: Im Bild links ist $u_1 = 1.7$, im Bild rechts $u_1 = 3.3$.

Das allgemeine Sechseck

Die Seitenlängen a, b, c, d, e und f müssen die Gleichung $a - b + c - d - e + f = 0$ erfüllen.

Beispiel 1: $a = 3, b = 7, c = 5, d = 3, e = 4, f = 2$.

$$P_6(x) = 12x^5 + (-120 - 6u_1 + 24u_1^2)x^3 + (48 + 72u_1 - 96u_1^2 - 6u_1^3 + 12u_1^4)x.$$

Die positiven Nullstellen sind

$$R_1(u_1) = \frac{1}{2} \sqrt{20 + u_1 - 4u_1^2 + \sqrt{336 - 56u_1 - 31u_1^2}}$$

und

$$R_2(u_1) = \frac{1}{2} \sqrt{20 + u_1 - 4u_1^2 - \sqrt{336 - 56u_1 - 31u_1^2}}.$$

Für jeden Wert von u_1 mit $0 < u_1 < 1$ gibt es zwei Inkreis-Konfigurationen.

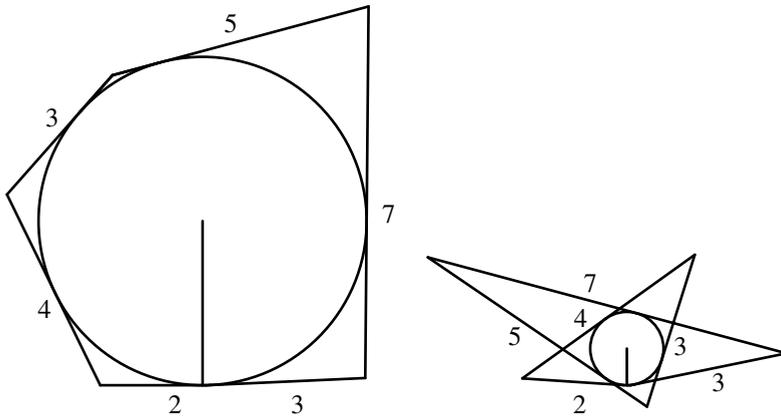


Abbildung 5: Bei beiden Inkreis-Konfigurationen ist $u_1 = 0.11$.

Beispiel 2: $a = 1, b = 3, c = 1, d = 1, e = 3, f = 1$.

Das Sechseck ist in der Ebene realisierbar und die Bedingung an die Seitenlängen ist erfüllt. Das Gleichungssystem für die Tangentenabschnitte u_k besitzt aber keine Lösung mit lauter positiven Werten. Für dieses Sechseck gibt es keine Inkreis-Konfigurationen.

Das gleichseitige Achteck

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_8 = 1.$$

$$P_8(x) = 4x^7 + (12u_1^2 - 12u_1 - 4)x^5 - 4u_1(1-u_1)(3u_1^2 - 3u_1 - 1)x^3 - 4u_1^3(1-u_1)^3x.$$

Die Nullstellen sind

$$R_1(u_1) = \sqrt{u_1(1-u_1)}$$

$$R_2(u_1) = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 4u_1^2 + 4u_1 + 2\sqrt{1 + 4u_1 - 4u_1^2}}$$

$$R_3(u_1) = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 4u_1^2 + 4u_1 - 2\sqrt{1 + 4u_1 - 4u_1^2}}.$$

Für jeden Wert von u_1 mit $0 < u_1 < 1$ gibt es drei Inkreis-Konfigurationen.

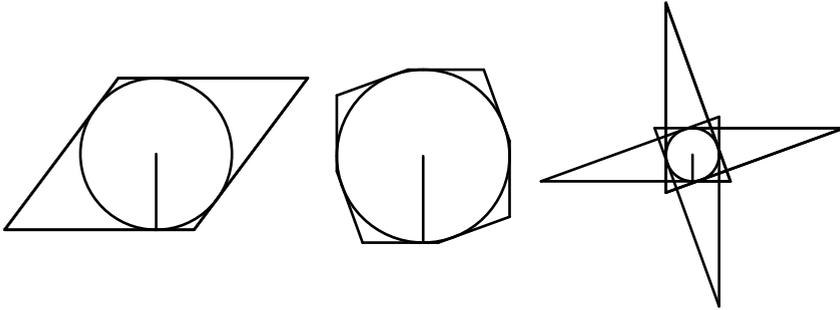


Abbildung 6: Inkreis-Konfigurationen des gleichseitigen Achtecks mit $R_1(0.2)$, $R_2(0.2)$, $R_3(0.2)$.

5 Beispiele für Vielecke mit ungerader Seitenzahl

Das allgemeine Dreieck

Ein Dreieck mit vorgegebenen Seitenlängen a , b und c ist starr. Es gibt genau *eine* Inkreis-Konfiguration.

Die Lösungen $u_1 = \frac{a-b+c}{2}$, $u_2 = \frac{b-c+a}{2}$, $u_3 = \frac{c-a+b}{2}$ des Gleichungssystems (*) sind genau dann positiv, wenn die Dreiecksungleichungen erfüllt sind.

$$P_3(x) = (u_1 + u_2 + u_3)x^2 - u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 0.$$

Die positive Lösung dieser quadratischen Gleichung ist der Radius des Inkreises.

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot u_3}{u_1 + u_2 + u_3}} = \sqrt{\frac{\frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{b-c+a}{2} \cdot \frac{c-a+b}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)}}{2(a+b+c)}. \end{aligned}$$

Für die Fläche F des Dreiecks ergibt sich

$$F = \frac{a+b+c}{2} \cdot R = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)}}{4}$$

und damit eine Bestätigung der Heronschen Flächenformel.

Das gleichseitige Dreieck $a = b = c = 1 \implies u_1 = u_2 = u_3 = \frac{1}{2}$: Der Radius des Inkreises des gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1 beträgt

$$R = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{6} \sqrt{3}.$$

Das allgemeine Fünfeck

$$\begin{aligned} P_5(x) &= \Im \{(x + u_1 i)(x + u_2 i)(x + u_3 i)(x + u_4 i)(x + u_5 i)\} \\ &= (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) x^4 \\ &\quad - (u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_2 u_5 + u_1 u_3 u_4 + u_1 u_3 u_5 \\ &\quad + u_1 u_4 u_5 + u_2 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_5 + u_2 u_4 u_5 + u_3 u_4 u_5) x^2 \\ &\quad + u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 = 0. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $x^2 = y$ liegt eine quadratische Gleichung $ry^2 - sy + t = 0$ vor. Die Diskriminante $s^2 - 4rt$ ist immer positiv. Da alle u_k positiv sind, ist $s^2 > s^2 - 4rt$ und somit auch $s - \sqrt{s^2 - 4rt}$ positiv.

Also hat jedes Fünfeck mit positiven u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 genau *zwei* Inkreis-Konfigurationen.

Beispiel 1: $a = 2, b = 2, c = 1, d = 1, e = 1$.

Die Lösung des Gleichungssystems (*) lautet $u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = \frac{1}{2}, u_4 = \frac{1}{2}, u_5 = \frac{1}{2}$.

Die Radien der beiden Inkreis-Konfigurationen sind die positiven Nullstellen von

$$P_5(x) = \frac{7}{2}x^4 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{3}{32},$$

$$R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{3} \approx 0.86603 \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{1}{14} \sqrt{7} \approx 0.18898.$$

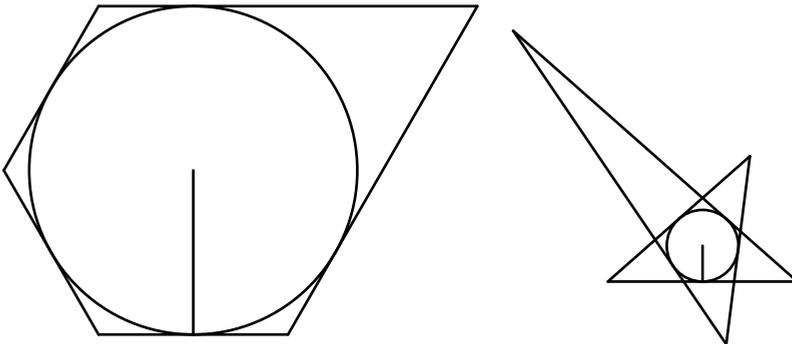


Abbildung 7

Beispiel 2: $a = 2, b = 1, c = 2, d = 1, e = 1$.

Die Lösung des Gleichungssystems lautet $u_1 = \frac{3}{2}, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{2}, u_4 = \frac{3}{2}, u_5 = -\frac{1}{2}$.
 u_5 ist negativ: Für dieses Fünfeck gibt es *keine* Inkreis-Konfiguration.

Das gleichseitige $2n + 1$ -Eck

$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{2n+1} = 1$. Die möglichen Inkreis-Radien sind die Nullstellen von

$$P_{2n+1}(x) = \frac{1}{2} \binom{2n+1}{1} x^{2n} - \frac{1}{2^3} \binom{2n+1}{3} x^{2n-2} + \frac{1}{2^5} \binom{2n+1}{5} x^{2n-4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Mit den Bezeichnungen von Abbildung 2 muss

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n+1} = m\pi \text{ für eine natürliche Zahl } m \text{ gelten.}$$

Schon für den Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{2n+1} = \alpha$ gibt es n Lösungen dieser Gleichung, nämlich $\alpha_m = \frac{m\pi}{2n+1}$, mit $m = 1, 2, 3, \dots, n$.

Diese Lösungen liefern die Winkel für das reguläre $2n + 1$ -Eck und für die möglichen Sternfiguren. Es gibt folglich keine weiteren positiven Lösungen.

Die Nullstellen von P_{2n+1} sind die möglichen Radien der Inkreise und für diese gilt

$$\tan \alpha_m = \frac{1}{2R_m} \text{ resp. } R_m = \frac{1}{2 \tan \alpha_m}.$$

Mit

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}} &= \sqrt{\frac{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1}{1 - 2 \cos^2 \alpha + 1}} = \sqrt{\frac{2 \cos^2 \alpha}{2 - 2 \cos^2 \alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha} \end{aligned}$$

wird

$$R_m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{2m\pi}{2n+1}}{1 - \cos \frac{m\pi}{2n+1}}}.$$

Die Substitution $x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$ ergibt also Ausdrücke, deren Nullstellen $\cos \frac{2m\pi}{2n+1}$ (mit $m = 1, 2, 3, \dots, n$) sind.

Für $P_5(x) = \frac{5}{2}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{32}$ erhalten wir $Q_5(y) = \frac{4y^2+2y-1}{8(y-1)^2}$.

Die Nullstellen von Q_5 sind $y_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0.618$ und $y_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \approx -1.618$.

Für $P_7(x) = \frac{7}{2}x^6 - \frac{35}{8}x^4 + \frac{21}{32}x^2 - \frac{1}{128}$ erhalten wir

$$Q_7(y) = -\frac{8y^3 + 4y^2 - 4y - 1}{16(y-1)^3}.$$

Die Nullstellen von Q_7 sind $y_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$ für $k = 1, 2, 3$.

Für $P_9(x) = \frac{9}{2}x^8 - \frac{21}{2}x^6 + \frac{63}{16}x^4 - \frac{9}{32}x^2 + \frac{1}{512}$ erhalten wir

$$Q_9(y) = \frac{(2y+1)(8y^3-6y+1)}{32(y-1)^4}.$$

Die Nullstellen von Q_9 sind $y_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{9}\right)$ für $k = 1, 2, 3, 4$.

Die Zähler von Q_{2n+1} sind bestens bekannt (siehe [2, 3]). Es sind (bis auf einen Faktor) Differenzen von Tschebyschow-Polynomen, definiert durch

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

$$T_3(x) - T_2(x) = (4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = (x-1)(4x^2 + 2x - 1)$$

$$T_4(x) - T_3(x) = (8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = (x-1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)$$

$$\begin{aligned} T_5(x) - T_4(x) &= (16x^5 - 20x^3 + 5x) - (8x^4 - 8x^2 + 1) \\ &= (x-1)(2x+1)(8x^3 - 6x + 1). \end{aligned}$$

Das gleichseitige 17-Eck

$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{17} = 1$. Die möglichen Inkreis-Radien sind die positiven Nullstellen von

$$\begin{aligned} P_{17}(x) &= \frac{17}{2}x^{16} - 85x^{14} + \frac{1547}{8}x^{12} - \frac{2431}{16}x^{10} + \frac{12155}{256}x^8 \\ &\quad - \frac{1547}{256}x^6 + \frac{595}{2048}x^4 - \frac{17}{4096}x^2 + \frac{1}{131072}. \end{aligned}$$

Die Substitution $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$ ergibt

$$Q_{17}(y) = \frac{256y^8 + 128y^7 - 448y^6 - 192y^5 + 240y^4 + 80y^3 - 40y^2 - 8y + 1}{512(y-1)^8}.$$

Eine Nullstelle von Q_{17} , nämlich $\cos\frac{2\pi}{17}$, ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar (siehe [4]). Wegen $\cos(nx) = T_n(\cos x)$ sind alle Nullstellen konstruierbar. Mit der Rücksubstitution $y = \frac{4x^2-1}{4x^2+1}$ ist auch klar, dass alle acht Inkreis-Konfigurationen des gleichseitigen 17-Ecks mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind.

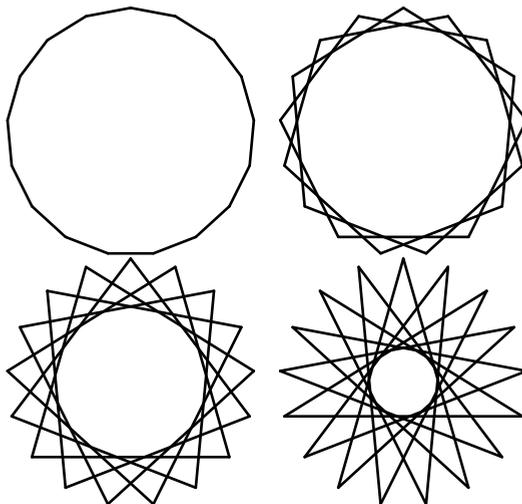


Abbildung 8: Vier von acht Inkreis-Konfigurationen des gleichseitigen 17-Ecks.

Der Inkreisradius des regulären 17-Ecks (Abbildung 8 oben links) beträgt:

$$R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}{17 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}}$$

$$\approx 2.674763.$$

Quellen

- [1] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium*, Springer, 2006, p. 561.
- [2] W. Watkins and J. Zeitlin, The Minimal Polynomial of $\cos(2\pi/n)$, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 100, No. 5 (May 1993), pp. 471–474.
- [3] Y. Z. Gürtaş, Chebyshev Polynomials and the Minimal Polynomial of $\cos(2\pi/n)$, *The American Mathematical Monthly*, 124:1 (2017), pp. 74–78.
- [4] H. Maser, *Carl Friedrich Gauss' Untersuchungen über höhere Arithmetik*, Springer 1889.

Beat Jaggi
 Looserstrasse 16
 CH-3084 Wabern
 e-mail: beat.jaggi@phbern.ch