Elemente der Mathematik 77 (2022), 94–100
DOI 10.4171/EM/438

Sur un article d'Euler, prématuré bien que posthume

Manuel Ojanguren

Manuel Ojanguren est né au Tessin en 1940, a fait des études de mathématiques et de physique à l'EPF de Zurich, puis de longs séjours au Tata Institute de Bombay (où il s'est marié avec Katia), à l'Institut Battelle de Genève et à la Queen's University de Kingston (où est né son fils Andrea). En 1974 il est devenu Staatsbeamter auf Lebenszeit (fonctionnaire à perpétuité) pour la Westfälische Wilhelms-Universität de Münster, mais en 1977 il est rentré en Suisse et a enseigné l'algèbre à Lausanne, d'abord à l'Université, puis à l'EPFL. En 2005 il a pris sa retraite. Depuis, il a oublié beaucoup de choses sur les variétés algébriques, la cohomologie et les suites spectrales, mais il en a apprises d'autres sur les cercles et les triangles.

Euler

Dans un article rédigé en 1779 [3], Euler démontra que

$$\arctan\left(\frac{x}{2-x}\right) = A(x) + B(x) + C(x) \tag{1}$$

Ennio de Giorgi – bekannt dafür, das 19. Hilbertsche Problem gelöst zu haben – pflegte zu sagen: „chi cerca trova, chi ricerca ritrova". Manchmal treffen Sprichworte wörtlich zu. In der Tat werden nicht selten alte Ergebnisse, die trotz ihres Interesses völlig in Vergessenheit geraten waren, nochmals gefunden. An Beispielen mangelt es nicht, und einige sind sogar recht bekannt. So veröffentlichte Harold Davenport 1935 ein von Cauchy 1813 erzieltes Ergebnis. Lorenzo Mascheronis berühmter Satz von 1797 über geometrische Konstruktionen mit dem Zirkel war bereits 1672 von Jørgen Mohr entdeckt worden. Und es passierte auch Pólya, denn sein Abzähltheorem von 1937 war schon 1927 von John Howard Redfield veröffentlicht worden. In dem nun hier zur Diskussion stehenden Fall vergingen 216 Jahre zwischen der Entdeckung bestimmter Reihen und ihrer Wiederentdeckung. Die von Euler gefundenen Reihen (die er nicht weiter verfolgte) eignen sich heute perfekt zur binären Berechnung der Zahl π mit Computern: Die Wiederentdeckung erfolgte also just zur rechten Zeit.

où

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}\left(\frac{x^4}{4}\right)^n\\
B(x) &= \frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+2}\left(\frac{x^4}{4}\right)^n\\
C(x) &= \frac{x^3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+3}\left(\frac{x^4}{4}\right)^n.
\end{aligned}
$$

En choisissant $x = 1$ il obtint d'abord la jolie formule

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1}+\frac{2}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}\right). \tag{2}$$

En plus de sa beauté, un des charmes de cette formule c'est qu'elle permet de calculer le n-ème chiffre du développement en base 2 de π en utilisant très peu de mémoire. En fait, la mémoire nécessaire croît proportionnellement au logarithme de n. A ce propos, on lit parfois qu'elle permettrait de calculer le n-ème chiffre *sans calculer les précédents!* Si cette possibilité vous étonne, je vous invite à faire une addition en colonnes et à regarder l'ordre d'apparition des chiffres du résultat.

Dans son article, Euler donne une deuxième application de (1). En insérant les formules données par $x = 1/2$ et $x = 1/4$ dans la relation

$$\pi = 8\arctan(1/3) + 4\arctan(1/7),$$

il obtient la formule plus impressionnante

$$
\begin{aligned}
\pi &= 8\big(A(1/2)+B(1/2)+C(1/2)\big) + 4\big(A(1/4)+B(1/4)+C(1/4)\big)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{6n}}\left(\frac{2}{4n+1}+\frac{2^{-1}}{2n+1}+\frac{2^{-2}}{4n+3}\right)\\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{10n}}\left(\frac{2^{-1}}{4n+1}+\frac{2^{-4}}{2n+1}+\frac{2^{-6}}{4n+3}\right).
\end{aligned}
$$

La démonstration de (1) est très simple. On remarque que

$$
\begin{aligned}
\arctan\frac{x}{2-x} &= \int_0^x \frac{dt}{2-2t+t^2} = \int_0^x \frac{2+2t+t^2}{4+t^4}dt\\
&= \int_0^x \frac{2dt}{4+t^4} + \int_0^x \frac{2t\,dt}{4+t^4} + \int_0^x \frac{t^2dt}{4+t^4};
\end{aligned}
$$

en remplaçant

$$\frac{1}{4+t^4} \quad \text{par} \quad \frac{1}{4}\sum_0^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t^4}{4}\right)^n$$

et en intégrant terme à terme on obtient la formule (1).

Deux siècles plus tard

L'article de 1779 fut publié en 1793 – dix ans après la mort d'Euler. Je n'ai pas l'impression qu'il suscita beaucoup d'intérêt. Que je sache, même le journal local – le *Sankt-Peterburgskie Vedomosti* – n'en pipa mot. Sans doute, les contemporains d'Euler n'avaient pas bien compris l'intérêt des calculs en base 2. Ainsi, les formules trouvées par Euler furent complètement oubliées pendant plus de deux siècles. Ce n'est qu'en 1995 que (2) réapparut, accompagnée de sa grande sœur

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right). \tag{3}$$

Cette fois, le *Globe and Mail* du 18 octobre – plus attentif aux nouvelles scientifiques que le *Vedomosti* – annonça la découverte. La méthode utilisée pour découvrir (3) est expliquée dans l'article de Bailey, Borwein et Plouffe [1]. En gros, on calcule avec grande précision – disons à moins de 10^{-100} – la somme de quelques séries $S_1, S_2, \dots, S_r$, puis on cherche – avec un logiciel ad hoc – de petits entiers (non tous nuls) $a_0, a_1, \dots, a_r$ tels que

$$a_0\pi + a_1S_1 + \cdots + a_rS_r$$

soit très petit, de l'ordre de 10^{-100}. Il est alors très probable que

$$a_0\pi + a_1S_1 + \cdots + a_rS_r = 0$$

soit une identité. Si $a_0 \neq 0$ on a trouvé une représentation de π comme combinaison linéaire de $S_1, \dots, S_n$. Bien sûr, il faut encore démontrer que la relation est vraie et non seulement vraisemblable. (Disons en passant que pour illustrer la différence entre vrai et vraisemblable rien ne vaut le stupéfiant article de Hanspeter Schmid [4].)

Euler, qui n'avait pas d'ordinateur, aurait-il pu la découvrir ? Très facilement, je crois.

En amplifiant par $4 - t^4$ les fractions dans (1) on obtient, pour $x = 1$,

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{8 + 8t + 4t^2 - 2t^4 - 2t^5 - t^6}{16 - t^8}dt \tag{4}$$

puis, en développant selon les puissances de $t^8/16$, on trouve

$$\pi = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{8}{8n+1} + \frac{8}{8n+2} + \frac{4}{8n+3} - \frac{2}{8n+5} - \frac{2}{8n+6} - \frac{1}{8n+7}\right). \tag{5}$$

Bien évidemment, ce qu'on a obtenu n'est que la série (2) réécrite en groupant ses termes deux à deux, ce qui n'est pas très malin. Mais – comme Euler aurait sans doute remarqué –

$$\int_0^1 \frac{(1-t)dt}{2 - 2t + t^2} = \frac{1}{2}\log 2 = \int_0^1 \frac{t\,dt}{2 - t^2},$$

d'où, en réécrivant les deux fractions avec $16 - t^8$ comme dénominateur,

$$\int_0^1 \frac{8 - 4t^2 - 4t^3 - 2t^4 + t^6 + t^7}{16 - t^8}dt = \int_0^1 \frac{8t + 4t^3 + 2t^5 + t^7}{16 - t^8}dt.$$

En soustrayant une intégrale de l'autre on obtient,

$$\int_0^1 \frac{8 - 8t - 4t^2 - 8t^3 - 2t^4 - 2t^5 + t^6}{16 - t^8} dt = 0. \tag{6}$$

L'addition de (4) avec (6) donne

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{16 - 8t^3 - 4t^4 - 4t^5}{16 - t^8} dt. \tag{7}$$

A ce point, on développe la fraction selon les puissances de $t^8/16$, on intègre la série obtenue terme à terme et on voit apparaître la formule (3).

L'article de Bailey, Borwein, et Plouffe va bien au delà des deux séries (2) et (3) et démontre la représentabilité de plusieurs constantes par des séries analogues, de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \frac{1}{B^n}$$

où P et Q sont des polynômes à coefficients entiers et B est un entier ≥ 2. Ces séries sont dites – à juste raison – *de type BBP*.

De nos jours, l'article d'Euler semble avoir été frappé de *damnatio memoriae*. Parmi les articles sur les séries BBP que j'ai consultés, aucun ne le cite.

Une déception

On peut avoir la tentation de multiplier numérateur et dénominateur de (7) par $16+t^8$ pour obtenir une série dans laquelle apparaissent les puissances de $1/256$, puis de $1/65536$ et ainsi de suite. Mais ceci n'aurait aucun intérêt, à moins qu'il n'existe des généralisations de la relation (6) qui permettent de diminuer le nombre de termes des numérateurs. C'est bien triste, mais toutes les relations possibles sont des conséquences de (6). Plus précisément :

Théorème. *Soit $n \geq 2$ un entier, $P(t)$ un polynôme à coefficients rationnels, de degré inférieur à 2^{n+1} et*

$$F(t) = \frac{P(t)}{2^{2^n} - t^{2^{n+1}}}.$$

Si $\int_0^1 F(t)dt = 0$, alors

$$F(t) = c\frac{8 - 8t - 4t^2 - 8t^3 - 2t^4 - 2t^5 + t^6}{16 - t^8}$$

où c est un nombre rationnel.

Pour démontrer cette assertion on peut se servir d'un célèbre résultat de Alan Baker [2, ch. 2] sur les logarithmes des nombres algébriques, résultat que je rappelle ici sous une forme bien plus faible que la version originale. (Je rougis en utilisant un si beau résultat pour une si modeste besogne.) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres algébriques différents de

0. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des logarithmes de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, c'est-à-dire des nombres complexes tels que, pour $1 \leq j \leq n$, $e^{\lambda_j} = \alpha_j$. Supposons que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ soient linéairement indépendants sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Alors – dit le théorème de Baker – ils sont aussi linéairement indépendants sur le corps $\mathbb{A}$ des nombres algébriques.

Démontrons d'abord un corollaire du théorème de Baker.

Proposition. *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comme ci-dessus. Soit V l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ des $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n$ tels que $\sum_i x_i \lambda_i = 0$. Soit W l'espace vectoriel sur $\mathbb{A}$ des $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{A}^n$ tels que $\sum_i y_i \lambda_i = 0$. Alors $W = \mathbb{A}V$.*

Preuve. Supposons que W soit plus grand que $\mathbb{A}V$ et soit w un vecteur de W qui n'est pas dans $\mathbb{A}V$ et qui a le plus petit nombre possible de coordonnées non nulles. Nous pouvons supposer que $w = (z_1, \ldots, z_m, 0, \ldots, 0)$, avec $m \leq n$ et $z_1, \ldots, z_m$ tous différents de 0. La minimalité de m assure que toute relation $\mathbb{A}$-linéaire entre les m nombres λ_j est un multiple de w. Par le théorème de Baker, ces nombres sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$. Il faut donc que la relation de dépendance sur $\mathbb{Q}$ soit un multiple de w, ce qui revient à dire que $w \in \mathbb{A}V$.

Passons maintenat à la démonstration du théorème. Soit $d = 2^{n+1}$ et $\zeta = \exp 2\pi i/d$. On peut décomposer $F(t)$ en fractions partielles

$$F(t) = \frac{A_0}{\sqrt{2} - t} + \frac{A_1}{\sqrt{2}\zeta - t} + \cdots + \frac{A_{d-1}}{\sqrt{2}\zeta^{d-1} - t}.$$

où A_0, A_1,..., A_{d-1} sont des nombres algébriques. En intégrant $F(t)$ de $t = 0$ à $t = 1$ on obtient

$$0 = \int_0^1 F(t)dt = A_0\lambda_0 + A_1\lambda_1 + \cdots + A_{d-1}\lambda_{d-1} \tag{8}$$

où, pour $0 \leq j \leq d-1$,

$$\lambda_j = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2}\zeta^j - t}$$

est un logarithme de

$$\beta_j = \frac{\sqrt{2}\zeta^j}{\sqrt{2}\zeta^j - 1}.$$

D'après la proposition ci-dessus, les relations à coefficients algébriques entre les nombres λ_j sont des conséquences des relations à coefficients rationnels, qu'on peut même supposer entiers. Nous n'avons plus qu'à chercher les relations entières

$$n_0\lambda_0 + n_1\lambda_1 + \cdots + n_{d-1}\lambda_{d-1} = 0, \quad n_0, n_1, \ldots, n_{d-1} \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

entre les nombres λ_j. Commençons par déterminer les relations

$$\beta_0^{n_0}\beta_1^{n_1}\cdots\beta_{d-1}^{n_{d-1}} = 1 \tag{10}$$

qui s'en déduisent en appliquant la fonction exponentielle à (9). Soit, pour tout j entre 0 et $d-1$,

$$\gamma_j = \sqrt{2}\zeta^j - 1$$

le dénominateur de β_j et écrivons la relation (10) sous la forme

$$\gamma_0^{n_0}\gamma_1^{n_1}\cdots\gamma_{d-1}^{n_{d-1}} = \sqrt{2}^{\sum n_j}\zeta^{\sum jn_j} \tag{11}$$

Entre 0 et $d-1$ il y a exactement quatre valeurs de j pour lesquelles γ_j est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}[\zeta]$ des entiers algébriques de $\mathbb{Q}(\zeta)$: $\gamma_0 = \sqrt{2}-1$, $\gamma_{d/2} = -\sqrt{2}-1$, $\gamma_{d/8} = i$ et $\gamma_{7d/8} = -i$. Il est évident que $\gamma_{3d/8} = i-2$ et $\gamma_{5d/8} = -i-2$ ne sont pas inversibles et divisent 3. De même, $\gamma_{d/4} = i\sqrt{2}-1$ et $\gamma_{3d/4} = -i\sqrt{2}-1$ ne sont pas inversibles et divisent 5. Supposons maintenant que j soit un multiple impair de $d/2^k$ pour un $k \geq 4$, autrement dit, que l'ordre de ζ^j soit une puissance de 2 supérieure à 8. En ce cas, le polynôme minimal de γ_j est

$$(X+1)^{2^{k-1}} + 2^{k-2}$$

et le produit des conjugués de γ_j sera le terme constant de ce polynôme, c'est-à-dire le nombre de Fermat $2^{2^{k-2}}+1$. Ceci montre que γ_j n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}[\zeta]$ et qu'il divise un nombre impair. Si les indices j et l sont différents,

$$\gamma_j - \gamma_l = \sqrt{2}\zeta^l(\zeta^{j-l}-1)$$

divise $2\sqrt{2}$ car $\xi = \zeta^{j-l}$ est une racine de 1 d'ordre 2^k pour un $k \geq 1$ et $\xi - 1$ divise $1-\xi^{2^{k-1}} = 2$. Les deux nombres γ_j et γ_l sont donc copremiers dans $\mathbb{Z}[\zeta]$. Comme tous les γ_j sont premiers à $\sqrt{2}$, l'égalité (11) ne peut avoir lieu que si $n_j = 0$ sauf pour les quatre valeurs de j telles que $\gamma_j \in \mathbb{Z}[\zeta]^*$. La résolution de (11) se réduit ainsi à la détermination des quatre entiers $p = n_0$, $q = n_{d/2}$, $r = n_{d/8}$ et $s = n_{7d/8}$ tels que

$$(\sqrt{2}-1)^p(-\sqrt{2}-1)^q i^r(-i)^s = \sqrt{2}^{p+q+r+s}\zeta^{qd/2+rd/8+7sd/8}. \tag{12}$$

En tenant compte du fait que $\zeta^{d/8} = (1+i)/\sqrt{2}$ cette dernière équation donne

$$(\sqrt{2}-1)^{p-q}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{r-s} = \sqrt{2}^{p+q+r+s}.$$

Pour que le premier membre soit réel et positif comme le deuxième, il faut que $r = s+8w$, $w \in \mathbb{Z}$. Ensuite, comme $\sqrt{2}$ est un premier de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et $\sqrt{2}-1$ est une unité d'ordre infini de ce même anneau, il faut que $p = q$ et que $p+q+r+s = 0$. On obtient ainsi $r = s+8w$, $p = q = -s-4w$. Avec ces valeurs on a

$$\int_0^1 F(t) = (-s-4w)\lambda_0 + (-s-4w)\lambda_{d/2} + (s+8w)\lambda_{d/8} + s\lambda_{7d/8}.$$

Le calcul explicite des quatre λ_j donne

$$\int_0^1 F(t) = -2\pi i w.$$

On conclut que w doit être nul et que les seules relations à coefficients algébriques entre les λ_j sont – par la proposition déduite du théorème de Baker – les multiples algébriques de

$$-\lambda_0 - \lambda_{d/2} + \lambda_{d/8} + \lambda_{7d/8}.$$

La fonction $F(t)$, ayant des coefficients rationnels, doit donc être un multiple rationnel de

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\sqrt{2}-t} - \frac{1}{-\sqrt{2}-t} + \frac{1}{1+i-t} + \frac{1}{1-i-t} \\ &\quad = 2\frac{2-4t+t^2}{4-4t+2t^3-t^4} = 2\frac{8-8t-4t^2-8t^3-2t^4-2t^5+t^6}{16-t^8}. \end{aligned}$$

Le théorème est démontré. Il semblerait donc (Euler le pensait-il aussi ?) qu'il n'y a plus grand chose à tirer de son article et qu'il sera oublié de nouveau.

Références

[1] David H. Bailey, Peter B. Borwein, and Simon Plouffe : On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants. Mathematics of Computation 66 (1997) 903–913.

[2] Alan Baker : *Transcendental number theory.* Cambridge University Press, London-New York, 1975. x+147 pp.

[3] Leonhard Euler : De novo genere serierum rationalium et valde convergentium quibus ratio peripherie ad diametrum esprimi potest (Conventui exhibita die 17 Iunii 1779). Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 11 (1793) 150–154 (Opera omnia, Series I, vol. 16, pp. 21–27).

[4] Hanspeter Schmid : Two curious integrals and a graphic proof. Elem. Math. 69 (2014) 11–17.

Manuel Ojanguren
EPFL SB-DO
MA A1 365
Station 8
CH-1015 Lausanne
e-mail : `manuel.ojanguren@epfl.ch`