Elemente der Mathematik 77 (2022), 101–104
DOI 10.4171/EM/478

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2022 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Aufgabe 1422: Seien w_a, w_a und w_c die Längen der Winkelhalbierenden eines Dreiecks mit Fläche F. Beweise, dass

$$w_a w_b + w_b w_c + w_c w_a \geq 3\sqrt{3}F$$

gilt – mit Gleichheit nur für das gleichseitige Dreieck.

Albert Stadler, Herrliberg, CH

Aufgabe 1423: Beweise, dass

$$\left\lfloor \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{n^2 + k} \right\rfloor = 2n + 1$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt, wobei $\lfloor x \rfloor$ den ganzzahligen Teil der Zahl x bezeichnet.

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BIH und Mihály Bencze, Brașov, RO

Aufgabe 1424 (Die einfache dritte Aufgabe): Die regulären 2×2-Matrizen über dem Körper $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ (Rechnen modulo 2) bilden eine multiplikative Gruppe. Zu welcher wohlbekannten Gruppe ist diese isomorph? Man finde dazu auch mindestens einen geeigneten Isomorphismus.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2021

Aufgabe 1410. Im Einheitskreis K werden zufällig 3 Punkte A, B, C gewählt, d. h. unabhängig voneinander und gleichmässig verteilt ($P(A \in H) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Fl}(H)$ für $H \subset K$, wobei $\mathrm{Fl}(H)$ den Flächeninhalt von H bezeichnet).

(a) Man berechne den Erwartungswert des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Dreieck ABC stumpfwinklig?

Henri Carnal, Bern, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Zu dieser Aufgabe ist nur von *Albert Stadler* eine vollständige Lösung eingetroffen. Aus Platzgründen verschieben wir die Publikation der Lösung auf die nächste Ausgabe.

Aufgabe 1411. Für $n \geq 2$ sei $A(x_1, \ldots, x_n)$ das arithmetische, $H(x_1, \ldots, x_n)$ das harmonische und $G(x_1, \ldots, x_n)$ das geometrische Mittel der n positiven Zahlen $x_1, \ldots, x_n$. Man beweise

$$A(x_1, \ldots, x_n) + H(x_1, \ldots, x_n) \geq \sqrt[n]{(n-1)^2}\Big(1 + \frac{1}{(n-1)^2}\Big)G(x_1, \ldots, x_n).$$

Frieder Grupp, Schweinfurt, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 7 Lesern sind Zuschriften eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Während eine direkte Herleitung der Ungleichung schwierig scheint, führen analytische Mittel mehr oder weniger direkt zum Ziel. Wir folgen den Ausführungen von *Bernhard Ruh*, der wie auch andere die Aufgabe als Extremalwertaufgabe mit Nebenbedingung behandelt.

Die Ungleichung ist homogen. Wir setzen daher o. B. d. A. $G(x_1, \ldots, x_n) = 1$ und suchen das Minimum der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n) + H(x_1, \ldots, x_n)$ unter der Nebenbedingung $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Wir verwenden dabei den Lagrange-Mulitplikator. Sei also

$$g(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n) + H(x_1, \ldots, x_n) - \lambda(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n - 1).$$

Notwendige Bedingungen für ein Minimum liefern die ersten Ableitungen

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{1}{n} + \frac{n}{x_i^2(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n})^2} - \lambda \underbrace{x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_n}_{1/x_i} = 0.$$

Nach Multiplikation mit nx_i^2 erhält man

$$x_i(x_i - n\lambda) + H^2 = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

beziehungsweise nach Elimination von H^2,

$$(x_1 - x_i)(x_1 + x_i - n\lambda) = 0, \quad 2 \le i \le n.$$

Wir unterscheiden jetzt die zwei Fälle, dass alle x_i gleich sind oder dass sie genau zwei verschiedene Werte $x = x_1$ und $y \neq x$ annehmen mit $x + y = n\lambda$.

Im ersten Fall ist $x_1 = \cdots = x_n = 1$ und somit $f(1, \ldots, 1) = 2$.

Im zweiten Fall werde k-mal ($1 \le k \le n-1$) der Wert x und $n-k$-mal der Wert y angenommen. Das Gleichungssystem reduziert sich dann auf

$$x(x - n\lambda) + \frac{n^2}{\left(\frac{k}{x} + \frac{n-k}{y}\right)^2} = 0, \quad x + y = n\lambda, \quad x^k y^{n-k} = 1,$$

oder nach Elimination von λ auf

$$(y - x)\Big(y - \frac{(n-k)^2}{k^2}x\Big) = 0, \quad x^k y^{n-k} = 1.$$

Wegen $y \neq x$ folgt $y = \left(\frac{n-k}{k}\right)^2 x$ und unter Benutzung von $x^k y^{n-k} = 1$ erhält man nach einer kurzen Berechnung den Funktionswert

$$f(\underbrace{x, \ldots, x}_{k\text{-mal}}, \underbrace{y, \ldots, y}_{n-k\text{-mal}}) = h(k) = \left(\left(\frac{n-k}{k}\right)^2 + 1\right)\left(\frac{k}{n-k}\right)^{\frac{2(n-k)}{n}}.$$

Weil $h(k)$ im Bereich $0 < k < \frac{n}{2}$ monoton wachsend ist, wie wir unten zeigen werden, ergibt sich der kleinste Wert mit natürlichem Argument für $k = 1$. Nun ist

$$h(1) = ((n-1)^2 + 1)\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{2(n-1)}{n}} = \left(1 + \frac{1}{(n-1)^2}\right)(n-1)^{\frac{2}{n}}.$$

Bezeichnen wir den letzten Ausdruck mit $c(n)$, so ist $c(2) = 2$ und, wie mithilfe der Ableitung leicht gezeigt werden kann, ist $c(n)$ monoton fallend, also $c(n) < 2$ für $n > 2$. Also ist in jedem Fall $c(n)$ das absolute Minimum von f. Gleichheit ergibt sich z. B. für $(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{(n-1)^2}, 1, \ldots, 1\right)$. Dies beweist die Ungleichung und deren Schärfe.

Bleibt noch die Monotonie von $h(k)$ einzusehen. Wir standardisieren $h(k)$ durch $k = \frac{n}{2}(1 - x)$ und erhalten die handlichere Funktion

$$s(x) = 2\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^x, \quad -1 < x < 1.$$

Eine Ableitungsübung liefert

$$s'(x) = 2\frac{2x - (x^2 + 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{1 - x^2}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^x.$$

Mit der bekannten Reihenentwicklung $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots > 2x$ für $x > 0$ folgert man, dass $s'(x)$ negativ für $x > 0$ ist, und wegen der Symmetrie ist $s'(x)$ positiv für $-1 < x < 0$. Damit ist $h(k)$ im Bereich $0 < k < \frac{n}{2}$ monoton wachsend.

Aufgabe 1412 (Die einfache dritte Aufgabe). Man bestimme die Summe aller dreistelligen Zahlen mit drei verschiedenen Ziffern.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 13 Lesern sind Zuschriften eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Philipp E. Imhof (Oberbuchsiten, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), André Kiener (Oberdorf SO, CH), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Lösungen unterscheiden sich hauptsächlich dadurch, ob die Summe direkt bestimmt wird, oder ob man die 0 als Hunderterziffer zunächst auch zulässt. Wir folgen den Ausführungen von *Walter Burgherr*, der das sehr prägnant ausdrückt.

Es gibt $10 \cdot 9 \cdot 8$ Variationen aus den Ziffern 0 bis 9. Da an jeder Stelle alle Ziffern gleich häufig vorkommen, ist ihre Summe

$$S = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10}(0 + 1 + 2 + \cdots + 9) \cdot 111 = 359\,640.$$

Darunter sind auch $9 \cdot 8$ zweistellige Zahlen mit von 0 verschiedenen, ungleichen Ziffern mit der Summe

$$T = \frac{9 \cdot 8}{9}(1 + 2 + \cdots + 9) \cdot 11 = 3960.$$

Die Summe der dreistelligen Zahlen ist $S - T = 359\,640 - 3960 = 355\,680$.