

---

---

## Eulers Lösung eines *difficiliorum Problematum*

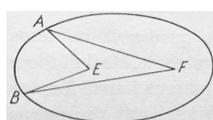
---

---

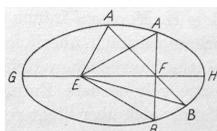
Gerhard Wanner

Gerhard Wanner, gebürtiger Tiroler und assimilierter Genfer, wurde 2019 zum Ehrenmitglied der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft ernannt.

In der Korrespondenz zwischen Leonhard Euler und Christian Goldbach erwecken zwei kleine Bildchen unser Interesse (die ersten zwei Bilder)



Euler an Goldbach



Goldbach an Euler

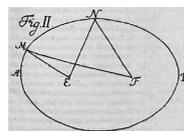


Bild aus [1]

und wir fragen uns, was haben diese Figuren in den Briefen dieser beiden Giganten des 18ten Jahrhunderts verloren?

Euler schrieb ([5, Brief LXVIII, jan. 21. 1744], [7, Brief 76]): „In den Actis Lips. M. Nov. ist ein problema proponirt worden solches Inhalts:“ – und weiter in schönem Latein (siehe auch [1] und das rechte Bildchen) – „Circa data duo puncta  $E$  et  $F$  lineam curvam describere hujusmodi ut si ex duobus ejus punctis quibusvis  $A$  et  $B$  ad illa puncta  $E$  et  $F$  ducantur rectae, area  $AEB$  futura sit semper proportionalis angulo  $AFB$ “ – oder auf gut Deutsch – für zwei feste Punkte  $E$  und  $F$  sind Kurven gesucht, so dass, für beliebige Punkte  $A$  und  $B$  darauf, die Fläche  $AEB$  immer zum Winkel  $AFB$  proportional ist (linkes Bildchen).

Goldbach, in seiner Antwort ([5, Brief LXIX, mars 12. 1744], [7, Brief 77]), versuchte gleich gar keine Lösung, denn „Das problema, dessen Ew. Hochedelgeb. aus den Actis Lips. Erwähnung thun, werden Sie ohne Zweifel schon solviret haben“. Aber er fand heraus, dass die Kurve „wenn sie durch eine rectam quamcunque per punctum  $F$  transeuntem in zwey Theile getheilet, und von demjenigen Theile, in welchem das punctum  $E$  stehet,

Für ein hübsches geometrisches Problem über Flächen und Winkel, das Mitte des 18ten Jahrhunderts gestellt wurde, entwickelte Euler, mit gewohnter Virtuosität und Ausdauer, ein Feuerwerk aus Formeln und Ideen. Der Autor der vorliegenden Arbeit ergänzt und diskutiert Eulers Überlegungen mit heutigen Mitteln.

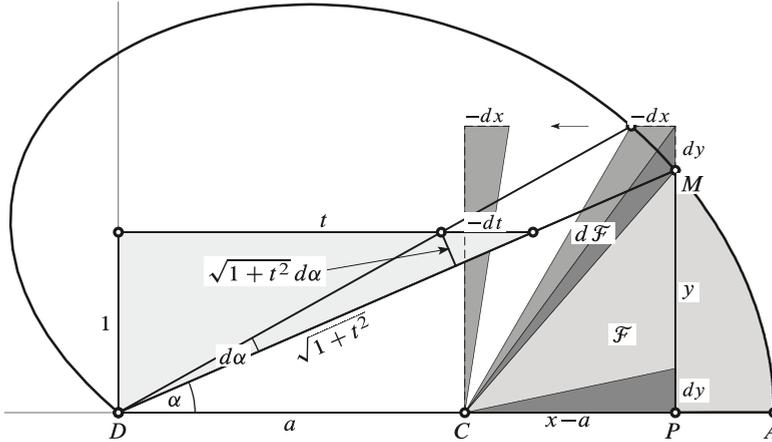


Abbildung 1. Herleitung der Gleichung (Zeichnung für den Fall  $c^2 = 1.69 \cdot a^2$ )

das triangulum rectilineum  $AEB$  abgezogen wird, das trilineum residuum  $AEB$  allezeit eine aream constantem [...] habe“ (mittleres Bildchen).

Im nächsten Brief ([5, Brief LXX, april 25. 1744], [7, Brief 78]) schrieb Euler: „Die Eigenschaft, welche Ew. Wohlgeb. von den curvis, dem in den Actis Lipsiensibus proponirten problemati satisfaciendibus, entdeckt haben, hat ihre völlige Richtigkeit [...]. Ich habe vor etwas Zeit eine ausführliche Solution darüber nach Leipzig geschickt“ (siehe [3]).

**Eulers „Solution“.** Er bezeichnet die festen Punkte als  $C$  und  $D$  mit  $DC = a$ . Er legt den Ursprung in den Punkt  $D$  und hat für einen auf der Kurve mobilen Punkt  $M$  die Koordinaten  $DP = x$ ,  $PM = y$  (Abbildung 1). Für den gesuchten Winkel lässt Eulers Gespür ihn den Arcustangens wählen, also „Ponatur  $\frac{x}{y} = t$  erit [...]  $\frac{1}{t}$  tangens anguli  $ADM$ “.

Nun ist die Forderung, dass  $\mathcal{F}$ , die Fläche  $ACM$ , zu  $\alpha$ , dem Winkel  $ADM$ , proportional sein soll, d. h., wir verlangen für ein festes  $c$ ,

$$\mathcal{F} = \frac{c^2}{2}\alpha \quad \text{oder} \quad d\mathcal{F} = \frac{c^2}{2} d\alpha \quad (1)$$

(die Wahl von  $\frac{c^2}{2}$  statt  $c$  hängt mit *homogeneitate conservanda* zusammen). Wir sehen aus der Zeichnung<sup>1</sup>, dass

$$d\alpha = \frac{-dt}{1+t^2} \quad \text{und} \quad d\mathcal{F} = \frac{1}{2}((x-a)dy - ydx). \quad (2)$$

Wenn wir beides rechts in (1) einsetzen, erhalten wir

$$ydx - xdy + a dy = \frac{c^2 dt}{1+t^2}.$$

<sup>1</sup>Erstens die beiden hellgrauen ähnlichen Dreiecke ineinander; zweitens die Summe der zwei dunkleren Dreiecke; Euler zeichnete keine kleinen Dreiecke – dies ist eher der Stil der Bernoullis – er differenzierte einfach  $\arctan \frac{1}{t}$ , das Integral  $\int_P^A y dx$  ad quam si addatur triangulum  $CPM$ .

Nun ist von den drei Variablen  $x, y, t$  eine zu eliminieren. Euler wählt  $x = yt$ , so dass  $y dx - x dy = y^2 dt$  und erhält schliesslich die einfache Form

$$a dy + y^2 dt = \frac{c^2 dt}{1+t^2} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{a} \left( \frac{c^2}{1+t^2} - y^2 \right), \quad (3)$$

welche *ad formam famosæ æquationis Riccatianæ sit referenda*. Für sie hatte Euler bereits *omnia quoque artificia* in der Tasche, welche die nächsten 20 Seiten mit Formeln füllen.

**Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.** Riccati, in [8], hatte „seine“ Differentialgleichung gefunden bei der *Reductio* von Gleichungen zweiter Ordnung auf eine Gleichung erster Ordnung; und zwar so: Man habe z. B. eine Gleichung  $\frac{d^2z}{dt^2} = f(t)z$ , welche *est adeo perplexa*, zu lösen. Eine erste Idee ist, diese Gleichung durch  $z$  zu dividieren und man erhält einen Term  $\frac{1}{z} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}$ . Dies ist einer der Terme, den man erhält, wenn man das Produkt  $y = \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dt}$  nach  $t$  differenziert. Der andere Term ist  $-\frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dz}{dt} = -y^2$ . So wird also die Gleichung zweiter Ordnung für  $z$  eine „Riccatische“ Gleichung erster Ordnung für  $y$ .

Euler geht nun gerade diesen Weg rückwärts durch die Substitution

$$y = \frac{a dz}{z dt}, \quad \text{so dass (3)} \quad a^2(1+t^2) \frac{d^2z}{dt^2} = c^2z \quad \text{ergibt,} \quad (4)$$

eben zweiter Ordnung für  $z$ , *aber linear*. Daher vorzüglich geeignet, um die Lösung als Potenzreihe anzusetzen (*ponatur*:  $z = f + gt + \alpha t^2 + \beta t^3 + \gamma t^4 + \delta t^5 + \varepsilon t^6 + \zeta t^7 + \dots$ ). Hier sind  $f$  und  $g$  freie Parameter – Euler wählt sie abwechselnd 1, 0 und 0, 1 – dann liefert Koeffizientenvergleich in (4) der Reihe nach  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  mit dem Resultat, das er in gewohnter Eulerscher Schönheit folgendermassen schreibt:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad z &= 1 + \frac{c^2}{1 \cdot 2a^2} t^2 + \frac{c^2(c^2 - 1 \cdot 2a^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4a^4} t^4 + \frac{c^2(c^2 - 1 \cdot 2a^2)(c^2 - 3 \cdot 4a^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6a^6} t^6 + \&c. \\ \text{II.} \quad z &= t + \frac{c^2}{2 \cdot 3a^2} t^3 + \frac{c^2(c^2 - 2 \cdot 3a^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a^4} t^5 + \frac{c^2(c^2 - 2 \cdot 3a^2)(c^2 - 4 \cdot 5a^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7a^6} t^7 + \&c. \end{aligned}$$

Diese Formeln sind zwar *in infinitum progrediuntur*, aber für geschickte Wahlen von  $c^2$  bricht eine der beiden Reihen ab und mit *formetur*  $y = \frac{a dz}{z dt}$ , &  $x = ty$  erhält man eine *æquatio algebraica inter x & y*.

Der erste Fall, der uns interessiert, ist  $c^2 = 1 \cdot 2a^2$  oder  $c = \sqrt{2}a$ . Hier wird die Reihe I gleich der *formam finitam*  $z = 1 + t^2$ , also

$$y = \frac{2at}{1+t^2} = \frac{2axy}{x^2+y^2} \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 2ax,$$

*quæ est pro circulo*. Dieser Fall ist nicht besonders aufregend, denn diese Eigenschaft des Kreises kannte schon Euklid (genauer: Eukl. III.20).

Interessanter ist der Fall  $c^2 = 2 \cdot 3a^2$ : Hier wird die Reihe II gleich  $z = t + t^3$ , also

$$y = \frac{a(1+3t^2)}{t+t^3} = \frac{a(y^3+3x^2y)}{x(x^2+y^2)} \quad \text{oder} \quad x^3 + xy^2 = ay^2 + 3ax^2.$$

Nach  $y^2$  aufgelöst:

$$y^2 = \frac{(3a - x)x^2}{x - a}.$$

Dass diese Kurve, welche *a Neutono in Enumeratione linearum tertii ordinis* den Namen *conchoidalis* trägt, die oben genannte Eigenschaft hat, fand Euler genügend interessant, um es Goldbach in seinem zweiten Brief mitzuteilen. Anschliessend rechnet Euler noch zwei weitere Fälle vor, abwechselnd aus *æquatio* I und *æquatio* II, die wir in der folgenden Tabelle zusammenfassen:

$$\begin{aligned} c^2 = 1 \cdot 2a^2 : & \quad x^2 + y^2 = 2ax, \\ c^2 = 2 \cdot 3a^2 : & \quad (x^2 + y^2)x = ay^2 + 3ax^2, \\ c^2 = 3 \cdot 4a^2 : & \quad (x^2 + y^2)(y^2 + 5x^2) = 12axy^2 + 20ax^3, \\ c^2 = 4 \cdot 5a^2 : & \quad (x^2 + y^2)x(3y^2 + 7x^2) = 3ay^4 + 30ax^2y^2 + 35ax^4. \end{aligned} \quad (5)$$

Auf den weiteren 14 Seiten entwickelt Euler die Reihen I und II mit gewohnter Virtuosität und Ausdauer zu immer neuen Resultaten. Zum Beispiel wird im Falle  $c^2 = 1 \cdot 2a^2$  die Reihe II gleich

$$z = t + \frac{1}{1 \cdot 3}t^3 - \frac{1}{3 \cdot 5}t^5 + \frac{1}{5 \cdot 7}t^7 - \dots = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}(1 + t^2) \arctan t$$

(denn  $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3})$ ,  $\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5})$  usw.), woraus er dann für diesen Fall eine allerdings recht komplizierte *æquatio pro omnibus curvis* für  $x$  und  $y$  erhält.

**Problematis Constructio generalis mechanica.** Trotz aller dieser Bemühungen bleiben noch Kurven übrig, diese „lassen sich durch keine Quadratur construiren“ (zweiter Brief Eulers an Goldbach) und weiter: „ich habe aber eine General-Construction per motum tractorium gegeben“; dies auf der allerletzten Seite seines Artikels ([3, § 45]). Er hatte einige Jahre früher ([2, § 6,7]) einen interessanten Zusammenhang entdeckt: Nämlich wenn  $p = \frac{dy}{dx} = \tan \varphi$  der Anstieg einer als Traktrix konstruierten Lösung ist, dann sieht man *per elementa trigonometrica*, dass  $q = \tan \frac{90^\circ - \varphi}{2}$  Lösung einer Riccatigleichung wird. Mit Hilfe eines solchen Resultates gibt er nun eine *Constructio*, um die gesuchte Kurve anhand eines Tafelwerks (*si vulgares tabulas adhibere velimus*) Punkt für Punkt zu bestimmen (*curvae quaesitæ AMB singula puncta M assignabuntur*). Wir verfolgen diesen Weg nicht weiter, denn für unsere heutigen Hilfsmittel ist eine spätere Idee Eulers besser geeignet.

**Proposita aequatione differentiali quaecunque, eius integrale completum vero proxime assignare.** Dies ist die Überschrift des § 650 von Eulers Integralrechnung [4] (1768), welcher die 250 Jahre dauernde Entwicklung von Existenzsätzen (Cauchy, Peano) und numerischen Verfahren einleitet.

Wir nehmen also eine *quaecunque* Gleichung, nämlich unsere Riccatigleichung (3), und zeichnen in Abbildung 2 (links) das durch  $\frac{dy}{dt}$  bestimmte Richtungsfeld. Die Anstiege sind entlang der Kurve  $y = \frac{c}{\sqrt{1+t^2}}$  horizontal und zeigen bei wachsendem  $y$  immer steiler nach unten. Für das *integrale completum* dürfen wir beliebige Anfangspunkte wählen, wir wählen also drei als schwarze Punkte gezeichnet. Von dort aus gehen wir in kleinen

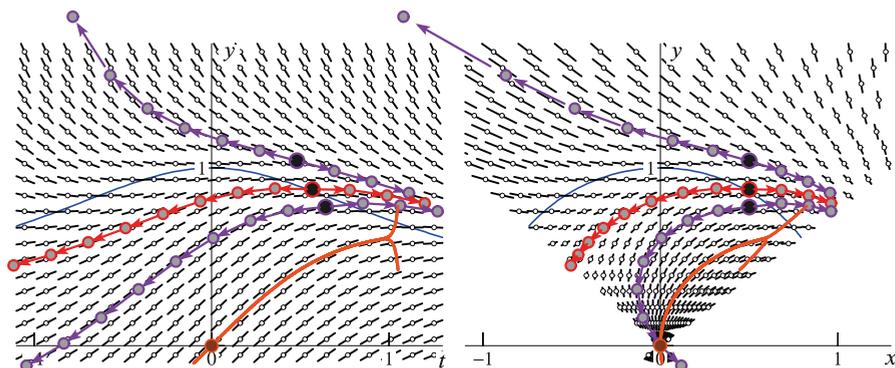


Abbildung 2. Richtungsfeld und Eulerpolygone für die Riccatigleichung (3) für  $a = c = 1$ ; in orange: die Taylorlösung (6); rechts: das Bild für  $x = y \cdot t$

Strecken nach links und rechts, jeweils der vorgeschriebenen Richtung folgend. So entstehen Polygone, welche die Lösung *proxime* darstellen. Wir beobachten, dass alle Lösungen nach rechts sich immer mehr einer einzigen Lösung annähern. Umgekehrt gehen sie nach links immer weiter auseinander, eine wird negativ, eine entschwindet ins Unendliche, nur die rote Kurve bleibt als einzige endlich und  $y > 0$ . Im Bild rechts sind dann vermittels  $x = ty$  die entsprechenden Kurven des ursprünglichen Problems gezeichnet.

**Taylor, Runge-Kutta.** Wem die Eulerpolygone zu primitiv sind, der kann die Methode *magis perficere* mit der Idee, welche Euler schon oben für die Reihen I und II bei der Gleichung (4) praktiziert hat und die er in [4, ab § 656] weiter entwickelt. Wir wenden diese Idee direkt auf die Gleichung (3) für  $a = 1$  an, am einfachsten für gegebenen Anfangswert  $y(0) = \alpha_0$ , *ponatur*:  $y = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \dots$  und entwickeln die Terme von (3) in Potenzen von  $t$ ,

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + \dots = c^2 - c^2 t^2 + c^2 t^4 - \dots - \alpha_0^2 - (\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_0) t - \dots, \quad (6)$$

woraus wir der Reihe nach  $\alpha_1 = c^2 - \alpha_0^2$ ,  $\alpha_2 = -(\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_0)/2$ , ... ausrechnen können. In Abbildung 2 ist die so entstehende Lösung für  $\alpha_0 = 0$  und  $-0.1 \leq t \leq 1.05$  mit 59 bzw. 60 Termen in oranger Farbe eingezeichnet. Wir sehen, dass es nur für kleine Werte von  $t$  gut funktioniert und dann plötzlich falsch wird. Es gab also für die Numeriker des 20ten Jahrhunderts noch einiges zu tun: ableitungsfreie Runge-Kutta-Methoden hoher Ordnung entwickeln, Fehlerabschätzung, Schrittweitenkontrolle. Mit einer der besten dieser Methoden (Dormand und Prince 1980, siehe [6, S. 178, 477], [www.unige.ch/~hairel/prog/nonstiff/dopri5.f](http://www.unige.ch/~hairel/prog/nonstiff/dopri5.f)) rechnen wir mit grosser Genauigkeit *vero praecise assignare* auf langen Intervallen die Lösungen  $y(t)$  der Riccatigleichung (3) (siehe Abbildung 3, oben) und im unteren Bild die entsprechenden Lösungen des ursprünglichen Problems. Wir haben zu den vier Lösungen in violett, rot und orange der Abbildung 2 noch ein Paar blauer und ein Paar schwarzer Kurven hinzugefügt.

**Die Separatrix.** Der Computer kann uns nicht helfen, die Grenzkurve für  $t \rightarrow \pm\infty$  zu finden. Hier rechnen wir analytisch, indem wir in (3)  $\frac{c^2}{1+t^2}$  durch  $\frac{c^2}{t^2}$  ersetzen. Man sieht,

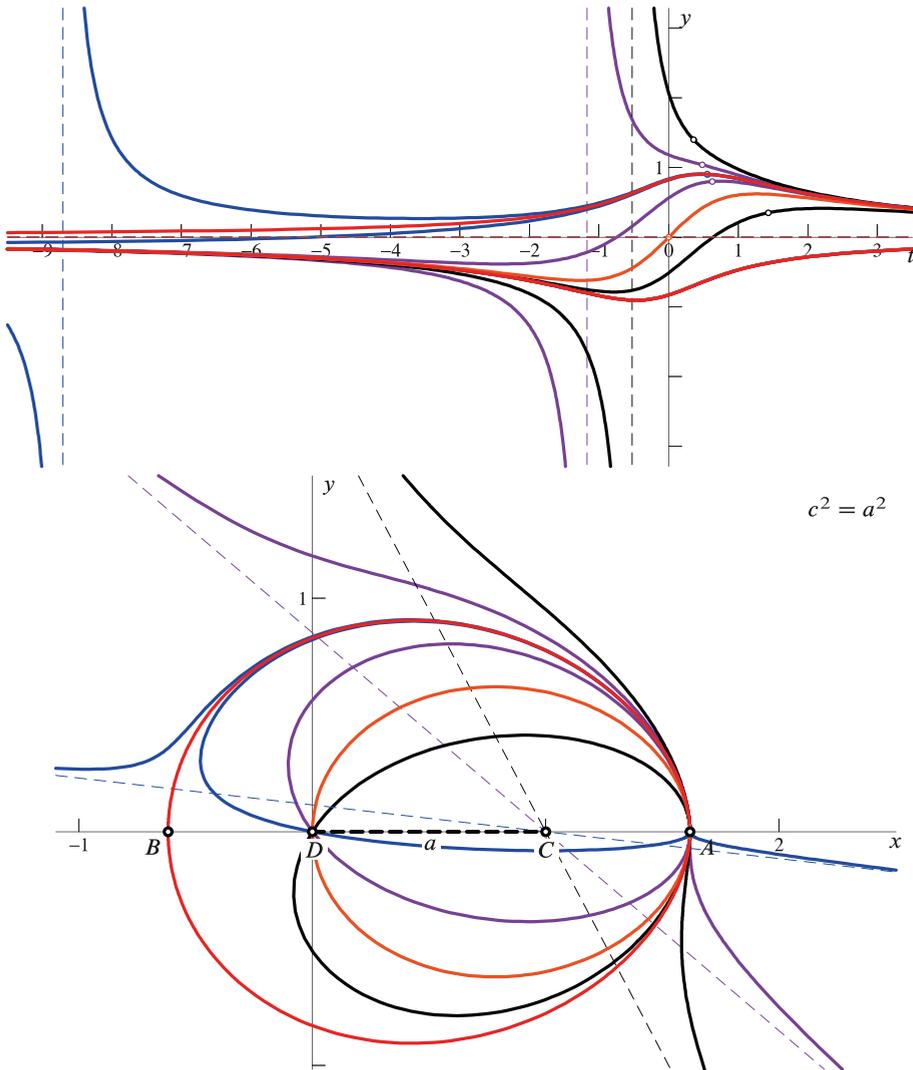


Abbildung 3. Lösungskurven (oben: der Riccatigleichung (3) für  $c^2 = a^2$ ; unten: des ursprünglichen Problems)

dass  $y = \frac{K}{t}$  Lösung ist, falls

$$K^2 - aK - c^2 = 0 \quad \text{also} \quad K_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + c^2}. \quad (7)$$

Der grössere Wert  $K_1$  entspricht den stabilen Lösungen für  $t \rightarrow \infty$  und  $y > 0$  als auch  $t \rightarrow -\infty$  und  $y < 0$ . Der kleinere Wert  $K_2$  ist für die instabile (rote) Lösung für  $t \rightarrow -\infty$  und  $y > 0$  und symmetrisch  $t \rightarrow \infty$  und  $y < 0$ . Die entsprechenden Kurven in der unteren Abbildung gehen von einem festen Punkt  $A$  mit Koordinate  $K_1$  zu einem Punkt  $B$  mit

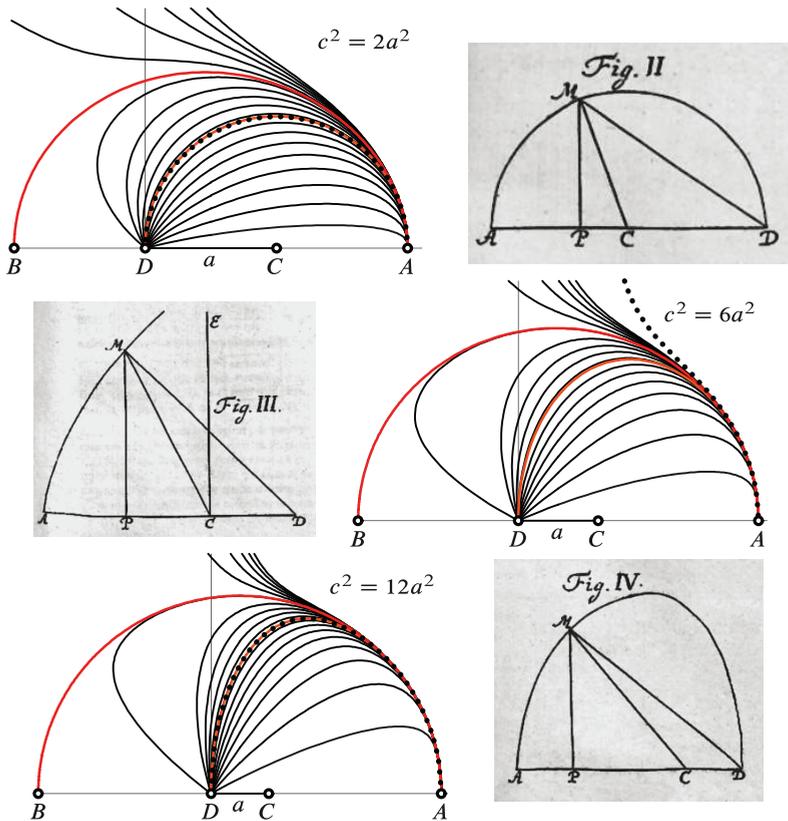


Abbildung 4. Lösungskurven für  $c^2 = 1 \cdot 2a^2, 2 \cdot 3a^2, 3 \cdot 4a^2$  (punktiert Eulers Lösung in (5)); mit Eulers Bildern aus [3] (Euler zeichnete die  $x$ -Achse nach links)

Koordinate  $K_2$ . Man nennt sie eine *Separatrix*. Es ist noch bemerkenswert (falls das 1001te Vorkommen dieses Phänomens in der Mathematik noch gefehlt hat), dass im Falle  $c^2 = a^2$  der Punkt  $C$  die Strecke  $DA$ , oder auch der Punkt  $D$  die Strecke  $CB$ , im *goldenen Schnitt* teilt.

**Äussere Lösungen.** Für Anfangswerte oberhalb dieser Kurve streben die Lösungen für endliches  $t_1$  nach Unendlich (in Abbildung 3 sind, von oben rechts nach links, drei solcher Kurven in schwarz, violett und blau gezeichnet). Dies erkennt man, wenn man kurz vor der Singularität in (3) den Term  $\frac{c^2}{1+t^2}$  durch eine Konstante  $q^2$  ersetzt und die Gleichung durch Separation der Variablen löst. Hinter dieser Singularität kommt die Lösung aus  $-\infty$  zurück und strebt für  $t \rightarrow -\infty$  zur stabilen Lösung  $\frac{K_1}{t}$ , d. h., kommt im unteren Bild von unten zum Punkt  $A$ . Zusammen mit der ursprünglichen Kurve bildet diese eine Art Muschel, deren gemeinsame Asymptote mit Anstieg  $\frac{1}{t_1}$  durch den Punkt  $C$  geht. Eulers Lösungen aus (5) für  $c^2 = 6a^2$  und  $c^2 = 20a^2$  sind solche Kurven (*erit curvae asymptotos*).

**Innere Lösungen.** Alle Lösungen von (3) unterhalb der Separatrix durchqueren die  $y$ -Achse und streben zur selben Lösung  $\frac{K_1}{t}$ , d. h. durchqueren im unteren Bild ohne Knick den Punkt  $D$  und kehren zum Punkt  $A$  zurück (vier solche Lösungen sind, von oben nach unten, blau, violett, orange und schwarz gezeichnet). Sie bilden also Ovale.

**Flächen.** Bei allen Lösungen im oberen Bild von Abbildung 3 geht  $t$ , der Kotangens des Winkels  $ADM$ , von  $+\infty$  nach  $-\infty$ . Also durchläuft der Winkel  $ADM$  im unteren Bild alle Werte von 0 bis  $\pi$ . Deshalb folgt aus (1), dass alle obigen Ovale, alle obigen Muscheln zwischen den Kurven und der Asymptote, sowie die Hälfte des von der Separatrix gebildeten Ovals von  $A$  nach  $B$ , die Fläche  $\mathcal{F} = \frac{c^2\pi}{2}$  besitzen.

Bei grösseren Werten für  $c^2$  ändert sich an den Stabilitätsverhältnissen von (3) nichts, nur werden die Kurven, bezüglich der Strecke  $DC$ , immer grösser. Einige Beispiele, zusammen mit Eulers Lösungen aus (5) und Eulers Bildern aus [3], sind in Abbildung 4 zusammengestellt.

Der Punkt  $B$ , der zum Punkt  $A$  bezüglich dem Punkt  $\frac{a}{2}$  symmetrisch liegt (wegen (7)), ist ein *Sattelpunkt*. Die roten Kurven heissen – und jetzt sind wir bei der englischen Sprache angelangt – *heteroclinic orbits*.

**Danksagung.** Vielen Dank an Philippe Henry für mannigfache Hilfe und Hinweise; er hatte zusammen mit mir vor einiger Zeit ein Vorlesungsmanuskript über Euler ausgearbeitet. Dank an Christian Aebi für die Briefe [7] und an Raphael Muhr, der eine frühere Version gelesen und kommentiert hat.

## Literaturverzeichnis

- [1] Anonym, Problema, ad quod evolendum Geometrae invitantur, *Nova Acta Erud.* (1743), 659–660.
- [2] L. Euler, De constructione aequationum ope motus tractorii aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibus, *Comm. Acad. Sci. Petropolitanae* **8** (1741), 66–85; *Opera Omnia* Ser. 1, Vol. 22, 83–107, E51.
- [3] L. Euler, Solutio problematis in Novorum Actorum Eruditorum mense novembri A. 1743 propositi, *Nova Acta Erud.* (1744), 315–336; *Opera Omnia* Ser. 1, Vol. 27, 29–49, E75.
- [4] L. Euler, *Institutionum calculi integralis. Volumen primum*, Petropolis, 1768; *Opera Omnia* Ser. 1, Vol. 11, E342.
- [5] P. H. Fuss, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*, St.-Pétersbourg, 1843.
- [6] E. Hairer, S. P. Nørsett and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*, 2nd ed., Springer, Berlin, 1993.
- [7] A. P. Juškevič and E. Winter (ed.), *Leonhard Euler und Christian Goldbach, Briefwechsel 1729–1764*, Akademie-Verlag Berlin, 1965.
- [8] J. Riccati, Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus, *Acta Eruditorum Lipsiae. Supplementa* **8** (1724), 66–73; English transl.: Ian Bruce 2007.

Gerhard Wanner  
 37, chemin des Pinsons  
 1226 Thônex, Switzerland  
[gerhard.wanner@unige.ch](mailto:gerhard.wanner@unige.ch)