Elemente der Mathematik 77 (2022), 146–152
DOI 10.4171/EM/483

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2023 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Aufgabe 1425: Die Folge $Q_0(x), Q_1(x), \ldots$ von Polynomen sei rekursiv definiert durch $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) + nQ_{n-1}(x)$ für $n \geq 1$. Man beweise:

(a) Wird $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} x^k$ gesetzt, so gilt

$$b_{2k}^{(2n)} = \binom{n}{k} \prod_{r=1}^{n-k} (2n - 2r + 1) \quad \text{und} \quad b_{2k+1}^{(2n+1)} = \binom{n}{k} \prod_{r=0}^{n-k-1} (2n - 2r + 1).$$

(b) Die Nullstellen der Polynome $Q_n(x)$ ($n \geq 1$) sind einfach und liegen alle auf einer Geraden. Die Nullstellen von $Q_n(x)$ und $Q_{n+1}(x)$ trennen sich, d. h., zwischen zwei benachbarten Nullstellen von $Q_{n+1}(x)$ liegt stets eine Nullstelle von $Q_n(x)$.

(c) Ist z_n diejenige Nullstelle von $Q_n(x)$ mit grösstem Imaginärteil, so gilt

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{n+1}} \quad (n \geq 2).$$

Frieder Grupp, Bergrheinfeld, D

Aufgabe 1426: Für ein Dreieck ABC mit den Winkelhalbierenden $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ beweise man die Ungleichung

$$\frac{a+b}{w_\alpha + w_\beta} + \frac{b+c}{w_\beta + w_\gamma} + \frac{c+a}{w_\gamma + w_\alpha} \geq 2\sqrt{3}.$$

Nguyen Duy Khanh, Nam Dinh, VN

Aufgabe 1427 (Die einfache dritte Aufgabe): Einem Rechteck mit Seitenverhältnis $r:1$ ($1 \leq r \leq 2$) soll das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Konstruiere bzw. falte diese Dreieck und bestimme das Verhältnis von Dreiecksinhalt zu Rechtecksinhalt. Wann ist dieses Verhältnis minimal?

André Kiener, Oberdorf SO, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2021

Aufgabe 1410. Im Einheitskreis K werden zufällig 3 Punkte A, B, C gewählt, d. h. unabhängig voneinander und gleichmässig verteilt ($P(A \in H) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Fl}(H)$ für $H \subset K$, wobei $\mathrm{Fl}(H)$ den Flächeninhalt von H bezeichnet).

(a) Man berechne den Erwartungswert des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Dreieck ABC stumpfwinklig?

Henri Carnal, Bern, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden 4 Lesern eingegangen: Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Im Prinzip ist klar, wie man die Wahrscheinlichkeit und den Erwartungswert in diesen beiden Fällen ausrechnet. Die Kunst besteht darin die dreifachen Flächenintegrale geschickt zu vereinfachen. Die folgenden Darstellung ist aus der Lösung von *Albert Stadler*, der als einziger eine vollständige Lösung eingesandt hat, und der Lösung des Verfassers zusammengesetzt, der noch eine wesentliche Vereinfachung zum Teil (b) beigetragen hat.

(a) Die drei Ecken A, B, C des Dreiecks sind Zufallsvariablen mit Realisierungen im Einheitskreis K. Wir berechnen zuerst die Wahrscheinlichkeitsdichte von

$$R = \max\{|A|, |B|, |C|\}.$$

Seien r_1, r_2, r_3 die Abstände der drei Punkte vom Koordinatenursprung. Die Wahrscheinlichkeit, dass R zwischen r und $r+h$ liegt, beträgt

$$\begin{aligned} 3 \cdot P(r_1 \in [r, r+h] \text{ und } r_2, r_3 \in [0, r]) &= 3\frac{\pi(r+h)^2 - \pi r^2}{\pi}\left(\frac{\pi r^2}{\pi}\right)^2 \\ &= 6r^5 h + 3r^4 h^2. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir $f_R(r) = 6r^5$ für die Wahrscheinlichkeitsdichte von R.

Wir betrachten zunächst den einfacheren Sachverhalt, dass die Ecke C des Dreiecks auf dem Rande des Einheitskreises liegt. Wir legen für den Moment das Zentrum des Einheitskreises auf den Punkt $(0, 1)$ und fixieren den Punkt C im Koordinatenursprung $(0, 0)$. Die Ecke A ist eine Zufallsvariable, welche gegeben ist durch $A(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$, wobei $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq r \leq 2\sin(\varphi)$ und $dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$.

Sei $B(s\cos(\psi), s\sin(\psi))$ die zweite Ecke, wobei wir die Variable ψ einschränken auf den Bereich $\varphi \leq \psi \leq \pi$ und dann verdoppeln. Wir erhalten für den erwarteten Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

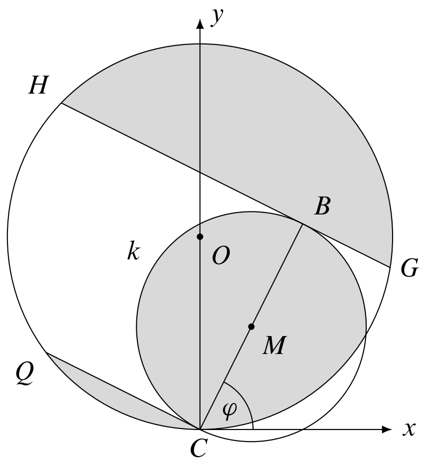
$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin(\varphi)}\int_{\varphi}^{\pi}\int_0^{2\sin(\psi)}\frac{1}{2}rs\sin(\psi-\varphi)rs\,ds\,d\psi\,dr\,d\varphi\\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_{\varphi}^{\pi}\frac{64}{9}\sin(\psi-\varphi)\sin^3(\varphi)\sin^3(\psi)\,d\psi\,d\varphi\\
&= \frac{64}{9\pi^2}\int_0^{\pi}\int_{\varphi}^{\pi}\sin^4(\psi)\sin^3(\varphi)\cos(\varphi)-\sin^3(\psi)\cos(\psi)\sin^4(\varphi)\,d\psi\,d\varphi = \frac{35}{36\pi}.
\end{aligned}$$

Wir verschieben nun das Zentrum des Einheitskreises zurück in den Ursprung $(0,0)$. Der erwartete Flächeninhalt des Dreiecks ABC unter der Bedingung $\max\{|A|,|B|,|C|\} = r$ beträgt demnach $E_r = \frac{35}{36\pi}r^2$. Unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen $R = \max\{|A|,|B|,|C|\}$ finden wir für den erwarteten Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

$$E = \int_0^1 E_r \cdot f_R(r)\,dr = \int_0^1 \frac{35}{36\pi}r^2\cdot 6r^5\,dr = \frac{35}{48\pi}.$$

(b) Wir dürfen annehmen, dass einer der drei Eckpunkte auf dem Rand des Einheitskreises liegt. Denn die Winkel des Dreiecks sind unabhängig von der Zufallsvariablen $R = \max\{|A|,|B|,|C|\}$, da der Einheitskreis ähnlich zum Kreis mit Radius R ist.

Wir betrachten die folgende Figur, in welcher, wie oben, der Punkt C im Koordinatenursprung und das Zentrum O des Einheitskreise im Punkt $(0,1)$ liegt. Analog ist die Ecke $B(\rho\cos(\varphi),\rho\sin(\varphi))$ eine Zufallsvariable mit $0 \le \varphi \le \pi$, sowie $0 \le \rho \le 2\sin(\varphi)$ und $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$.



Der Durchmesser eines Kreises k mit Mittelpunkt M ist CB. Die Tangente an k in B schneidet den Einheitskreis in den Punkten G und H. Die Tangente an k in C schneidet den Einheitskreis in C und Q. Das Dreieck ABC ist genau dann stumpfwinklig, wenn der Punkt A im Inneren von einer der drei schattierten Regionen liegt, welche den Fällen $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\beta > \frac{\pi}{2}$ und $\gamma > \frac{\pi}{2}$ entsprechen. Die Gebiete zu den Winkeln φ und $\pi - \varphi$ liegen symmetrisch zur y-Achse. Deshalb können wir uns auf $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ beschränken, wobei wir das Resultat noch verdoppeln.

Die Fläche eines Kreissegments mit Radius r und Höhe h ist

$$r^2 \arccos\Big(\frac{r-h}{r}\Big) - (r-h)\sqrt{2rh - h^2}.$$

Die Höhe des Kreisbogens über der Sehne CQ ist gleich $1 - \sin(\varphi)$. Demnach ist die Fläche des Kreissegments ($\gamma > \frac{\pi}{2}$) gleich

$$\arccos(\sin(\varphi)) - \sin(\varphi)\cos(\varphi) = \frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi).$$

Die Höhe des Kreisbogens über der Sehne GH ist gleich $1 + \sin(\varphi) - \rho$. Demnach ist die Fläche des Kreissegments ($\beta > \frac{\pi}{2}$) gleich

$$\arccos(\rho - \sin(\varphi)) - (\rho - \sin(\varphi))\sqrt{(1 + \sin(\varphi) - \rho)(1 - \sin(\varphi) + \rho)}.$$

Da man die Rollen von A und B vertauschen kann, ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\alpha > \frac{\pi}{2}$ gleich gross wie die Wahrscheinlichkeit, dass $\beta > \frac{\pi}{2}$. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Dreieck stumpfwinklig ist, durch folgendes Doppelintegral gegeben

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\sin(\varphi)} \Big(&\frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi) + 2\arccos(\rho - \sin(\varphi)) \\ &- 2(\rho - \sin(\varphi))\sqrt{(1 + \sin(\varphi) - \rho)(1 - \sin(\varphi) + \rho)}\Big)\rho\, d\rho\, d\varphi.\end{aligned}$$

Wir führen die Integration nach ρ aus und finden der Reihe nach

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\sin(\varphi)} \Big(\frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\Big)\rho\, d\rho = \sin^2(\varphi)(\pi - 2\varphi - \sin(2\varphi)), \\ &2\int_0^{2\sin(\varphi)} \arccos(\rho - \sin(\varphi))\rho\, d\rho \\ &\qquad = \rho^2 \arccos(\rho - \sin(\varphi))\big|_0^{2\sin(\varphi)} + \int_{-\sin(\varphi)}^{\sin(\varphi)} \frac{(\rho + \sin(\varphi))^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho \\ &\qquad = 2(\pi - \varphi)\sin^2(\varphi) + \varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi), \\ &2\int_0^{2\sin(\varphi)} (\rho - \sin(\varphi))\sqrt{(1 + \sin(\varphi) - \rho)(1 - \sin(\varphi) + \rho)}\rho\, d\rho = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{8}\sin(4\varphi).\end{aligned}$$

Die Integration nach φ liefert schliesslich

$$\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} \sin^2(\varphi)(3\pi - 4\varphi - \sin(2\varphi)) + \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\sin(2\varphi) + \frac{1}{8}\sin(4\varphi)\, d\varphi = \frac{9}{8} - \frac{4}{\pi^2}.$$

Bemerkung: Mehrere Leser weisen darauf hin, dass die Fragestellungen nicht neu sind und verweisen auf https://mathworld.wolfram.com/DiskTrianglePicking.html.

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2021

Aufgabe 1413. Beweise

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\log^2\Big(1+\frac{1}{k}\Big)=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}\frac{1}{x}\log\Big(\frac{\sin(x)}{x}\Big)\,dx$$

Albert Stadler, Herrliberg, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 4 Lesern sind Lösungen eingetroffen: Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH) und Seán Stewart (Thuwal, SA).

Die meisten Löser starten mit der Produktdarstellung der Sinusfunktion und gelangen dann ziemlich direkt zum Ziel. Wir folgen den Ausführungen von *Bernhard Ruh*, der das sehr geschickt handhabt.

Wir starten mit der Umformung des Integranden auf der rechten Seite, indem wir die Eulersche Produktdarstellung $\sin(x)=x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2})$ durch x teilen und logarithmieren

$$\log\Big(\frac{\sin(x)}{x}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\log\Big(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2}\Big)=\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\log\Big(1-\frac{x}{\pi k}\Big)+\log\Big(1+\frac{x}{\pi k}\Big)\Big).$$

Nun teilen wir wiederum durch x und integrieren summandenweise. Es erweist sich als nützlich, den allerersten Summanden separat zu betrachten und die folgenden Terme paarweise zusammenzufassen:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{1}{x}\log\Big(\frac{\sin(x)}{x}\Big)\,dx=\int_0^{\pi}&\frac{1}{x}\log\Big(1-\frac{x}{\pi}\Big)\,dx\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\int_0^{\pi}\frac{1}{x}\log\Big(1+\frac{x}{\pi k}\Big)\,dx\\&\qquad+\int_0^{\pi}\frac{1}{x}\log\Big(1-\frac{x}{\pi(k+1)}\Big)\,dx\Big).\end{aligned}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite entspricht dem Integral $\int_0^1\frac{\log(1-t)}{t}\,dt$ mit dem bekannten Wert $-\frac{\pi^2}{6}$. Im erste Integral der Summe substituieren wir $t=\frac{x}{\pi k}$ und im zweiten substituieren wir $\frac{x}{\pi(k+1)}=\frac{t}{1+t}$. Mit einer kleinen Rechnung folgt dann

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\frac{1}{x}\log\Big(1+\frac{x}{\pi k}\Big)\,dx+\int_0^{\pi}\frac{1}{x}\log\Big(1-\frac{x}{\pi(k+1)}\Big)\,dx\\&\quad=\int_0^{1/k}\frac{\log(1+t)}{t}\,dt-\int_0^{1/k}\frac{\log(1+t)}{t(1+t)}\,dt=\int_0^{1/k}\frac{\log(1+t)}{1+t}\,dt\\&\quad=\frac{1}{2}\log^2(1+t)\Big|_0^{1/k}=\frac{1}{2}\log^2\Big(1+\frac{1}{k}\Big),\end{aligned}$$

was den Beweis der Aufgabe abschliesst.

Aufgabe 1414. Sei A eine $n \times n$-Matrix mit ganzzahligen Einträgen und v ein Spaltenvektor der Höhe n mit ganzzahligen Einträgen. Für jede ganze Zahl $m \geq 0$ sei g_m der grösste gemeinsame Teiler der n Einträge des Vektors $A^m v$. Man zeige: Ist $g_m = 1$ für mindestens eine ganze Zahl $m \geq n$, dann ist $g_m = 1$ für jede ganze Zahl $m \geq 0$.

Darij Grinberg, Philadelphia, USA

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 4 Lesern sind Beiträge zugesandt worden: Hans Brandstetter (Wien, A), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A) und Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH).

Es scheint intuitiv klar, dass man hier mit dem Satz von Cayley-Hamilton arbeiten wird. Sehr sorgfältig macht das *Wolfgang Seewald*, dessen Lösung wir folgen.

Wir betrachten zunächst die analoge Fragestellung im Körper $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p. Sei daher $B \equiv A \pmod{p}$ und $w \equiv v \pmod{p}$. Sei $h_m = 0$, wenn $B^m w = 0$ (d. h., alle Einträge von $A^m v$ sind durch p teilbar), und $h_m = 1$ andernfalls. Behauptung: Ist $h_m = 1$ für ein $m \geq n$, dann ist $h_m = 1$ für alle $m \geq 0$.

Ist $h_m = 0$, so ist natürlich $h_k = 0$ für $k \geq m$. Sei daher M, falls ein solches M existiert, maximal, sodass $h_M = 1$ und $h_{M+1} = 0$. Nach Voraussetzung gilt $M \geq n$.

Das charakteristische Polynom $p(\cdot)$ von B sei $p(\lambda) = p_n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_0$ mit $p_n = 1$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt

$$p(B) = p_n B^n + p_{n-1} B^{n-1} + \cdots + p_0 B^0 = 0.$$

Es sei k der niedrigste Index, für den $p_k \neq 0$ (k ist die algebraische Vielfachheit der Nullstelle 0 von $p(\cdot)$). Es ist $0 \leq k \leq n$ und es gilt

$$p_n B^n + p_{n-1} B^{n-1} + \cdots + p_k B^k = 0.$$

Da $M \geq k$, können wir von rechts mit $B^{M-k} w$ multiplizieren und erhalten

$$p_n B^{M+n-k} w + p_{n-1} B^{M+n-k-1} w + \cdots + p_k B^M w = 0.$$

Wegen $h_{M+1} = 0$ ist somit $p_k B^M w = 0$ und wegen $p_k \neq 0$ auch $B^M w = 0$, ein Widerspruch zu $h_M = 1$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir kehren zurück zur ursprünglichen Fragestellung. Es sei $g_m = 1$ für ein $m \geq n$ und $g_{m+1} > 1$. Sei p ein Primfaktor von g_{m+1}. Es ist dann $g_{m+1} \equiv 0 \pmod{p}$ und $h_{m+1} = 0$, jedoch $h_m = 1$. Nach obigen Ausführungen ist dies nicht möglich, was den Beweis abschliesst.

Aufgabe 1403 (Die einfache dritte Aufgabe). Man beweise, dass die geschlossene Kurve

$$\begin{aligned} C\colon \vec{r}(t) &= \big(x(t), y(t)\big) \\ &= \big(-5\cos(t) + 2\sin^3(t)\cos(t), -5\sin(t) - 3\sin^2(t) + 2\sin^4(t)\big) \end{aligned}$$

mit $0 \leq t \leq 2\pi$ die konstante Breite 10 hat, also zwei (verschiedene) parallele Kurventangenten haben immer den Abstand 10.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Lösungen von folgenden 14 Lesern eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), André Kiener (Oberdorf SO, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Raphael Muhr (Oberammergau, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Hansruedi Widmer (Baden, CH).

Wegen der involvierten trigonometrischen Funktionen ist es naheliegend, dass sich Kurvenpunkte mit parallelen Tangenten um das Argument $\varphi = \pi$ unterscheiden und dann ist die Rechnung nicht mehr schwierig. Wir folgen den Ausführungen von *Gerhard Wanner*, der ausführt, wie man zu Parameterdarstellungen mit dieser Eigenschaft kommen kann.

Wir möchten nicht nur diese leichte Aufgabe nachrechnen, sondern auch verstehen, wie Herr Wyss (eventuell) auf diese Formeln kommen konnte.

Man denkt sich einen Stab der Länge $2l$ in horizontaler Lage im Ursprung zentriert und darauf die Koordinaten von $-l \leq r \leq l$ abgetragen. Nun wird an einer Stelle r_0 der Stab mit einer Stecknadel fixiert und der Stab um einen kleinen Winkel gedreht. Die beiden Enden beschreiben dabei zwei kleine Kreisbögen senkrecht zum Stab, d. h., die beiden Tangenten sind parallel und im Abstand $2l$. Nun sticht man an einer anderen Stelle r_1 ein und dreht weiter, und so fort. Schliesslich denken wir uns das Einstechen kontinuierlich an Stellen $r(t)$ $(0 \leq t \leq \pi)$. Dann beschreiben die Eckpunkte die Kurven

$$x(t) = \pm l + \int_0^t (r(\tau) \mp l) \sin(\tau)\, d\tau, \quad y(t) = -\int_0^t (r(\tau) \mp l) \cos(\tau)\, d\tau$$

und die Mittelpunkte die Kurve mit $l = 0$. Dies führt nun für jedes beliebige $r(t)$ $(-l \leq r(t) \leq l)$ zu einer Figur mit der gewünschten Eigenschaft, unter der Bedingung, dass nach einem halben Umlauf $0 \leq t \leq \pi$ der Stab wieder in der selben Position ist, d. h., es muss gelten

$$\int_0^\pi r(\tau) \sin(\tau)\, d\tau = \int_0^\pi r(\tau) \cos(\tau)\, d\tau = 0.$$

Man erhält die Formeln der Aufgabenstellung, wenn man $l = 5$ und $r(t) = 2\sin(3t)$ setzt, welche beide Bedingungen erfüllt, einsetzt, integriert und vereinfacht.