Elemente der Mathematik 77 (2022), 75–93
DOI 10.4171/EM/445

Wilhelm Fiedlers „Darstellende Geometrie“ (1871) Teil 2

Klaus Volkert

Klaus Volkert war bis Sommer 2020 Professor für Didaktik der Mathematik an der Bergischen Universität Wuppertal. Voran gingen Positionen an der PH Heidelberg sowie an den Universitäten Frankfurt a. M. und Köln. Nach dem Studium der Mathematik, Physik und Philosophie hat er in Saarbrücken promoviert („Die Krise der Anschauung“) und sich in Heidelberg („Das Homöomorphieproblem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten“) habilitiert. Von 1987 bis 1992 war er Redakteur beim Bibliographischen Institut & F. A. Brockhaus in Mannheim.

Gewidmet Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach) zu seinem 80. Geburtstag

1 Einstieg in die darstellende Geometrie

Im Folgenden werden einige grundlegende Ideen aus Fiedlers Lehrbuch vorgestellt; in der Hauptsache stammen sie aus dem ersten Teil, der Methodenlehre. Ein Ziel dabei ist, die für Fiedler charakteristische Verschmelzung von darstellender und projektiver Geometrie zu verdeutlichen. Da Fiedlers genuine Leistung das System als Ganzes ist, werden im Folgenden Details zur Sprache kommen, die für sich genommen wenig spektakulär sind und oft zum Standardwissen der darstellenden und/oder projektiven Geometrie gehörten.

Ausgangspunkt für Fiedlers Betrachtungen ist die Situation, dass der Raum auf eine Ebene, genannt Bildebene oder auch Tafel, von einem Zentrum C nicht in der Tafel projiziert wird; es handelt sich also um eine Zentralprojektion. Diese Situation steht am Anfang von Fiedlers System, da sie für ihn die Abstraktion des natürlichen Sehprozesses ist. Es werden nun einige wichtige Begriffe eingeführt wie Hauptpunkt C_1 (Fußpunkt des Lotes

Im diesem zweiten Teil des Artikels über Wilhelm Fiedlers Lehrbuch (1871) werden einige charakteristische Aspekte von Fiedlers Auffassungen zur darstellenden Geometrie geschildert, insbesondere seine Betonung der Zentralprojektion als natürlichem Ausgangspunkt zur Errichtung eines organischen Systems der darstellenden Geometrie inklusive der projektiven. Diese Sichtweise wurde zum Markenzeichen von Fiedler. Schließlich wird auf den Inhalt von Fiedlers Vorlesungen sowie auf die Rezeption seiner Ideen eingegangen.

von C auf die Bildebene), Distanz d (Abstand von Zentrum zu Bildebene), Distanzkreis (Kreis um den Hauptpunkt mit Radius d), sowie Tafelneigung in einem Punkt (Winkel zwischen der Geraden durch den Punkt und den Hauptpunkt in der Tafel und dem zum Punkt gehörigen projizierenden Strahl). Alle Punkte der Bildebene mit einer festen Tafelneigung bilden einen Kreis mit Mittelpunkt C_1. Der Distanzkreis ist der Neigungskreis zum Winkel 45°, der Hauptpunkt ist ein ausgearteter Neigungskreis mit Winkel 0°. Diese Begriffe gehören i. W. zum Standardrepertoire der Lehre von der Perspektive.

Fiedler führt nun ohne Umschweife aber auch schon die projektive Sichtweise ein (Fiedler 1871, 6):

> „Insofern die zur Tafel parallelen projicierenden Strahlen eine Ebene bilden, deren Schnittlinie mit der Tafel als eine Gerade angesehen werden kann, nennen wir diesen letztern Ort die unendlich ferne Gerade oder die Stellung der Bildebene.“

Diese Auffassung tritt auch in der begrifflichen Beschreibung des Projektionsvorgangs zu Tage: Er wird mit Hilfe des Begriffes Strahlenbündel (Steiner/von Staudt) gefasst, das sind alle Geraden im Raum, die durch einen Punkt, hier das Zentrum, gehen. Einem vom Zentrum C verschiedenen Punkt P des Raumes wird als Bild der Durchstoßungspunkt[1] P' der Geraden durch C und P mit der Bildebene zugeordnet. Mit der Erweiterung um Fernelemente lassen sich die Durchstoßungspunkte zur Bildebene paralleler projizierender Geraden als deren Schnittpunkt mit derjenigen Ferngeraden interpretieren, die zur Bild- aber auch zu der ihr parallelen Ebene durch das Zentrum, welche die parallelen Geraden enthält, gehört. Diese Ebene wird Verschwindungsebene genannt, die Bilder ihrer Punkte sind Fernpunkte, „verschwinden“ im Unendlichen. Damit ist die Frage geklärt, wie sich Punkte projizieren. Auszunehmen ist nur das Zentrum selbst, diese Einschränkung ist immer mitzudenken, wird aber im Folgenden nicht ausdrücklich formuliert.

Geraden g im Raum nicht durch C bilden sich ab mit Hilfe der Ebenen, die sie zusammen mit dem Zentrum festlegen; diese wird projizierende Ebene genannt und mit Cg bezeichnet. Deren Schnittgerade mit der Bildebene, die Spur, liefert das Bild der Geraden. Die Geraden, die in der Verschwindungsebene liegen, werden sämtlich auf die Ferngerade der Bildebene abgebildet; die Verschwindungsebene fällt mit ihrer projizierenden Ebene zusammen. Geraden der Bildebene, die durch den Hauptpunkt verlaufen, sind Spuren von Normalebenen auf die Bildebene, die durch das Zentrum gehen. Der Abstand einer Spurgeraden zu ihrer Parallelen durch den Hauptpunkt heißt Breite b der zugehörigen projizierenden Ebene. Die Normalebenen durch den Hauptpunkt haben folglich die Breite Null.

Eine nicht durch das Zentrum verlaufende Gerade g wird aber neben der projizierenden Ebene auch projiziert mit Hilfe aller Strahlen durch das Zentrum und einen ihrer Punkte inklusive Fernpunkt; diese bilden zusammen ein Strahlenbüschel, den Schein der zugehörigen Spurgeraden g'. Umgekehrt ist g' der Schnitt der projizierenden Ebene bzw. des projizierenden Strahlenbüschels mit der Bildebene, mit einer Geraden. Geraden werden deshalb auch als Punktreihen bezeichnet. Umgekehrt ist das Büschel der Schein (Steiner)

[1] Generelle Konvention: Bildobjekte (wie Bildpunkte, -geraden etc.) werden im ebenen Fall durch Apostrophe kenntlich gemacht. In räumlichen Fällen wird auch der Index 1 verwendet, um Bilder zu bezeichnen.

der Punktreihe. Wie findet man konstruktiv das Bild g' einer Geraden g nicht in der Verschwindungsebene (vgl. Abb. 1)? Offensichtlich haben beide Geraden den Durchstoßungspunkt S mit der Bildebene gemeinsam. Sodann lässt sich die Richtung von g' festlegen über den Durchstoßungspunkt Q' der Parallelen zu g durch C in der zugehörigen projizierenden Ebene. Anders gesagt ist Q' der Bildpunkt des Fernpunktes von g; er wird Fluchtpunkt von g' genannt.

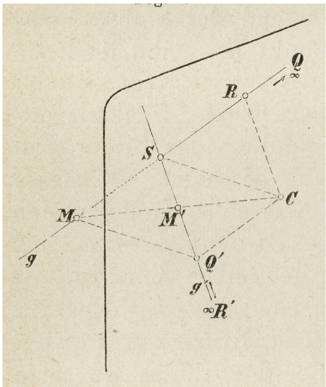


Abbildung 1. Fig. 4 aus Fiedler 1871, 9[2]

(Man beachte, Q' ist ein Punkt in der Bildebene ebenso wie S. Der Punkt R' ist als Bildpunkt des in der Verschwindungsebene liegenden Punktes R ein Fernpunkt (in Abb. 1 kenntlich am Unendlichzeichen) – nämlich der Bildgeraden g'. Bei Figur 4 handelt sich um eine der relativ wenigen Abbildungen in Fiedlers Buch, die versuchen, einen räumlichen Eindruck zu erwecken.)

Fiedler führt die Umlegung – eine zentrale Technik in der darstellenden Geometrie – zuerst in einem Spezialfall, nämlich einer Geraden g nicht durch C mit ihrer projizierenden Ebene Cg, in die Bildebene ein. Hierfür wird erstere um die Schnittgerade (Spur) in letztere gedreht, der Drehwinkel ist einer der Winkel zwischen den beiden Ebenen (Tafelneigung). Bilder gemäß der Umlegung werden mit Klammern bezeichnet: So ist (C) die Umlegung[3] des Zentrums C, (C) liegt auf dem Distanzkreis; die Umlegung der Geraden g ist (g). Punkte der Bildebene sind identisch mit ihren umgelegten Punkten und werden nicht in Klammern gesetzt.

Im Anschluss behandelt Fiedler die Fluchtlinie q' einer Ebene, die nicht durch das Zentrum geht. Diese erhält man als Schnitt der zur fraglichen Ebene parallelen Ebene durch das Zentrum mit der Bildebene. Die Fluchtlinie ist folglich parallel zur Spur der Ausgangsebene in der Bildebene. Sie enthält alle Fluchtpunkte von Geraden der Ausgangsebene, das heißt die Bilder ihrer Fernpunkte. Die Fluchtlinie ist im Spezialfall der Perspektive als Horizont bekannt.

[2]Die Figuren wurden von einer Auflage zur nächsten übernommen, durch einige zusätzliche ergänzt. Der Verlag konnte so die Druckstöcke der Figuren – es handelte sich um Holzschnitte – wiederverwenden.

[3]In Fiedlers Text findet sich hierfür auch ein stilisiertes $\boldsymbol{C}$, in den Abbildungen ist dieses nochmals variiert.

Nachfolgend wird nochmals die Umlegung (vgl. § 4), jetzt im allgemeinen Fall einer Ebene nebst nicht in ihr gelegenen Zentrum, in die Bildebene thematisiert, „d. i. die Darstellung der wahren Größe und Gestalt ebener Figuren.“ (Fiedler 1871, 24). Letzteres ist eine klassische Frage der darstellenden Geometrie. Hierzu sind sowohl die Ausgangsebene als auch die ihr parallele projizierende Ebene (sprich: Ebene durch C) in die Bildebene umzulegen – und zwar mit dem gleichen Drehwinkel. Im Anschluss formuliert Fiedler ein Zwischenfazit, wobei erstmals im Textteil praktische Aspekte zum Vorschein kommen:

„Nach dem Vorhergehenden sind alle Aufgaben der darstellenden Geometrie über die Elementarformen theoretisch lösbar nämlich unter Voraussetzung einer unbegrenzten Zeichnungsebene, unter Voraussetzung geometrischer Genauigkeit auch bei schleifenden Schnitten, etc. und überdiess abgesehen von den in der Kleinheit der Constructionstheile, etc. auftretenden Hindernissen der graphischen Ausführung.“ (Fiedler 1871, 26)

Schleifende Schnitte sind solche, bei denen der Schnittwinkel klein ist. Das führt in der Praxis zu Ungenauigkeiten, z. B. droht aus dem Schnittpunkt eine Strecke zu werden. Dass eine begrenzte Zeichenebene Schwierigkeiten verursachen kann, liegt wohl auf der Hand. In der Praxis werden diese Probleme meist durch Transformationen gelöst, das sind Lageveränderungen zwischen Objekt und Bildebene, beispielsweise durch Drehung des Objekts, so dass es Kanten aufweist, die senkrecht zur Bildebene stehen, oder durch eine veränderte Lage des Zentrums.

Ein erstes Ziel ist erreicht:

> „Im Vorhergehenden ist die Centralprojection als eine selbständige Darstellungsmethode entwickelt und im Wesentlichen ausgebildet.“ (Fiedler 1871, 31)

Damit nun die Zentralprojektion die Grundlage darstellender Methoden liefern kann, ist das Verhältnis von Objekt und Bild genauer zu bestimmen. Hierbei schränkt sich Fiedler auf den Fall ebener Objekte, Systeme genannt, ein. Er betrachtet also die Zentralprojektion einer Ebene auf eine andere. Sie wird (im Anschluss an Möbius) als Verwandtschaft gefasst. Im allgemeinsten Fall ist die fragliche Verwandtschaft dadurch gekennzeichnet, „dass jedem Punkt und jeder Geraden des einen Systems immer ein und nur ein Punkt und eine Gerade des andern Systems entspricht.“ (Fiedler 1871, 31) Zu ergänzen wäre: . . . und dass Inzidenzen erhalten bleiben. Zwei solche Systeme heißen projektivisch, insbesondere kollinear; die Verwandtschaft ist die Projektivität bzw. Kollineation.

Im vorliegenden Fall (Zentralprojektion einer Ebene auf eine Ebene) liegen die Systeme sogar perspektivisch, heißt; Zentrum, Punkt und Bildpunkt sind stets kollinear. Umgeklappt ergibt sich eine Zentralkollineation (Fiedler: zentrale Kollineation). Zentrum, Punkt und Bildpunkt sind kollinear, Gerade und Bildgerade schneiden sich stets auf der Kollineationsachse s (Schnittgerade Ebene und Bildebene), das umgeklappte Zentrum (C) ist das Kollineationszentrum. Fixpunkte – Fiedler spricht im Stile seiner Zeit meist von „Doppelpunkten“ – sind genau die Punkte der Achse. Den Ferngeraden der beiden Systeme entsprechen jeweils Geraden parallel zur Achse im andern System, Gegenachsen genannt: Eine davon ist die Verschwindungslinie, die andere die Fluchtlinie. Somit hat jeder Punkt und jede Gerade der Ebene eine doppelte Bedeutung: nämlich einmal als Punkt oder Gerade der abgebildeten Ebene und einmal als Punkt bzw. Gerade der Bildebene. Diese modern betrachtet ungewohnte Sichtweise erweist sich als sehr nützlich.

Eine Zentralkollineation ist bestimmt durch Angabe von drei geeigneten Stücken, z. B. Zentrum, Achse und eine Gegenachse oder auch Zentrum, Achse und ein Paar zugeordneter Punkte (A, A'), die natürlich auf einer Geraden durch (C) liegen müssen. Dabei muss der Abstand von Zentrum und Verschwindungslinie immer gleich dem Abstand von Achse zu Fluchtlinie sein. Unversehens ist man mitten in der projektiven Geometrie gelandet, denn die zugehörigen Konstruktionen lassen sich „mit Hilfe des Lineals allein“ (Fiedler 1871, 32) durchführen.

Schließlich untersucht Fiedler die Abhängigkeit von Geraden und ihren Bildern bei Zentralkollineation. Das Hauptergebnis ist eine Formel, die die Länge einer Ausgangsstrecke AB auf g und diejenige der Bildstrecke $A'B'$ auf g' in Verbindung bringt, aus der sich eine Bedingung dafür ergibt, dass zwei sich entsprechende Strecken gleichlang sind. Anschließend geht Fiedler zu Doppelverhältnissen über. Mit Hilfe der Ergebnisse aus § 15 kann er den kleinen Satz von Desargues beweisen:

> „... das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden wird durch Centralprojection nicht geändert – ist im Bilde dasselbe wie im Original; ...“ (Fiedler 1871, 37)

Aufbauend auf dem Doppelverhältnis (von Punkt, Bildpunkt, Zentrum und Fernpunkt) leitet Fiedler eine charakteristische Größe Δ für die Zentralkollineation her. Die fragliche Invariante wird bei der nachfolgenden Einteilung der Zentralkollineationen nach Lage ihrer Bestimmungsstücke zusätzlich herangezogen:

1. Fall: Das Kollineationszentrum ist ein Fernpunkt, d. h. die projizierenden Strahlen sind parallel; die Parallelität bleibt erhalten. Es handelt sich um eine Affinität.
2. Fall: Das Kollineationszentrum ist ein Fernpunkt und es gilt zusätzlich $\Delta = -1$. Dann hat man es mit einer Affinität zu tun, die zugleich Involution ist, also mit einer Schrägspiegelung an einer Geraden, im Sonderfall mit einer gewöhnlichen Geradenspiegelung. Dies nennt Fiedler auch Fälle von schiefer und normaler Symmetrie in Bezug auf eine Achse.
3. Fall: Die Kollineationsachse ist die Ferngerade, d. h. jede Bildgerade ist parallel zur ihr zugehörigen Geraden. Dann gilt, dass das Verhältnis der Abstände von Punkt und Bildpunkt zum Zentrum eine Konstante ist. Die Zentralkollineation ist folglich eine zentrische Streckung, das Kollineationszentrum ist das Streckzentrum.
4. Fall: Zusätzlich zu Fall 3 ist $\Delta = -1$. Dann hat man es mit einer involutorischen zentrischen Streckung zu tun, also mit einer Punktspiegelung – oder, wie Fiedler sagt – mit einer zentrischen Symmetrie. Die gängigen ebenen Symmetrien (Geraden- und Punktspiegelung) sind somit Sonderfälle von Involutionen – eine nach Fiedler wichtige Einsicht.[4]
5. Kollineationszentrum und -achse sind Fernelemente: Dann liegt Kongruenz vor. Räumlich gesprochen sind Bild- und Objektebene parallel, es wird parallel projiziert.

[4] Diesem Thema hat Fiedler später eine ganze Abhandlung gewidmet: Ueber die Symmetrie (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 21 (1876), 50–66). Aus unserer heutigen Sicht ist eher erstaunlich, welche Wichtigkeit Fiedler seiner Interpretation der Symmetrie beimaß.

Fiedler stellt zufrieden fest: „So sind alle Specialfälle der Projection des ebenen Systems in der Charakteristik Δ ausgesprochen.“ (Fiedler 1871, 60) Betrachtet man die obige Einteilung genauer, so stellt man allerdings fest, dass die Charakterik Δ nur dazu dient, den involutorischen Fall vom nicht-involutorischen Fall zu unterscheiden; die wichtigsten Merkmale der Einteilung beziehen sich auf die Lage von Zentrum und Achse.

Im Weiteren behandelt Fiedler konstruktive Aspekte der Zentralkollineationen. So gilt z. B., dass es zu zwei gegebenen Vierecken stets möglich ist, diese in eine solche Lage zu bringen, sodass es eine Zentralkollineation gibt, die das eine in das andere überführt. Hieran schließen sich Betrachtungen zum vollständigen Vierseit und -eck (teilweise in Zwei-Spalten-Schreibweise) an, die wiederum auf die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes führen. Es gilt wieder: „Der Gebrauch des Zirkels ist vermieden, die Construction linear.“ (Fiedler 1871, 65)

Fiedler hat somit einen Grundbestand an wichtigen Sätzen der ebenen projektiven Geometrie darstellend geometrisch hergeleitet, wie er das genannt hätte. Konkret hieß dies: ausgehend von der räumlichen Zentralprojektion.

Der diesen Teil der Methodenlehre beschließende § 23 enthält eine Zusammenfassung des bislang Erreichten und markiert einen Einschnitt, denn nach ihm kommt das Thema Kegelschnitte zur Sprache. Fiedler betont in diesem Paragraphen vor allem, dass sein Ansatz einen organischen Aufbau der Geometrie ermögliche – ganz im Sinne von Jakob Steiner:

> „So entspringt aus den Grundanschauungen und der Methode der darstellenden Geometrie das natürliche System der Geometrie. In demselben ist der Unterschied der Geometrie in der Ebene und im Raum aufgehoben.“ (Fiedler 1871, 68)

Fundamental sind die Grund- oder Elementargebilde im Sinne Steiners, die in verschiedene Stufen eingeteilt werden. Solche der ersten Stufe sind die Punktreihe, das Geraden- und das Ebenenbüschel. Sie sind unter Projizieren und Scheinbildung abgeschlossen. Grundgebilde zweiter Stufe sind das ebene Feld (Ebene als System mit Punkten und Geraden) und das Strahlen- oder Ebenenbündel (alle Geraden bzw. Ebenen im Raum, die durch einen Punkt gehen). Auf der dritten Stufe steht der Raum aufgefasst als System bestehend aus Punkten, Geraden und Ebenen. Neben Schneiden und Scheinbildung ist die Projektivität fundamental, womit wiederum die Erhaltung des Doppelverhältnisses eine Schlüsselrolle spielt.

Schließlich führt der geschilderte Aufbau aus Grundgebilden und Grundoperationen zum „Gesetz der Dualität“, aufgefasst als „Symmetriegesetz des Systems“ (Fiedler 1871, 69). Eine Möglichkeit, Dualität in der Ebene gewissermaßen konstruktiv zu erhalten, deutet Fiedler an dieser Stelle an; es ist dies die Dualität im Strahlenbündel, die ein Paradebeispiel für die „darstellende“ Sichtweise liefert. Die Ebene, in der dualisiert werden soll, wird hierzu als Bildebene betrachtet, zusammen mit einem nicht in ihr gelegenen Zentrum C. Einem Punkt P der Ebene wird konstruktiv die ihm duale Gerade, seine Polare, zugeordnet: Hierzu verbinde man P mit C, errichte auf PC in C die senkrechte Ebene. Ihre Schnittgerade mit der Bildebene ist die Polare p. Ist eine Gerade p in der Bildebene gegeben, so betrachte man die projizierende Ebene Cp und errichte auf dieser in C die Senkrechte. Deren Durchstoßungspunkt P mit der Bildebene ist der gesuchte duale Pol zu p.

Der Einstieg in die projektive Geometrie ist nach 70 Seiten Text geschafft. Allerdings hätte wohl mancher traditionelle darstellende Geometer angemahnt, dass bei Fiedler die klassische darstellende Geometrie (mit ihrem Kernstück, der Zweitafelprojektion) noch gar nicht vorgekommen ist.[5] „Darstellend“ (oder „konstruktiv“) meint bei ihm eigentlich nur „mit Projektionen arbeitend“.

Fiedlers Vorgehen bewährt sich bei der Behandlung der Kegelschnitte im zweiten Abschnitt des ersten Teils „Die konstruktive Theorie der Kegelschnitte als Kreisprojektionen“ (p. 71–121). Kegelschnitte werden aufgefasst als ebene Schnitte von Kreiskegeln, also als Schnitt im Sehkegel. Der Kreis und seine Ebene wird auf den Kegelschnitt und dessen Ebene mit Zentrum in der Kegelspitze projiziert. Also kann man wieder die Zentralkollineation verwenden, um die Situation zu studieren.

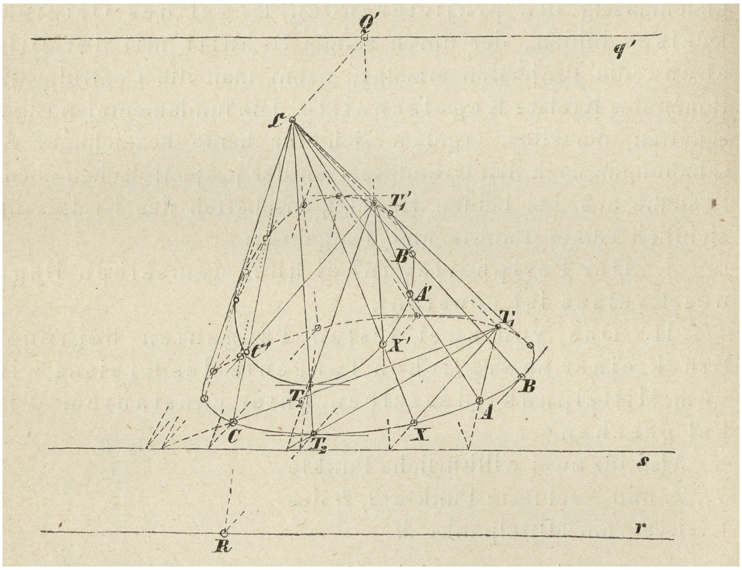


Abbildung 2. Kegelschnitt als Bild einer Zentralprojektion (Fiedler 1871, 72)

Obwohl Abbildung 2 einen räumlichen Eindruck erweckt, gibt sie doch eine ebene Situation wieder – nämlich, nachdem in eine Ebene umgelegt wurde. Der Kreis liegt in der Objektebene, der Kegelschnitt in der Bildebene. Die Achse ist s, die Verschwindungslinie r, q' ist das Bild der Ferngeraden, also die Fluchtlinie in der Bildebene. Die Gestalt des Kegelschnitts hängt davon ab, ob der abzubildende Kreis die Verschwindungslinie in zwei Punkten schneidet, dann entsteht eine Hyperbel, in einem Punkt berührt (Fall der Parabel) oder wie in Abbildung 2 nicht trifft (Ellipse).

Im Falle der Hyperbel erhält man auch die Asymptoten konstruktiv aus Abb. 3. Sie sind die Bilder der Tangenten des zugehörigen Kreises in den Schnittpunkten mit der Verschwin-

[5] Die Parallelprojektion und die Axonometrie werden bei Fiedler erst im Abschnitt D „Die Grundgesetze der orthogonalen Parallelprojection und die Axonometrie“ (pp. 139–194) des ersten Teils behandelt. Vgl. weiter unten.

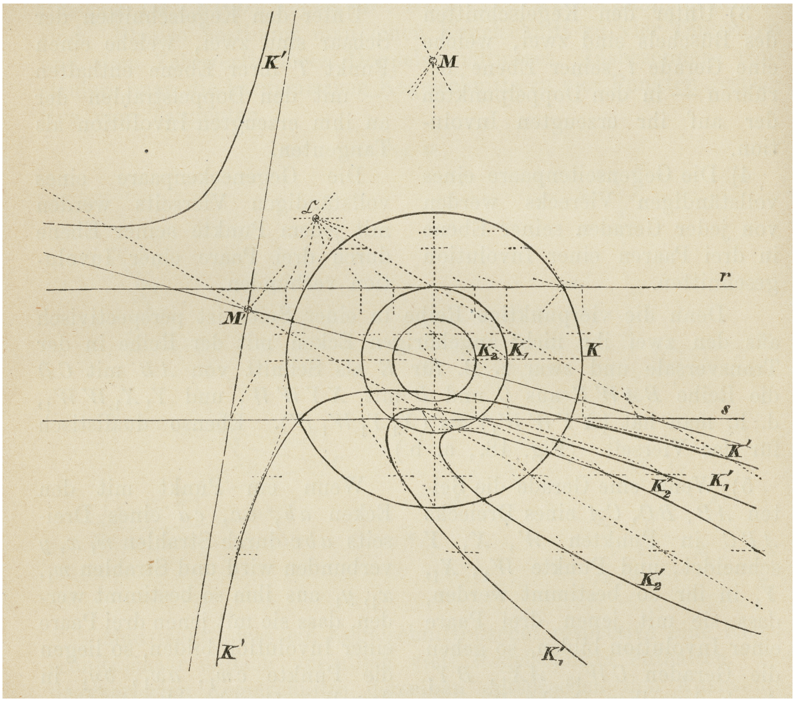


Abbildung 3. Kreise und Kegelschnitte als ihre Bilder bei Zentralkollineation (Fiedler 1871, 77)

dungslinie r. Es gelingt Fiedler mit seinem Ansatz, die bekannten Sätze über Kegelschnitte, insbesondere natürlich Pascal und Brianchon, herzuleiten. Auffällig ist, dass Fiedler in diesem Abschnitt den Dualitätsgedanken stark hervorhebt, vor allem, indem er oft die Zwei-Spalten-Schreibweise verwendet. Auch die Linealkonstruktionen werden wieder betont: „Die vorangehenden Untersuchungen zeigen, daß jeder Kegelschnitt durch projectivische Constructionen mit dem Lineal allein bestimmt ist, sobald man fünf Punkte oder Tangenten desselben kennt oder was dem äquivalent ist." (Fiedler 1871, 86–87) Das heißt, man kann dann beliebig viele Punkte des Kegelschnitts konstruieren.

Die im ersten Abschnitt bereitgestellten Methoden bewähren sich auch im nächsten Abschnitt „C. Die centrische Collineation räumlicher Systeme als Theorie der Modellierungs-Methoden". Fiedler beginnt damit, Einzelheiten und Konstruktionen vorzustellen – deren Anwendung, der Sinn der ganzen Vorgehensweise, wird erst viel später erläutert. Es geht darum, das perpektivische Bild eines Gegenstandes, etwa eines Polyeders, in einem Teil des Raumes, z. B. in einer durch zwei Ebenen begrenzten Schicht, zu konstruieren. Das Zentrum der Zentralprojektion wird dabei als Auge vorgestellt. Diese Problemstellung ist bekannt von Reliefs, weshalb sie auch Reliefperspektive genannt wird; auch die Bezeichnung Modellierung war üblich, das Ergebnis war dann ein Modell. Die Schwierigkeit hierbei ist, dass man den Bildpunkt P' eines Punktes P des Raumes nicht mehr – wie bei der Projektion auf eine Ebene – einfach als Schnittpunkt des projizierenden Strahls definieren kann.

Die Konstruktion wird zurückgeführt auf den bereits behandelten ebenen Fall. Hierzu geht man von einem Zentrum C aus, einer Ebene S, Kollineationsebene genannt, und einem Punktepaar A, A', die mit C kollinear sind. Soll nun ein weiterer Punkt B abgebildet werden, so legt man durch C, A und B die Ebene und verfährt in dieser wie im Falle der ebenen Zentralkollineation. Die Kollineationsachse ist dabei die Schnittgerade der Kollineationsebene mit der Ebene durch C, A und B; zu beachten ist weiter, dass neben A auch A' in dieser Ebene liegt. Neben der Kollineationsebene lassen sich in strikter Analogie zum ebenen Fall zwei Gegenebenen, gekennzeichnet mit fetten Majuskeln $\mathbf{R}$ und $\mathbf{Q_1}$, festlegen. Nimmt man nun eine räumliche Figur, z. B. einen Polyeder, so kann man diesen abbilden durch Ebenen, welche diese Figur treffen (Abb. 4). In jeder dieser Ebenen hat man es mit einer Zentralkollineation zu tun. Dabei genügt es, die Ebenen eines Ebenenbüschels zu betrachten, dessen gemeinsame Gerade das Zentrum enthält. Die solcherart definierte Abbildung nennt Fiedler eine räumliche zentrische Kollineation. Diese ist dadurch gekennzeichnet, dass Punkt, Bildpunkt und Zentrum stets kollinear sind, sowie dadurch, dass die Punkte der Kollineationsebene mit ihren Bildern zusammenfallen und dass sich Geraden und Bildgeraden sowie Ebenen und Bildebenen immer in der Kollineationsebene schneiden. Eine Figur und ihr Bild unter einer räumlichen Kollineation liegen perspektivisch bezüglich des Zentrums. Ist die Achse des Ebenenbüschels die Ferngerade, also insbesondere das Zentrum ein Fernpunkt, so erhält man parallele Schnitte der Figur. Diese Technik wird bei der Konstruktion von materiellen Modellen oft verwendet.

Fiedlers Quintessenz lautet:

> „Die gedachte Anordnung vorausgesetzt, kann also – [...] – das centrisch collineare System einer als gegeben gedachten Raumform für ein im Centrum befindliches Auge ebenso vollkommen täuschend diese Raumform selbst ersetzen, wie dies bei der Perspektive ebener Systeme geschehen kann – sobald nur den übrigen Bedingungen des Sehprozesses genügt wird.“ (Fiedler 1871, 129)

Die fraglichen Bedingungen beziehen sich auf die Lage des Objekts im Sehkegel, insbesondere auf dessen Öffnungswinkel, sowie auf die relative Position der für die Zentralkollineation wesentlichen Ebenen (**R** und $\mathbf{Q_1}$ liegen auf verschiedenen Seiten von **S**, was dazu führt, dass vom Zentrum weiter entfernte Punkte auf weiter entfernte abgebildet werden). Fiedler hat damit sein Ziel erreicht, nämlich mit darstellend geometrischen Mitteln den Sehprozess mathematisch zu fassen. In diesem Kontext finden sich bei Fiedler einige der wenigen konkreten Bezüge zur Praxis. „Nach denselben Grundsätzen sind aber ausser den Reliefs der Sculptur die scenischen Darstellungen der Schaubühne – die Vorhangsebene als Collineationsebene **S**, die Hinterwand der Bühne als Gegenebene $\mathbf{Q_1}$ – und die Constructionen der decorativen Kunst überhaupt, sei es in der Architektur oder in der höhern Gartenkunst, zu entwickeln.“ (Fiedler 1871, 129)

In der zweiten Auflage von 1875 werden diese Hinweise noch weiter konkretisiert:

> „Für die Bühne ist Δ ein positiver Bruch zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$. Ist er zu klein, hat die Bühne zu wenig Tiefe, so macht sich der Gegensatz zwischen den in unverkürzter Tiefendimensionen erscheinenden Personen zu den Umgebungen mit stark verminderten zu sehr merklich.“ (Fiedler 1875, 144)

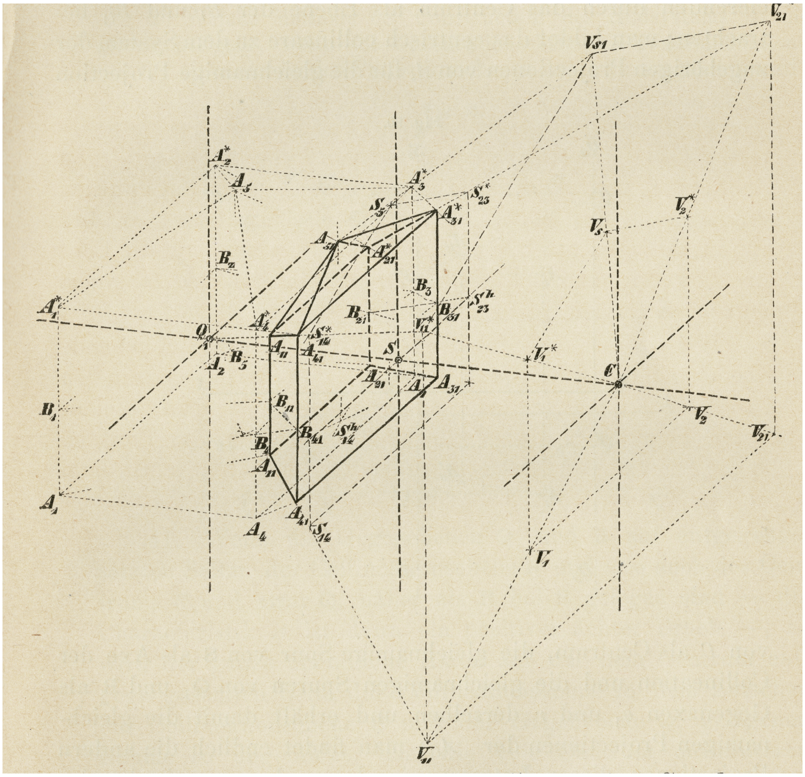


Abbildung 4 Modell eines Polyeders (Würfel mit aufgesetzter Pyramide, ganz links). Dessen Bild, das Modell, ist fett gedruckt. Bilder von Punkten sind durch den zusätzlichen Index 1 gekennzeichnet (z. B. ist A_{11} das Bild von Punkt A_1). (Fiedler 1871, 126)

Die Reliefperspektive war im 19. Jh. ein aktives Forschungsgebiet, wie man auch den ausführlichen Anmerkungen Fiedlers zu den fraglichen Paragraphen entnehmen kann. Die Namensgebung geht auf J. V. Poncelet und seinen bekannten „Traité" (1822) zurück; umfassende lehrbuchartige Darstellungen in deutscher Sprache legten Rudolf Staudigl (1868) in Wien und Ludwig Burmester in Dresden (1883) vor. Rafael Morstadt, Assistent von Fiedler in seiner Prager Zeit, veröffentlichte 1867 einen Artikel „Ueber die räumliche Projection (Reliefperspective), insbesondere der Kugel", in dem er u. a. beschrieb, wie er konkret bei der Konstruktion von materiellen Modellen von Flächen zweiter Ordnung in Reliefperspektive – gewissermaßen Modelle von Modellen – vorgegangen war. Morstadts Modelle sind anscheinend nicht mehr erhalten, bekannt geblieben sind diejenigen, die später H. Thoma herstellte. Man vergleiche hierzu die schönen Abbildungen im Buch Mathematik mit Modellen (pp. 142 und 143) nebst den dortigen Erläuterungen.

Schließlich bringt Abschnitt D „Die Grundgesetze der orthogonalen Parallelprojection, ihre Transformationen und die Axonometrie" eine Einführung in die Mongesche darstellende Geometrie, beginnend mit den typischen Ausführungen zur Lokalisierung eines Punktes im Raum und seinen Projektionen (vgl. Abb. 5).

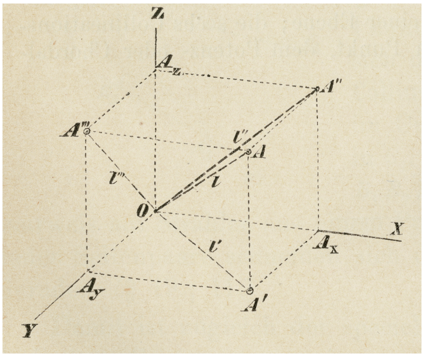


Abbildung 5. Punkt A mit seinen drei Projektionen (Fiedler 1871, 139)

In diesem Abschnitt kommen Themen wie die Parallelprojektion, die Zwei- und die Dreitafelprojektion, Durchdringungen und Axonometrie zur Sprache – alles klassische Gegenstände der darstellenden Geometrie. Die Zeichnungen werden teilweise recht aufwändig, wie ein Beispiel erläutern möge (vgl. Abb. 6).

Auffällig ist, dass Fiedlers Behandlung der traditionellen Themen knapp und recht theoretisch ist, als Anleitung für praxisorientierte Leser folglich wenig nützlich. Sie hat eher den Charakter der Rekapitulation vom höheren Standpunkt aus denn der Einführung. Das war aber auch nicht Fiedlers Ziel, wie er ja schon in der Vorrede deutlich macht.

Abschließend soll Fiedler hier nochmals zu Wort kommen. In der dritten Auflage seines Lehrbuchs (1883) resümierte er die Wirkung und Aufnahme seines Werkes und seiner zentralen Idee in recht optimistischer Weise:

> „Die organische Verbindung der Geometrie der Lage mit der darstellenden Geometrie, das mit der leitenden Stellung der Centralprojection zusammenhängende Programm des Verfassers, ist mehr und mehr als dem heutigen Entwickelungsstandpunkt allein gemäss anerkannt worden; die Gründe, die zu demselben geführt haben, werden im Buch selbst überall hervortreten.“ (Fiedler 1883, 357).

Weiter unten (in 6.) werden wir uns die Rezeption von Fiedlers Werk genauer anschauen. Dabei zeigt sich, dass seine Beurteilung der Lage recht unrealistisch gewesen ist.

2 Fiedlers Vorlesungen

Fiedlers meist zweistündige Vorlesung über darstellende Geometrie gehörte, was die Hörerzahl anbelangte, zu den größten Veranstaltungen, die am Züricher Polytechnikum abgehalten wurden. Im WS 1871/72 hatte er 176 Zuhörer, im WS 72/73 156[6] und im SoSe 77 141.[7]

[6] Vgl. Bericht über die Organisation und das Wirken der Eidgenössischen Polytechnischen Schule in Zürich (Zürich: Zürcher & Furrer, 1873), p. 12f.

[7] Rapport sur l’enseignement et la marche de l’école polytechnique Fédérale à Zürich (Zürich: Zürcher & Furrer, 1878), Tabelle.

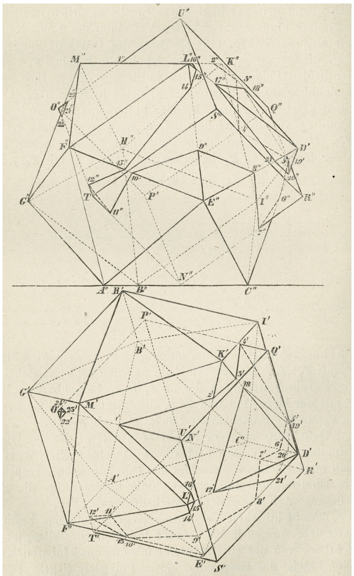


Abbildung 6. Durchdringung eines Ikosaeders mit einem Würfel (Fiedler 1871, 175)

Einige Vorlesungsausarbeitungen, die im Hochschularchiv der ETH erhalten sind, geben Hinweise darauf, was Fiedler in seiner Vorlesung tatsächlich behandelt hat. So entnimmt man der Mitschrift von Paul Henri Hoffet (WS 86/87)[8] folgende Gliederung:

I. Central-Projection p. 1
   Darunter Abschnitte wie „Die Kegelschnitte als Kreisprojectionen" p. 72 und „Die Involution und ihre Doppelelemente" p. 94.
II. Ergänzung der Orthogonalprojection p. 127
   Darunter Abschnitte wie „Axonometrie" p. 146, „Die entwickelbaren Flächen" p. 154 und „Hauptformen Durchdringung" p. 202.

Insgesamt umfasst die handgeschriebene Ausarbeitung 218 Seiten. Es ergibt sich der Eindruck, dass Fiedler in seiner Vorlesung doch stärker auf die Bedürfnisse der Praxis Rücksicht nahm als in seinem Buch. Er behandelte auch Beispiele und Aufgaben ausführlicher, allerdings gibt es keine Aufgaben oder Beispiele, die direkt praktisch gewesen wären (etwa ein Werkstück in Zwei-Tafel-Projektion). Solche Stücke fehlten auch in der Modellsammlung des Polytechnikums für den Unterricht in darstellender Geometrie, die von Fiedler verwaltet wurde.[9]

Im WS 85/86 wurde die darstellende Geometrie für die Bauschule ohne Nennung des Dozenten angekündigt, im WS 86/87 gab es dann die von Weiler angebotene separate darstellende Geometrie für die Bauschule (im Format 2 Stunden Vorlesung, 1 Stunde Repetitorium, 4 Stunden Übungen). Fiedlers Publikum bestand nun noch aus den Studenten der

[8]ETH-Bibliothek Hochschularchiv 910200:7 (Hs). Hoffet, Paul Henri (1865–1945), Privatdozent für Maschinenbau am Polytechnikum (1890), Leitender Ingenieur u. a. der Allgemeinen Maggi-Gesellschaft, Kempthal.

[9]Vgl. dessen Inventar ETH-Bibliothek Hochschularchiv Hs 1196 : 30 sowie Volkert 2018.

(Bau-)Ingenieurschule, der Maschinenschule und der Fachlehrerabteilung. Dennoch blieben die Zuhörerzahlen hoch, z. B. besuchten im WS nach offiziellen Angaben 128 Hörer seine Veranstaltung. Für Fachlehrer bot Fiedler auch noch geometrische Spezialvorlesungen an, so z. B. im genannten Semester „Geometrie der Lage“ (3 Stunden plus 2 Stunden Übungen und Repetitorium) sowie „Ausgewählte Kapitel der analytischen Geometrie der Curven und Flächen“ (2 Stunden). Oft hielt Fiedler auch zusammen mit seinen Kollegen[10], die die reine Mathematik in deutscher Sprache vertraten, seminaristische Übungen ab. Man bemerkt, dass die Ausbildung der Fachlehrer auf einem hohen Niveau stattfand, das sich – auch hinsichtlich der Organisation des Studiums – mit den Universitäten durchaus messen konnte – und hinsichtlich der Betreuung diesem durchaus überlegen war. Fiedler hat schon früh Autographen in seinen Vorlesungen eingesetzt, etwa eine Seite mit wichtigen Formeln und dgl.[11] Ein Autograph „Darstellende Geometrie“ (datiert Zürich, 1894) ist erhalten (vgl. Abb. 7)[12]; dieses umfasst 128 Seiten nebst 6 Figurentafeln mit 70 Zeichnungen. In der Randspalte gibt es zahlreiche Verweise auf den ersten und den zweiten Band der dritten Auflage von Fiedlers Lehrbuch.

Diese autographierte Ausarbeitung unterscheidet sich deutlich von derjenigen Hoffet’s. Es gibt keine konsequente Binnengliederung durch Überschriften o. dgl., der Text schreitet einfach in Form einer Erzählung voran. Auffallend ist, dass es nun eine lange Einleitung gibt, in der die Betrachtung von Projektionen motiviert wird. Hierzu dient die stereographische Projektion, die in Zusammenhang gebracht wird mit Landkarten. Auch Schatten und Lichtkegel werden betrachtet. Danach kommen Themen wie affine Verwandtschaften (Fiedler nennt sie nun Umformungen), zentrale Kollineationen, Doppelverhältnisse, projektive Büschel und Reihen, Rotationshyperboloide, Reliefperspektive, Involutionen, Axonometrie, Schnitte krummer Flächen, Schrauben- und Regelflächen. Der Inhalt entspricht in etwa Auszügen aus den Seiten 1 bis 193 des ersten Bandes und 1 bis 512 des zweiten Bandes der Auflage von 1883 bzw. 1885.

Hervorgehoben sind im Text einige Beispiele:

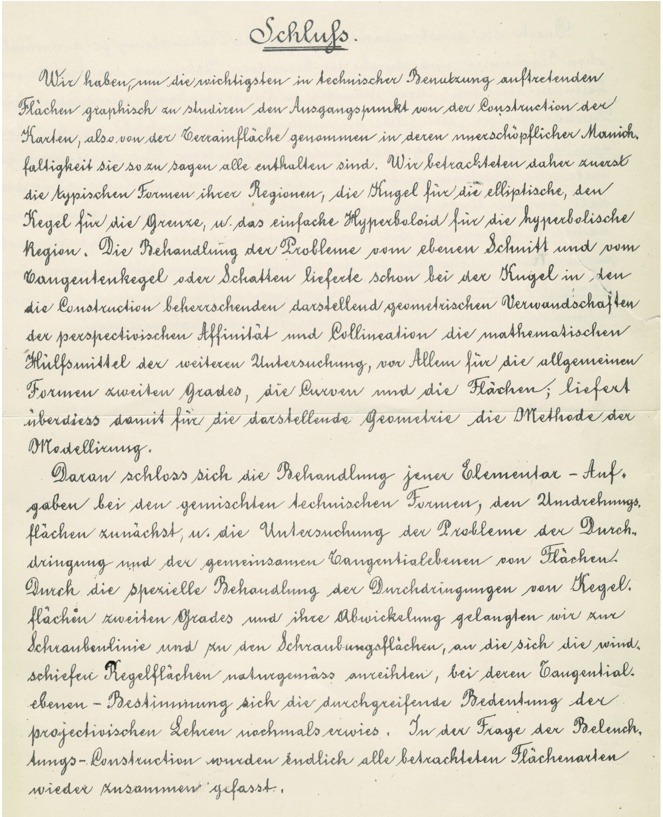
- „Bsp. I. Darstellung kleiner Theile der Erdoberfläche durch äquidistante Horizontalschnitte (Specialkarten, Terrainflächen)“ (Fiedler 1894, 4)
- „Bsp. II. Die Kugel nach Querschnitten & Tangentenkegeln.“ (Fiedler 1894, 9)
- „Bsp. VI. Die Involution u. die Lehre von Pol u. Polare a) bei den Kegelschnitten b) nach Anwendung auf die Darstellung der Flächen zweiten Grades c) nach der Methode der Axonometrie.“ (Fiedler 1894, 60)[13]
- „Bsp. VIII. Gemeinsame Punkte u. Tangentialebenen von zwei (u. drei) krummen Flächen, das wird [lies: was wir; K. V.] zuerst an dem Falle der Rotationsflächen mit sich schneidenden Axen näher erläutern wollen.“ (Fiedler 1894, 92)

[10] Das waren zwischen 1867 und 1902 u. a. Christoffel, Prym, Schwarz, Weber, Frobenius, Schottky, Hurwitz, Minkowski und Geiser.

[11] Das belegt Fiedlers Ausgabenbuch, vgl. ETH-Bibliothek Hochschularchiv Hs 1196 : 50, Beispiele finden sich verstreut in Hs 87a. Autographen wurden mit Hilfe des Steindrucks, der Lithographie, von hierauf spezialisierten Anstalten hergestellt; in Zürich z. B. Autographen E. Zimmer. Die Druckvorlage wurde dabei handschriftlich von eingearbeiteten Schreibern erstellt.

[12] Z. B. ETH-Bibliothek Hochschularchiv Hs 87a : 8. Der Verfasser dankt Prof. U. Stammbach (Zürich) für die Überlassung eines Exemplars dieses Autographen.

[13] Es gibt Sprünge in der Nummerierung, da nur manche Beispiele typographisch hervorgehoben werden.



Schluss.

Wir haben, um die wichtigsten in technischer Benutzung auftretenden Flächen graphisch zu studiren den Ausgangspunkt von der Construction der Karten, also von der Terrainfläche genommen in deren unerschöpflicher Mannichfaltigkeit sie so zu sagen alle enthalten sind. Wir betrachteten daher zuerst die typischen Formen ihrer Regionen, die Kugel für die elliptische, den Kegel für die Grenze, u. das einfache Hyperboloid für die hyperbolische Region. Die Behandlung der Probleme vom ebenen Schnitt und vom Tangentenkegel oder Schatten lieferte schon bei der Kugel in den die Construction beherrschenden darstellend geometrischen Verwandschaften der perspectivischen Affinität und Collineation die mathematischen Hülfsmittel der weiteren Untersuchung, vor Allem für die allgemeinen Formen zweiten Grades, die Curven und die Flächen; liefert überdiess damit für die darstellende Geometrie die Methode der Modellirung.

Daran schloss sich die Behandlung jener Elementar-Aufgaben bei den gemischten technischen Formen, den Umdrehungsflächen zunächst, u. die Untersuchung der Probleme der Durchdringung und der gemeinsamen Tangentialebenen von Flächen. Durch die specielle Behandlung der Durchdringungen von Kegelflächen zweiten Grades und ihre Abwickelung gelangten wir zur Schraubenlinie und zu den Schraubungsflächen, an die sich die windschiefen Regelflächen naturgemäss anreihten, bei deren Tangentialebenen-Bestimmung sich die durchgreifende Bedeutung der projectivischen Lehren nochmals erwies. In der Frage der Beleuchtungs-Construction wurden endlich alle betrachteten Flächenarten wieder zusammen gefasst.

Abbildung 7. Anfang der Schlussbemerkung aus Fiedler 1894

- „Bsp. IX. Die Durchdringung der Kegel u. Cylinder zweiten Grades." (Fiedler 1894, 98)
- „Bsp. X. Von der Abwickelung u. Schattenbildung der Cylinder u. Rotationskegel u. der Schraubenlinie." (Fiedler 1894, 109)
- „Bsp. XI. Windschiefe Regelflächen." (Fiedler 1894, 116)
- „Bsp. XII. Beleuchtungsconstructionen für paralleles Licht als Mittel zur Veranschaulichung der Formen." (Fiedler 1894, 122)

Insgesamt eine interessante Auswahl.

3 Fiedlers Verschmelzung: eine gescheiterte Innovation?

Fiedlers Lehrbuch erlebte insgesamt vier Auflagen. Die zweite erschien bereits 1875 mit etwas verändertem Titel: „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Für Vorlesungen an technischen Hochschulen und zum Selbststudium" – jetzt verweist schon der Titel auf Fiedlers großes Projekt. Der Umfang war angewachsen auf LIV plus 760 Seiten, neu hinzugekommen war ein „Sachregister" – für damalige Zeiten ein eher ungewöhnlicher Luxus: „. . . ; zum Vortheil der mit dem Stoffe schon Vertrauten habe ich die Mühe der Anfertigung eines alphabetischen Sachen-Registers nicht gescheut.“ (Fiedler 1875, XXVII). Inhaltlich unterschieden sich die Auflagen von 1871 und 1875 nur wenig, der Zuwachs an Umfang ist vor allem auf zusätzliche Erläuterungen sowie Aufgaben und Beispiele zurückzuführen, die in den alten in der Regel unveränderten Text eingefügt wurden; einige neue Abbildungen sind auch hinzugekommen. Teubner war anfänglich skeptisch, ob sich die neue Auflage verkaufen würde[14], wurde aber eines Besseren belehrt. 1883, 1885 und 1888 erschien schließlich die dritte Auflage, diesmal in drei Bänden nun auch mit Figurentafeln. Die drei Bände entsprechen den drei Teilen der einbändigen Ausgaben von 1871 und 1875. Der Zuwachs an Inhalt ist diesmal auch auf inhaltliche Neuerungen zurückzuführen, denn Fiedler baute nun Teile seiner Zyklographie ein.

Diesem Thema hatte Fiedler 1882 ein ganzes Buch gewidmet (Fiedler 1882), vermutlich mit der Hoffnung, Aufmerksamkeit seitens der Fachwelt zu finden. Die Zyklographie[15] ist ein weiteres Beispiel für das, was Fiedler „darstellend“ genannt hat, denn ihre Grundidee entstammt der Zentralprojektion. Dort hatten wir Zentrum und Distanzkreis kennengelernt, auffällig ist nun, dass letzterer als Darstellung für das Zentrum dienen kann. Fiedler bemerkt hierzu:

> „Die Betrachtung des Orthogonalsystems mit dem Distanzkreis in der Centralprojection und analog in der Orthogonalprojection gab mir 1858 die Ueberzeugung, dass das Studium der darstellenden Geometrie von dem der Geometrie der Lage nicht getrennt werden dürfe.“ (Fiedler 1883, 362)

Allgemein wird jedem Punkt des Raumes in einer vorgegebenen Ebene ein Kreis zugeordnet, dessen Mittelpunkt die senkrechte Projektion des Punktes auf die Ebene ist und dessen Radius gleich dem Abstand des Punktes von der Ebene ist.[16] Legt man nun durch den Punkt und den zugehörigen Kreis Geraden, so entsteht ein zyklographischer (Doppel-) Kegel; charakteristisch für solche Kegel ist, dass der Öffnungswinkel 90° beträgt. Nimmt man nun einen Punkt des zyklographischen Kegels nebst zugehörigem zyklographischen Kreis, so berührt letzterer den zyklographischen Kreis des Punktes, zu dem der Kegel gehört.

Natürlich liegt nach dieser Einsicht die Vermutung nahe, Fiedlers Zyklographie könne eine einfache Lösung des Apollonischen Berührproblems liefern.[17] Den drei dabei gegebenen Kreisen entsprechen drei zyklographische Kegel; ein gemeinsamer Punkt der drei Kegel liefert eine Lösung des Problems. Der Schnitt zweier zyklographischer Kegel ist in der Regel eine Hyperbel, die Ermittlung solcher Schnitt- oder Durchdringungskurven gehörte zum Standardrepertoire der darstellenden Geometrie. Folglich muss man nach einem Schnittpunkt von drei Hyperbeln suchen. Am vielleicht einfachsten geht das so[18]: Die Hyperbeln liegen in Ebenen, folglich liegt der gesuchte Punkt auf derjenigen Geraden, in

[14] Vgl. B. G. Teubner an Fiedler 28. 6. 1876 ETH-Bibliothek Hochschularchiv Hs 87 : 1265.
[15] Vgl. hierzu ausführlich Wengel 2020.
[16] Will man Eindeutigkeit erreichen, so kann man z. B. die Kreise orientieren.
[17] Die Lösungsidee findet sich schon bei Gergonne 1816–17.
[18] Diese Idee verdanke ich Herrn N. Hungerbühler.

der sich die drei Hyperbelebenen schneiden. Der Schnittpunkt dieser Geraden wiederum mit einem der Kegel liefert die gesuchte Lösung, denn er liegt in allen drei Kegeln. Auch dies ist eine Standardaufgabe der darstellenden Geometrie.

Fiedler nutzte die Zyklographie fast ausschließlich zur Lösung von Konstruktionsproblemen – etwa zu Kreisreihen oder zu Kreisen, die unter einem vorgegebenen Winkel andere schneiden. Man kann in ihr auch eine Abbildungsmethode sehen – und zwar eine nicht „bildhafte". Dann liegt die Zyklographie in der Entwicklungslinie abstrakter geometrischer Forschungen, wie jenen zu Laguerre-Geometrien. Daran hatte Fiedler anscheinend kein Interesse. Seine Auffassung der Zyklographie fand nur wenig Resonanz – wohl nicht zuletzt, weil viele zyklographischen Lösungen aufwändiger sind als die gängigen.

Die vierte Auflage von Fiedlers Buch 1904 blieb auf den ersten Band beschränkt, der wieder angewachsen war. Verglichen mit dem Lehrbuch von Pohlke oder auch mit dem von Christian Wiener, die es beide auf ebenfalls vier Auflagen brachten, erreichte Fiedler eine durchaus beachtliche Zahl von Auflagen. Hier kam ihm vermutlich seine große Hörerschaft am Züricher Polytechnikum zu gute. Offensichtlich bezog er sich in seiner Vorlesung oft und ausführlich auf sein Buch, so dass den Studenten kaum was anderes übrigblieb, als es sich zu kaufen. In einer an den Schulrat gerichteten Protestnote aus dem Jahre 1902 heißt es:

> „Uebrigens wird überhaupt immer auf dieses Buch verwiesen, so dass die Schüler alle gezwungen sind, dieses für sie schwer verständliche Werk zu kaufen, welches somit im Range eines obligatorischen Lehrmittels erhoben wird."

Die hohe Zahl von Auflagen heißt also nicht unbedingt, dass Fiedlers Buch außerhalb von Zürich weit verbreitet gewesen wäre.

Die Kritik nahm Fiedlers Werk durchaus beifällig auf. So schrieb das „Literarische Centralblatt"[19] 1872 zur ersten Auflage von Fiedlers Werk: „Es ist eine angenehme Aufgabe für den Referenten, ein Werk anzuzeigen, welches gegenüber den bisherigen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie einen wesentlichen Fortschritt bezeichnet." (Spalte 579)[20] Im Zuge einer recht ausführlichen Darlegung des Inhaltes des Buches wird die Quintessenz des Fiedlerschen Ansatzes treffend herausgearbeitet: „. . . ; es sind das [Parallel- und Zentralprojektion, Transformationen; K. V.] dieselben Hilfsmittel, deren sich auch die neuere Geometrie bedient; und es wird also auf diese Art in ganz naturgemäßer Weise der Zusammenhang zwischen dieser Disziplin und der darstellenden Geometrie vermittelt." (Spalte 580) Das Fazit der Besprechung lautet: „Wenn Referent schließlich ein Gesammturtheil über das Werk abgeben soll, so kann er dasselbe nicht nur als ein gediegenes Lehrbuch der darstellenden Geometrie bezeichnen, das eine Fülle von Anregungen bietet, sondern auch als eine treffliche Einführung in die neuere Geometrie, welche die hier angefangenen Untersuchungen bei gereifter und durchbildeter Raumanschauung weiter fortzuführen hat über die Grenzen des Darstellbaren hinaus." (Spalte 581)

Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik vermeldete: „Im vorliegenden Werk scheint dem Referenten der Plan durchgeführt, neben der Angabe der bekannten Darstel-

[19] Dieses Referate-Organ wurde von Friedrich Zarncke herausgegebene und erschien in Leipzig bei Avenarius.
[20] Der Referent unterzeichnete mit „G. - l.". Es ist mir leider nicht gelungen herauszufinden, wer das war.

lungsmethoden besonders den Zusammenhang und die Beziehungen zwischen Original und Bild zu erläutern, um nicht blos aus dem Bild das Original seiner Form und Lage nach erkennen zu lassen, sondern seine Eigenschaften an denen des Bildes studiren zu können. Der Herr Verfasser hat damit, wie in der Vorrede angegeben wird, den doppelten Zweck im Auge, einmal die wissenschaftliche Entwickelung und Durchbildung der Raumanschauung zu fördern und zweitens die darstellende Geometrie als natürliche Einführung in die Geometrie der Lage zu gestalten.“[21] Es folgte eine knappe Darlegung des Inhalts des Buches. Das Jahrbuch besprach auch die zweite Auflage von Fiedlers Lehrbuch ausführlich, jetzt hebt der Verfasser hervor, dass die gegenüber der ersten Auflage vorgenommenen umfangreichen Ergänzungen geeignet seien, „den Werth des Buches noch zu erhöhen, und den Grundgedanken der organischen Verbindung der beiden im Titel genannten Geometrien noch vollständiger zu entwickeln.“ (p. 335).[22]

Dennoch fand Fiedler mit seinem Kernanliegen, nämlich der Verschmelzung von darstellender und projektiver Geometrie, keinen Anklang. Das wird schon deutlich bei Christian Wiener, der 1884 den ersten Band seines Lehrbuchs der darstellenden Geometrie vorlegte, der zweite folgte drei Jahre später. Nach einer sehr ausführlichen Geschichte der Disziplin, die auch Fiedler angemessen berücksichtigt, erarbeitet Wiener auf den ersten zweihundert Seiten die Grundlagen der Monge'schen Theorie, um danach in einem eigenen Abschnitt auf gut 170 Seiten die projektive Geometrie zu behandeln. Fiedlers Verschmelzung – Wiener nennt sie „die volle Einführung der projektiven in die darstellende Geometrie“ (Wiener 1884, 38) – wird also hier wieder rückgängig gemacht. In dem sehr umfangreichen Überblick zur darstellenden Geometrie, den Erwin Papperitz (1857–1938) 1909 für die „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ verfasste, wird Fiedler im Abschnitt „30. Die organische Verbindung der darstellenden mit der Geometrie der Lage“ behandelt. Dort wird das Scheitern von Fiedler schon deutlich, die Akten sind gewissermaßen geschlossen:

> „Vom Standpunkt einer streng wissenschaftlichen Systematik aus stellt *W. Fiedler* mit Recht die *Zentralprojektion* und die *zentrische Kollineation der Räume* als allgemeinste Methoden voran, um aus ihnen die *Parallelprojektion* und die *affine Kollineation* durch Spezialisierung abzuleiten. Didaktische Rücksichten, die schon bei *Monge* von Einfluss waren, veranlassen ihn aber zu verlangen, daß der Erledigung seines auf die Bedürfnisse der modernen wissenschaftlichen Hochschulen zugeschnittenen Programmes ein Kursus vorangehe, der die Elemente des Grund- und Aufrißverfahrens lehrt. Auch die von *W. Fiedler* hergestellte *organische Verbindung der descriptiven*, der *reinen und analytischen Geometrie* erscheint nicht als eine in dem Wesen ihrer Prinzipien begründete Verschmelzung dieser Wissenschaften; sondern als eine aus didaktischen als zweckmäßig erkannte Anordnung und Formung des geometrischen Lehrstoffes, indem er sagt, daß die darstellende Geometrie die Aufgabe habe, sich selbst überflüssig zu machen, daß sie die natürliche Einführung in die reine Geometrie

[21] Band 3 (1871), p. 252, Referent war Dr. Scholz, Berlin.

[22] Verfasser war diesmal „Sm“, dahinter verbirgt sich Prof. Rudolf Sturm in Darmstadt, ein wichtiger Briefpartner und Kollege von Fiedler. Die Besprechung findet sich auf den Seiten 335 bis 341, besteht aber im Wesentlichen aus einem Referat des Inhalts des Buches.

> sei und ganz natürlich da in dieselbe einmünde, wo sie ihre Aufgabe beendet habe.“ (Papperitz 1909, 572)[23]

Einen Erfolg hatte Fiedler allerdings mit seinem Lehrbuch – nämlich die Tatsache, dass es 1874 in italienischer Übersetzung erschien. Die Hintergründe und Motive hierfür kann man Fiedlers Briefwechsel mit Luigi Cremona und seinem Übersetzer Ernesto Padova entnehmen (vgl. Confalonieri/Schmidt/Volkert 2020). Die Übersetzung wurde von Cremona, der in der italienischen mathematischen Gemeinschaft und in der Bildungspolitik sehr einflussreich war und Fiedlers Werk schätzte, befürwortet. Er erhoffte sich, so ein nützliches Lehrbuch für das nach der Einigung im Aufbau befindliche technische Bildungswesen Italiens zu bekommen. Diese Hoffnungen haben sich anscheinend nicht erfüllt, es blieb bei nur einer Auflage, die wohl auch nur an einigen Orten zum Einsatz kam.

Fiedlers große Synthese erwies sich letztlich als eine gescheiterte Innovation. Neben eher praktischen Gründen wie dem großen hierfür nötigen Lehraufwand (verglichen etwa mit einem klassisch Monge’schen Vorgehen) lassen sich hierfür auch allgemeinere Gründe anführen.

In den letzten beiden Jahrzehnten des 19. Jhs. setzte eine breite Diskussion über das Verhältnis von Theorie und Praxis in den Ingenieurwissenschaften ein. Ein Aspekt hiervon war die Kritik an der den zukünftigen Ingenieuren zuzumutenden Mathematik, schlagwortartig nicht ganz glücklich antimathematische Bewegung genannt. Aber auch in den Ingenieurwissenschaften selbst gerieten stark theoretische Ansätze wie etwa Culmann’s graphische Statik oder Reuleaux’ Kinematik in die Kritik. Geht man vom Primat der Praxis aus, ist Fiedlers großen Synthese vor allem ein unnötiger Aufwand, um praktisch wenig relevante Dinge zu erlernen. Was für die Praxis zählt, wird in den Vorkurs delegiert. Fielen diese weg, wie das an allen Polytechnika nach und nach geschah, so ergab sich eine wesentliche Lücke im Wissen der Studenten.[24] Reduziert man die darstellende Geometrie auf eine Zeichenkunst, so erübrigt sich Fiedlers Verwissenschaftlichung derselben.

Innermathematisch stand Fiedlers Vision ebenfalls im Widerspruch zu gegen Ende des 19. Jhs. immer stärker werdenden Tendenzen – nämlich dem Streben nach Methodenreinheit (Beispiel: die Trennung von metrischer und projektiver Geometrie) und die zunehmende Wichtigkeit der Axiomatik mit ihrem vorläufigen Höhepunkt, den Arbeiten von Hilbert zur Axiomatik der Geometrie (1899) und der reellen Zahlen (1900). Nicht die Verschmelzung war gefragt, sondern die Trennung, nicht mehr der organische Aufbau, sondern die axiomatische Grundlegung nebst gestuftem Aufbau waren nunmehr wichtig. Die Geometrie im Stile Steiners, Fiedlers großes Vorbild, geriet ins Hintertreffen, wo sie bis heute geblieben ist. Ganz allgemein nahm die Wichtigkeit der Geometrie im Bereich der reinen Mathematik ab; Fiedler und seine Bundesgenossen, die eine Art Netzwerk Geometrie[25] bildeten, kämpften dennoch mit großem Einsatz für sie. Ihr großer Gegner waren

[23] Papperitz war seit 1892 an der Bergakademie in Freiberg tätig; zusammen mit Karl Rohn (1855–1920) verfasste er ein zweibändiges Lehrbuch der darstellenden Geometrie (Leipzig: Veit & Comp., 1893 und 1896), das in etwa dem Vorbild von Wiener folgte. Insbesondere wird auch hier die projektive Geometrie separat behandelt.

[24] Das betraf natürlich vor allem Studenten, die von klassischen Gymnasien, also nicht aus dem gewerblich-technischen Bildungswesen oder von Realanstalten, kamen.

[25] Zu ihm gehörten z. B. S. Gundelfinger, G. Hauck, R. Sturm, H. C. H. Schubert, A. Voss und andere mehr. Das Netzwerk funktionierte hauptsächlich über Korrespondenz, seine Erforschung ist ein Desiderat. Die erhaltenen

die „Herren in Berlin“[26] und deren (vermeintlich einseitige) Bevorzugung von Analysis und Algebra. Da aber die Historiographie der Mathematik meist die Positionen favorisiert, die sich schließlich durchsetzen konnten, ist dieser Kampf für die Geometrie und mit ihm Fiedlers Werk weitgehend in Vergessenheit geraten.

Literatur

Confalonieri, S./Schmidt, P.-M./Volkert, K.: Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern (Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 12 (2019)).

Fiedler, W.: Die darstellende Geometrie. Ein Grundriß für Vorlesungen an Technischen Hochschulen und zum Selbststudium (Leipzig: Teubner, 1871); Titel ab der zweiten Auflage: Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Für Vorlesungen an technischen Hochschulen und zum Selbststudium (Leipzig: Teubner, [2]1875); dritte Auflage in drei Bänden: Band I Leipzig, 1883, Band II Leipzig, 1885, Bd. III Leipzig, 1888; vierte Auflage des ersten Bandes Leipzig, 1904). – Übersetzung der ersten Auflage ins Italienische: Trattato di geometria descrittiva, tradotto da Antonio Sayno e Ernesto Padova. – Versione migliorata coi consigli e le osservazioni dell’Autore e liberamente eseguita per meglio adattarla all’insegnamento negli istituti tecnici del Regno d’Italia (Firenze: Successori Le Monnier, 1874).

Fiedler W.: Cyclographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme (Leipzig: Teubner, 1882).

Fiedler W.: Darstellende Geometrie. Autographierte Ausarbeitung einer Vorlesung (Zürich: E. Zimmer, 1894).

Gergonne, J. D.: Géométrie analitique. Recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan (Annales de mathématiques pures et appliquées 7 (1816–1817), 289–303).

Seidl, E./Loose, F./Bierende, E. (ed.): Mathematik mit Modellen. Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung (Tübingen: Museum der Universität Tübingen (MUT), 2018).

Morstadt, R.: Ueber die räumliche Projection (Reliefperspective), insbesondere diejenige der Kugel (Zeitschrift für Mathematik und Physik 12 (1867), 326–339).

Papperitz, E.: Darstellende Geometrie. In. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. III. Band, erster Theil, erste Hälfte (Leipzig: Teubner, 1907–1910), 517–595.

Volkert, K: Mathematische Modelle und die polytechnische Tradition (Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 10 (2018), 161–202).

Wengel, R.: Die Zyklografie Wilhelm Fiedlers (Dissertation Wuppertal, 2020).
`http://elpub.bib.uni-wuppertal.de/servlets/DocumentServlet?id=10480`

Wiener, Chr.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Erster Band. Geschichte der darstellenden Geometrie, ebenflächige Gebilde, krumme Linien (erster Teil), projektive Geometrie (Leipzig: Teubner, 1884).

Wiener, Chr.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Zweiter Band. Krumme Linien (zweiter Teil) und krumme Flächen, Beleuchtungslehre, Perspektive (Leipzig: Teubner, 1887).

Prof. Dr. Klaus Volkert
Bergische Universität Wuppertal
AG Didaktik und Geschichte der Mathematik
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
e-mail: `klaus.volkert@uni-wuppertal.de`

rund 2000 Briefe an Fiedler wurden 2019 vom Archiv der ETH digitalisiert und in den e-mansucripta allgemein zugänglich gemacht.

[26]Denen hätte Fiedlers Einführung des Tangentenbegriff schwerlich gefallen: „Die Tangente einer Kurve als Ort eines bewegten Punktes ist die gerade Verbindungslinie von zwei unendlich nahe benachbarten Lagen desselben.“ (Fiedler 1871, 195) – noch ganz so wie einst bei Johann Bernoulli und dem Marquis de l’Hôpital.