Elemente der Mathematik 78 (2023), 9–20
DOI 10.4171/EM/462

© 2021 Swiss Mathematical Society
Published by EMS Press
This work is licensed under a CC BY 4.0 license

Dreiecke, Teildreiecke und Kreise

Peter Thurnheer

Peter Thurnheer doktorierte 1979 an der ETH Zürich bei Prof. K. Chandrasekharan auf dem Gebiet der Zahlentheorie. Er unterrichtete an Gymnasien, Fachhochschulen und Universitäten an verschiedenen Orten in der Schweiz sowie in Paris und Port-au-Prince (Haiti). Vor allem aber hielt er während vielen Jahren Vorlesungen an der ETH Zürich über Calculus, Klassische Zahlentheorie, Kombinatorik und Darstellende Geometrie.

In [1] wurden Aussagen zu den Umkreismittelpunkten gewisser Teildreiecke eines Ausgangsdreiecks bewiesen. Im Folgenden geht es um die In- und Ankreismittelpunkte des Dreiecks und zwei seiner Teildreiecke.

Wir gehen nun stets aus von einem Dreieck mit Ecken A, B, C, Gegenseiten a, b, c und Winkeln α, β, γ bei A, B respektive C. Sei D irgendein Punkt verschieden von B und C auf der Dreiecksseite a oder ihrer Verlängerung. Wir nennen die Mittelpunkte des Inkreises und der Ankreise des Ausgangsdreiecks ABC die U-Punkte, des Dreiecks ADC die V-Punkte und des Dreiecks ABD die W-Punkte und bezeichnen sie mit U_j, V_j, W_j, $j = 1, 2, 3, 4$. Diese zwölf Punkte sind je Schnittpunkte von drei Winkelhalbierenden der Geraden AB, AC, BC, AD. Die Menge dieser Winkelhalbierenden besteht aus sechs Paaren von zwei Geraden, die sich senkrecht schneiden, je einmal in B, C, D und dreimal in A.

Wir betrachten nun in den Abbildungen stets einen Punkt D auf der Dreiecksseite a. Aber alle Argumentationen und Aussagen, die gemacht werden, gelten genau so auch für einen Punkt D auf der Verlängerung dieser Seite. (Das Ausgangs- und ein Teildreieck vertauschen dann einfach ihre Rollen.)

Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben und ihre Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren: So formulierte es Galileo Galilei in seinem wissenschaftshistorisch bedeutenden Buch *Il Saggiatore*. Der vorliegende Beitrag erweitert dieses Alphabet um einige weitere, neue und interessante Buchstaben. Es werden unter anderem Kaskaden von Kreisen generiert, ausgehend von den In- und Ankreisen eines Dreiecks und zwei seiner Teildreiecke. Deren Mittelpunkte liegen auf gewissen Kreisen, deren Mittelpunkte auf gewissen Kreisen liegen, deren Mittelpunkte … schliesslich auf einem letzten, speziellen Kreis liegen, der auch noch durch die Umkreismittelpunkte des Ausgangsdreiecks und der beiden Teildreiecke geht.

Im Weiteren benennen wir Kreise nach ihrem Mittelpunkt. Der Kreis mit Zentrum S heisst kurz der S-Kreis oder der Kreis S und der Mittelpunkt des S-Kreises oder des Kreises S ist der Punkt S.

Satz 1.

(a) *Durch die Ecke A des Ausgangsdreiecks gehen acht Kreise – die E-Kreise – welche je einen U-, einen V- und einen W-Punkt enthalten. Durch jeden der zwölf U-, V-, W-Punkte gehen zwei dieser Kreise (Abbildung 5).*

(b) *Durch die Ecke A gehen zwei sich senkrecht schneidende Geraden e_1, e_2, welche je vier der acht E-Kreismittelpunkte E_j, $j = 1, 2, \ldots, 8$, enthalten.*

Beweis Satz 1 (Abbildung 1). Die Punkte der folgenden acht Tripel – die Ecken der Dreiecke, erzeugt durch die acht möglichen Tripel von Winkelhalbierenden in den Punkten B, C, D – liegen bei geeigneter Nummerierung je auf einem Kreis durch A, definieren also einen E-Kreis:

$$\begin{array}{llll} \{U_4, V_4, W_4\}, & \{U_2, V_3, W_3\}, & \{U_2, V_2, W_1\}, & \{U_4, V_1, W_2\}, \\ \{U_3, V_2, W_4\}, & \{U_3, V_3, W_2\}, & \{U_1, V_4, W_1\}, & \{U_1, V_1, W_3\}. \end{array}$$

Wir beweisen dies, indem wir exemplarisch zeigen, dass der Punkt W_2 auf dem Kreis k_0 durch A, U_4, V_1 liegt. Immer wieder benützen wir im Weiteren, dass ein Aussenwinkel im Dreieck gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel ist (Eukl. I. 32), dass ein Peripheriewinkel halb so gross ist wie der zugehörige Zentriwinkel und dass zwei Peripheriewinkel über einer Sehne gleich sind oder sich auf 180° ergänzen (Eukl. III. 20). Mit $\omega = \sphericalangle BDA$ ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle V_1AU_4 &= 90^\circ - \sphericalangle U_3AC + \sphericalangle V_1AC \\ &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sphericalangle DAC}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{\gamma}{2}, \\ \sphericalangle V_1AU_4 &= \frac{\beta}{2} + \frac{\omega}{2} = \sphericalangle DW_2U_4 = \sphericalangle V_1W_2U_4, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass der Punkt W_2 auf dem Fasskreis k_0 durch A, U_4, V_1 für den Winkel $\sphericalangle V_1AU_4$ liegt, was zu zeigen war. Der Kreis k_0 ist der E-Kreis E_4.

Als Nächstes betrachten wir den E-Kreis durch die Punkte A, U_3, V_2, W_4. Wir zeigen, dass sein Mittelpunkt E_5 auf der Geraden AE_4 liegt. Es ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle AU_4V_1 &= \sphericalangle AU_4C = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}, \\ \sphericalangle AW_4V_2 &= 180^\circ - \sphericalangle AU_3V_2 = 180^\circ - \sphericalangle AU_3C = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Also ist $\sphericalangle AU_4V_1) = \sphericalangle AW_4V_2$ und damit $\sphericalangle AE_4V_1 = \sphericalangle AE_5V_2$. Somit liegen die Punkte E_4, E_5 einerseits auf den Fasskreisen für diesen Winkel über den Strecken AV_1, AV_2, andererseits auf deren Mittelnormalen (Streckensymmetralen). Aber die Fasskreise – für denselben Winkel – berühren sich in A, ihre Zentrale geht durch A. Also gehen entsprechende dieser Elemente, insbesondere die Punkte E_4, E_5, durch eine Streckung mit Zentrum A auseinander hervor. Die beiden Punkte liegen auf einer Geraden durch A. Ana-

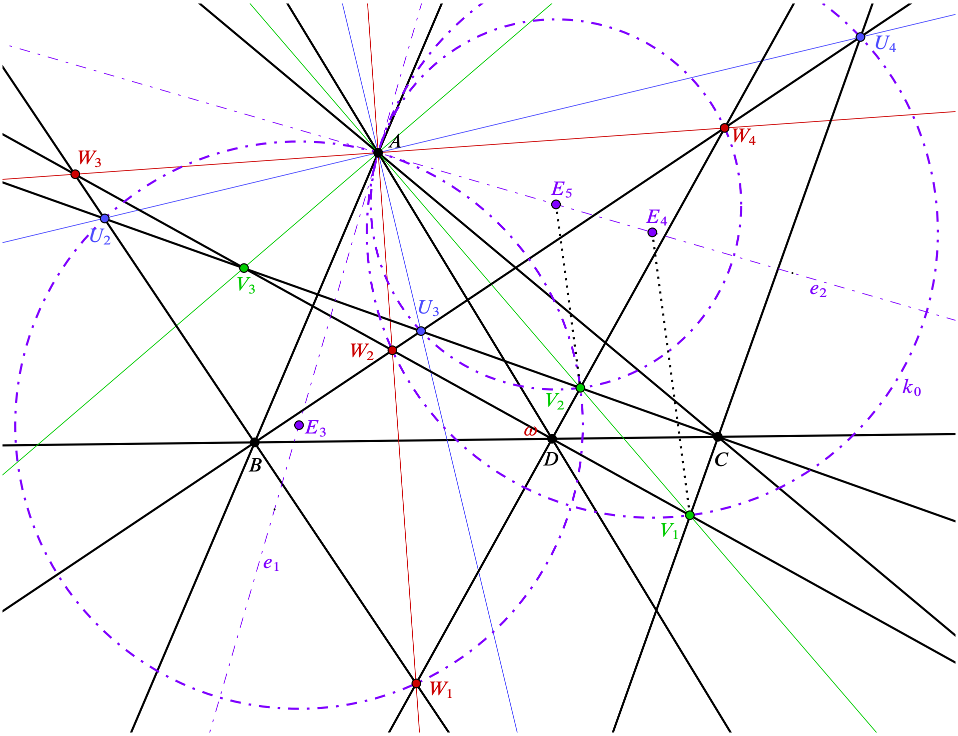

Abbildung 1

log beweist man, dass je vier und vier E-Kreismittelpunkte auf einer Geraden durch A liegen.

Nun zeigen wir, dass sich diese Geraden senkrecht schneiden. Wir betrachten dazu den E-Kreis durch A, U_2, V_2, W_1, dessen Mittelpunkt E_3 nicht auf der Geraden AE_4 liegt. Es ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle E_4AV_1 &= 90^\circ - \sphericalangle AU_4V_1 = 90^\circ - \sphericalangle AU_4C, \\ \sphericalangle V_1AE_3 &= \sphericalangle V_2AE_3 = 90^\circ - \sphericalangle AU_2V_2 = 90^\circ - \sphericalangle AU_2C, \end{aligned}$$

sodass gilt:

$$\sphericalangle E_4AE_3 = \sphericalangle E_4AV_1 + \sphericalangle V_1AE_3 = 180^\circ - \{\sphericalangle AU_4C + \sphericalangle AU_2C\}.$$

Da das Dreieck U_2CU_4 rechtwinklig ist, folgt $\sphericalangle E_4AE_3 = 90^\circ$, was zu zeigen war. ∎

Nach Satz 1 (b) berühren sich vier E-Kreise in A und sie stehen senkrecht zu den andern vier, die sich ebenfalls in A berühren. Neben A gibt es somit noch sechzehn E-Kreisschnittpunkte. Zwölf davon sind U-, V- oder W-Punkte, vier nicht. Wir nennen diese vier Punkte die Z-Punkte Z_j, $j = 1, 2, 3, 4$ (Abbildung 5). Diese Punkte haben erstaunliche Eigenschaften. Bei geeigneter Nummerierung gilt für den Z-Punkt Z_1 (Abbildung 2) der folgende Satz.

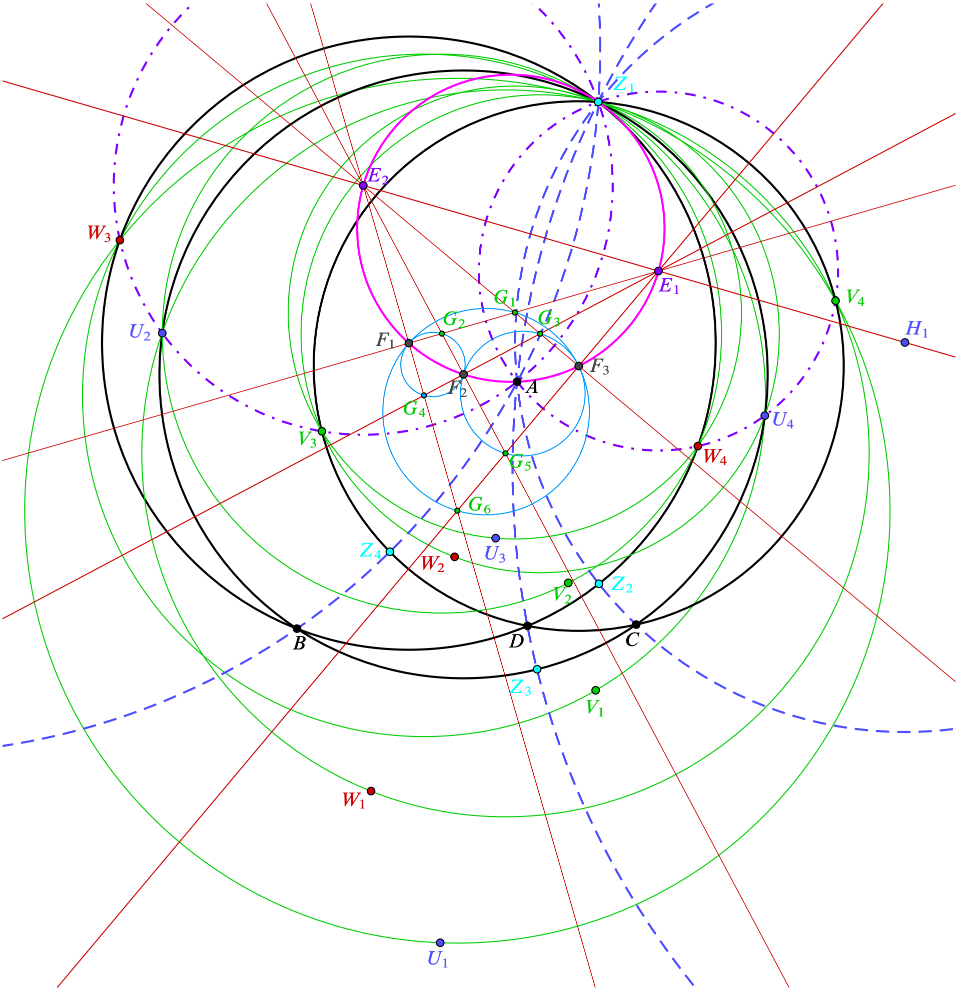

Abbildung 2

Satz 2. *Durch den Punkt Z_1 gehen neben den zwei E-Kreisen E_1, E_2 noch folgende zwölf Kreise:*

(a) *drei F-Kreise F_j, $j = 1,2,3$, welche die fünf in den Klammern stehenden Punkte enthalten:*

$$\{Z_2, B, D \text{ und zwei } W\text{-Punkte}\},$$
$$\{Z_3, B, C \text{ und zwei } U\text{-Punkte}\},$$
$$\{Z_4, C, D \text{ und zwei } V\text{-Punkte}\},$$

(b) *sechs G-Kreise G_j, $j = 1,2,\ldots,6$, die je einen U-, einen V- und einen W-Punkt – aber nicht A – enthalten,*

(c) *drei H-Kreise H_j, $j = 1, 2, 3$, durch die Punkte*

$$\{Z_2, A, C\}, \quad \{Z_3, A, D\}, \quad \{Z_4, A, B\}.$$

Für die Mittelpunkte dieser Kreise gilt:

(i) *Die drei H-Kreismittelpunkte H_j, $j = 1, 2, 3$, liegen auf der Geraden $E_1 E_2$.*

(ii) *Durch die Punkte E_1 und E_2 gehen je drei weitere Geraden, welche je einen F- und zwei G-Kreismittelpunkte enthalten. In den drei F-Punkten schneiden sich diese Geraden senkrecht.*

(iii) *Es gibt drei Kreise, welche je zwei F- und zwei G-Punkte enthalten.*

(iv) *Die sieben Punkte $\{A, Z_1, E_1, E_2, F_1, F_2, F_3\}$ liegen auf einem Kreis – einem L-Kreis.*

Wir beweisen (a), (b), (c) indem wir exemplarisch die Existenz eines Kreises aus jeder Gruppe nachweisen.

Beweis Satz 2 (a) (Abbildung 3). Die beiden E-Kreise E_1, E_2 durch Z_1 enthalten je einen U-, einen V- und einen W-Punkt. Für jedes der drei Paare dieser Punkte gleicher Art kann man gleich argumentieren. Wir wählen die W-Punkte W_3 und W_4, welche auch auf dem E-Kreis E_8 respektive E_5 liegen und zeigen, dass der Schnittpunkt Z_2 dieser beiden E-Kreise sowie die Punkte B, D auf dem Kreis k_1 durch Z_1, W_3, W_4 liegen. Es ist

$$\sphericalangle W_3 Z_1 A = 180° - \sphericalangle W_3 V_3 A = \sphericalangle A V_3 D, \quad \sphericalangle A Z_1 W_4 = \sphericalangle A V_4 W_4 = \sphericalangle A V_4 D.$$

Damit wird $\sphericalangle W_3 Z_1 W_4 = \sphericalangle W_3 Z_1 A + \sphericalangle A Z_1 W_4 = \sphericalangle A V_3 D + \sphericalangle A V_4 D$. Die letzten beiden Winkel sind Winkel im rechtwinkligen Dreieck $V_3 D V_4$. Also ist $\sphericalangle W_3 Z_1 W_4 = 90°$. Damit ist die Strecke $W_3 W_4$ ein Durchmesser des Kreises k_1 und wegen $\sphericalangle W_3 B W_4 = \sphericalangle W_3 D W_4 = 90°$, liegen die Punkte B, D auf k_1. Weiter ist

$$\sphericalangle W_3 Z_2 A = \sphericalangle W_3 V_1 A = \sphericalangle D V_1 V_2, \quad \sphericalangle A Z_2 W_4 = \sphericalangle A V_2 W_4 = \sphericalangle V_1 V_2 D.$$

Damit wird wieder

$$\sphericalangle W_3 Z_2 W_4 = \sphericalangle D V_1 V_2 + \sphericalangle V_1 V_2 D = 90°,$$

da auch das Dreieck $D V_1 V_2$ rechtwinklig ist, sodass auch Z_2 auf k_1 liegt. Der Kreis k_1 ist der F-Kreis F_1. ∎

Beweis Satz 2 (b) (Abbildung 3). Wieder betrachten wir die U-, V- und W-Punkte auf den E-Kreisen E_1, E_2 durch Z_1. Für jedes der sechs Paare dieser Punkte verschiedener Art auf je einem dieser E-Kreise kann man wieder gleich vorgehen. Wir wählen die beiden Punkte U_4 und W_3, welche auch auf dem E-Kreis E_4 respektive E_8 liegen und zeigen, dass der Schnittpunkt V_1 dieser beiden E-Kreise auf dem Kreis k_2 durch Z_1, U_4, W_3 liegt. Es ist

$$\sphericalangle W_3 Z_1 A = 180° - \sphericalangle W_3 V_3 A = \sphericalangle A V_3 V_1, \quad \sphericalangle A Z_1 U_4 = \sphericalangle A V_4 U_4 = \sphericalangle A V_4 V_1.$$

Also ist $\sphericalangle W_3 Z_1 U_4 = \sphericalangle A V_3 V_1 + \sphericalangle A V_4 V_1 = 180° - \sphericalangle V_3 V_1 V_4 = 180° - \sphericalangle W_3 V_1 U_4$, was zeigt, dass V_1 auf dem Kreis k_2 liegt. Dieser ist der G-Kreis G_4. ∎

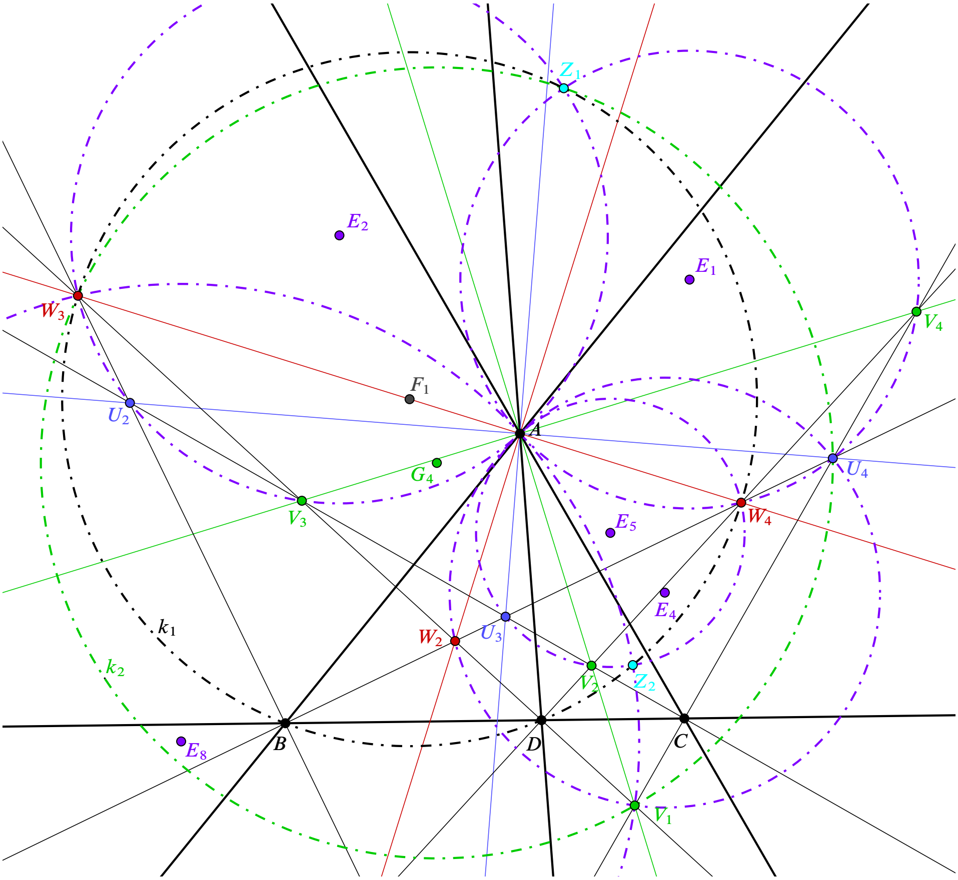

Abbildung 3

Beweis Satz 2 (c) (Abbildung 4). Wir zeigen, dass der Punkt Z_1 auf dem Kreis k_3 durch A, D, Z_3 liegt. Dazu betrachten wir in Abbildung 4 die E-Kreise E_2, E_4, E_6, zwei der F-Kreise durch Z_1 und einen einem F-Kreis entsprechenden Kreis F_6 durch Z_3, der die Punkte Z_4, B, D, W_1, W_2 enthält (natürlich gelten Aussagen analog zu (a) und (b) auch für die anderen Z-Punkte (Abbildung 5)). Es ist

$$\sphericalangle AZ_1V_3 = \sphericalangle AU_2V_3 = \sphericalangle U_4U_2C = \sphericalangle U_4BC, \quad \sphericalangle DZ_1V_3 = \sphericalangle DCV_3 = \sphericalangle BCU_2.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \sphericalangle DZ_3W_2 &= \sphericalangle DBW_2 = \sphericalangle CBU_4 = \sphericalangle AZ_1V_3, \\ \sphericalangle AZ_3W_2 &= \sphericalangle AU_4W_2 = \sphericalangle U_2U_4B = \sphericalangle U_2CB = \sphericalangle DZ_1V_3. \end{aligned}$$

Also ist $\sphericalangle AZ_3D = \sphericalangle DZ_3W_2 - \sphericalangle AZ_3W_2 = \sphericalangle AZ_1V_3 - \sphericalangle DZ_1V_3 = \sphericalangle AZ_1D$, was zeigt, dass Z_1 ein Punkt auf dem Kreis k_3 ist. Dieser ist der H-Kreis H_1. ∎

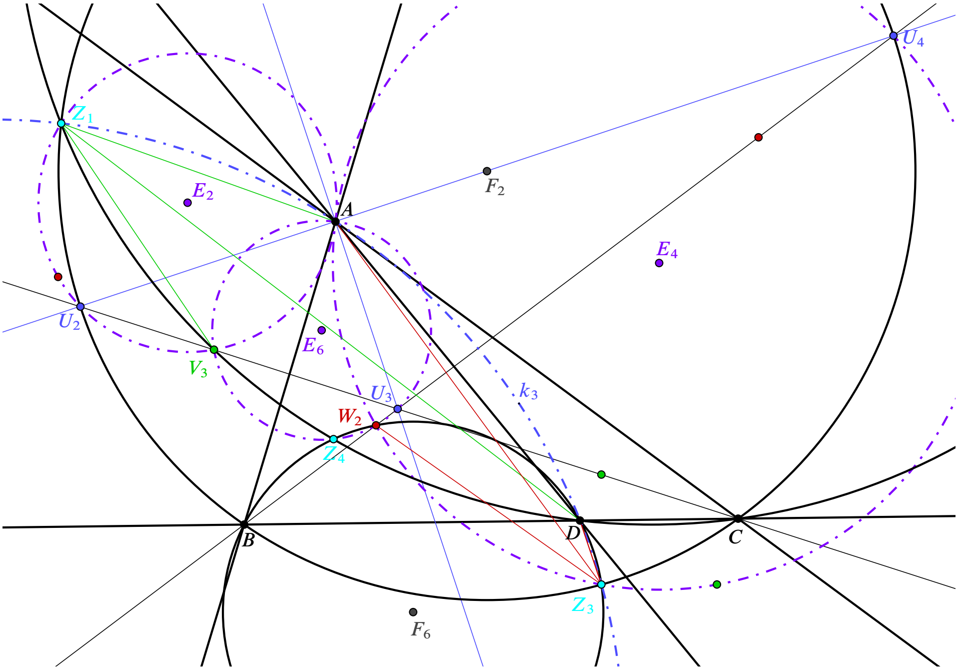

Abbildung 4

Weiter zeigt Abbildung 4, dass auch gilt:

$$\begin{aligned}\sphericalangle DZ_4A - \sphericalangle DZ_1A &= \sphericalangle DZ_4V_3 - \sphericalangle AZ_4V_3 - \{\sphericalangle AZ_1V_3 - \sphericalangle DZ_1V_3\} \\ &= \{180^\circ - \sphericalangle DZ_1V_3\} - \sphericalangle AU_3V_3 - \sphericalangle AU_2V_3 + \sphericalangle DZ_1V_3 \\ &= 180^\circ - \{\sphericalangle AU_3U_2 + \sphericalangle AU_2U_3\}.\end{aligned}$$

Da das Dreieck U_2U_3A rechtwinklig ist, folgt

$$\sphericalangle DZ_4A - \sphericalangle DZ_1A = 90^\circ. \tag{1}$$

Beweis Satz 2 (i) *bis* (iv) (Abbildung 2). Die Aussagen über die Kreismittelpunkte auf Geraden folgen unmittelbar aus der Tatsache, dass die involvierten Kreise eine gemeinsame Sehne haben. Für die H- und die E-Kreise E_1, E_2 ist dies die Strecke AZ_1, für die Kreise F_1, E_2, G_4, G_6 die Strecke W_3Z_1, für die Kreise F_1, E_1, G_1, G_2 die Strecke W_4Z_1. Da, wie gezeigt, $\sphericalangle W_3Z_1W_4 = 90^\circ$ gilt, schneiden sich die Zentralen dieser Kreise, die Mittelnormalen der Strecken W_3Z_1 respektive W_4Z_1, senkrecht in F_1. Gleich kann man argumentieren für die Punkte F_2, F_3, da man, wie im Beweis von (a), auch zeigen kann, dass $\sphericalangle U_2Z_1U_4 = \sphericalangle V_3Z_1V_4 = 90^\circ$ gilt. Damit sind die Kreise in (iii), (iv) die Thaleskreise über den G- respektive den E-Punkten E_1, E_2, für die rechten Winkel in den F-Punkten. Auch die Punkte A und Z_1 liegt auf dem Kreis in (iv), da die Punkte E_1 und E_2 auf den sich senkrecht in A schneidenden Geraden e_1, e_2 liegen und weil die Gerade E_1E_2 die Mittelnormale der gemeinsamen Sehne AZ_1 der beiden E-Kreise ist. ■

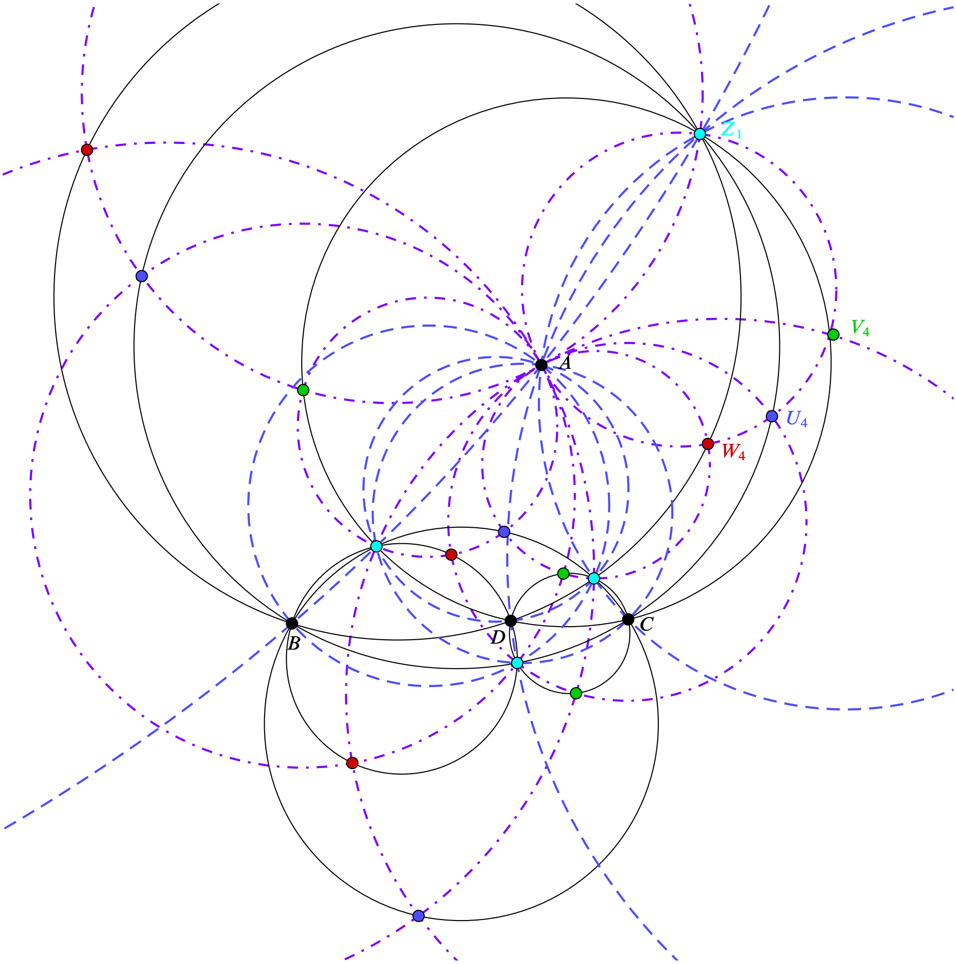

Abbildung 5

In Abbildung 5 stellen wir die E-Kreise, die F- und H-Kreise aus Satz 2 und die diesen Kreisen entsprechenden Kreise – wir nennen auch sie F- respektive H-Kreise – durch die anderen Z-Punkte dar. Es gibt somit insgesamt sechs F-Kreise F_j und sechs H-Kreise H_j, $j = 1, 2, \dots, 6$.

Wir definieren nun noch die K-Kreise K_j, $j = 1, 2, \dots, 18$: Es sind die Thaleskreise über einem Paar von U-, V- oder W-Punkten für die rechten Winkel zwischen entsprechenden Winkelhalbierenden in zwei von den Punkten A, B, C, D. Abbildung 6 zeigt zum Beispiel den Kreis K_1 durch U_1, U_2, A, C. Durch jeden U-, V- oder W-Punkt gehen drei K-Kreise. Dabei fällt jeweils genau einer dieser drei Kreise zusammen mit einem der in Abbildung 5 dargestellten F-Kreise.

Sicher schon bekannt ist die folgende, interessante und auf jedes Dreieck übertragbare Tatsache: *Die Mittelpunkte der sechs K-Kreise durch die vier U-Punkte liegen auf dem Umkreis des Ausgangsdreiecks ABC und begrenzen drei seiner Durchmesser.*

Es gibt aber in dieser Situation weitere, spezielle Kreise. Auf solchen liegen etwa gewisse G-Punkte. Wir geben ein naheliegenderes Beispiel im folgenden Satz.

Satz 3. *Durch die Ecke A gehen neunzehn Kreise, einer durch jeden*

(a) *Z-Punkt, der zusätzlich je zwei E- und drei F-Kreismittelpunkte enthält,*

(b) *U-, V- und W-Punkt, der zusätzlich je zwei E- und zwei K-Kreismittelpunkte enthält,*

(c) *der Punkte B, C, D, der zusätzlich je zwei H-Kreismittelpunkte enthält.*

Aussage (a) folgt aus Satz 2 (iv). Die Aussagen (b), (c) beweisen wir wieder, indem wir die Existenz *eines* dieser Kreise nachweisen.

Beweis Satz 3 (b). Wir beweisen die Aussage für den W-Punkt W_3. Dazu betrachten wir in Abbildung 6 die beiden E-Kreise E_2 und E_8 durch diesen Punkt. Diese Kreise enthalten je einen U- und einen V-Punkt, U_2 und V_3 auf E_2, U_1 und V_1 auf E_8. Diese beiden U- respektive V-Punkte definieren die K-Kreise K_1 und K_7. Wir zeigen, dass der Punkt W_3 und die K-Kreismittelpunkte K_1 und K_7 auf dem Kreis k_4 durch E_2, E_8, A liegen. Da die Punkte E_2, E_8 auf den sich in A senkrecht schneidenden Geraden e_1, e_2 liegen, ist die Strecke E_2E_8 ein Durchmesser des Kreises k_4. Die Strecke W_3A ist gemeinsame Sehne der Kreise E_2 und E_8. Also ist die Gerade E_2E_8 die Mittelnormale der Strecke W_3A, sodass auch $\sphericalangle E_2W_3E_8 = 90°$ gilt, das heisst, auch W_3 liegt auf dem Kreis k_4. Erneute Anwendung der Beziehungen zwischen Peripherie- und Zentriwinkel über einer Sehne (Eukl. III. 20) in den Kreisen K_7 und K_8 liefert $\sphericalangle W_3K_7A = \sphericalangle V_3K_7A = 2\sphericalangle V_3V_1A$ und $\sphericalangle W_3E_8A = 2\sphericalangle W_3V_1A = 2\sphericalangle V_3V_1A$. Also ist $\sphericalangle W_3K_7A = \sphericalangle W_3E_8A$. Somit liegt auch K_7 auf dem Kreis k_4 und ganz analog zeigt man dies für den Punkt K_1. Der Kreis k_4 ist einer der gesuchten Art. ∎

Beweis Satz 3 (c) (Abbildung 6). Wir zeigen (c) für den Punkt D, durch den die H-Kreise H_1 und H_5 mit der gemeinsamen Sehne AD gehen. Es ist

$$\sphericalangle H_1AD = 90° - \sphericalangle DZ_1A, \quad \sphericalangle DAH_5 = 90° - \{180° - \sphericalangle DZ_4A\},$$

und mit (1) erhält man

$$\sphericalangle H_1AH_5 = \sphericalangle H_1AD + \sphericalangle DAH_5 = \sphericalangle DZ_4A - \sphericalangle DZ_1A = 90°.$$

Also liegen die Punkte A, D auf dem Thaleskreis k_5 über den H-Kreismittelpunkten H_1, H_5, was zu zeigen war. Es folgt, dass sich drei Mal zwei der sechs H-Kreise senkrecht in A schneiden. ∎

Wir nennen die Kreise in Satz 3:

$$\begin{cases} \text{(a) die } L\text{-Kreise } L_j, & j = 1, 2, 3, 4, \\ \text{(b) die } M\text{-Kreise } M_j, & j = 1, 2, \ldots, 12, \\ \text{(c) die } N\text{-Kreise } N_j, & j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

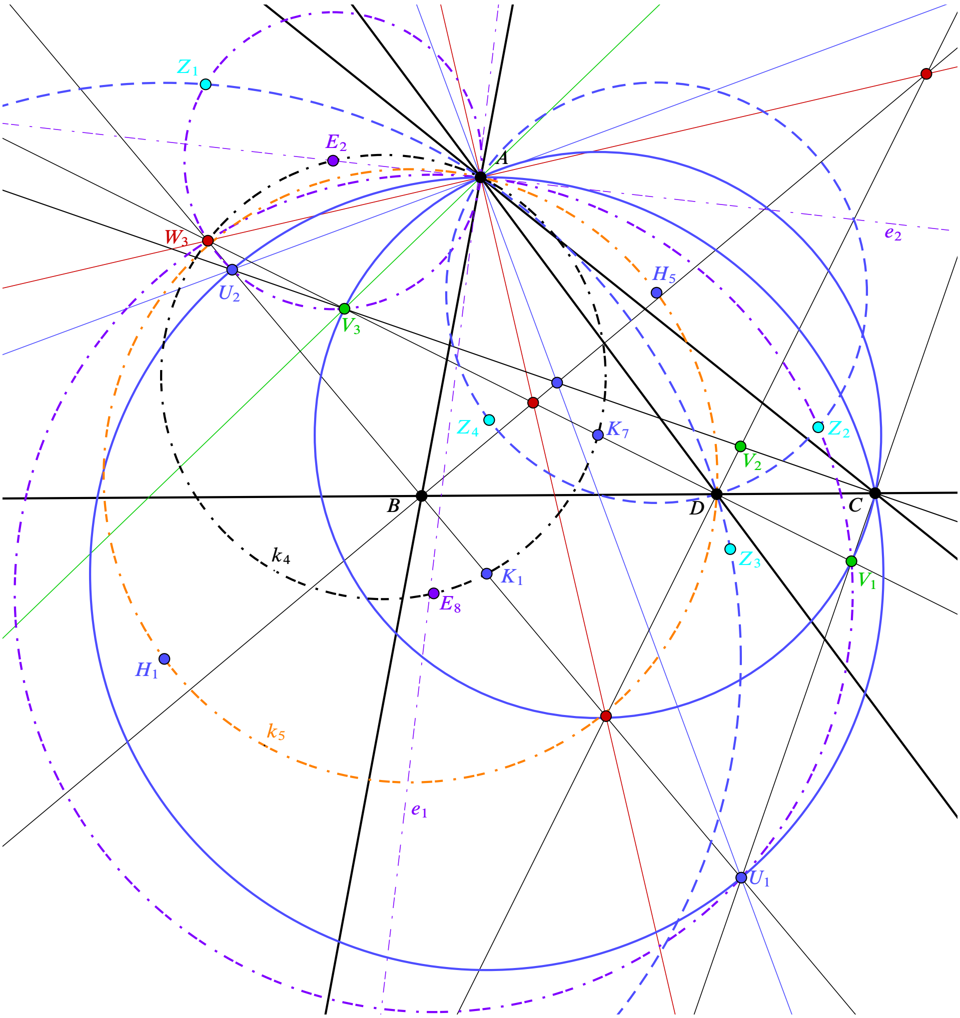

Abbildung 6

Anmerkung (Ohne Beweis, Abbildung 7).

(a) Die drei N-Kreise berühren sich in A.

(b) Es gibt acht Geraden, je vier und vier parallel zur Geraden e_1 respektive e_2, wobei die sechzehn Schnittpunkte dieser acht Geraden die sechzehn L- und M-Kreismittelpunkte sind.

(c) Durch A gehen sechs Kreise – die P-Kreise – die je vier M- und zwei K-Punkte enthalten. Die Mittelpunkte P_j, $j = 1, 2, \ldots, 6$, dieser sechs Kreise liegen auf einem Kreis Q durch A. Die Schar der P-Kreise wird somit umhüllt von einer Kardioide mit Knoten in A.

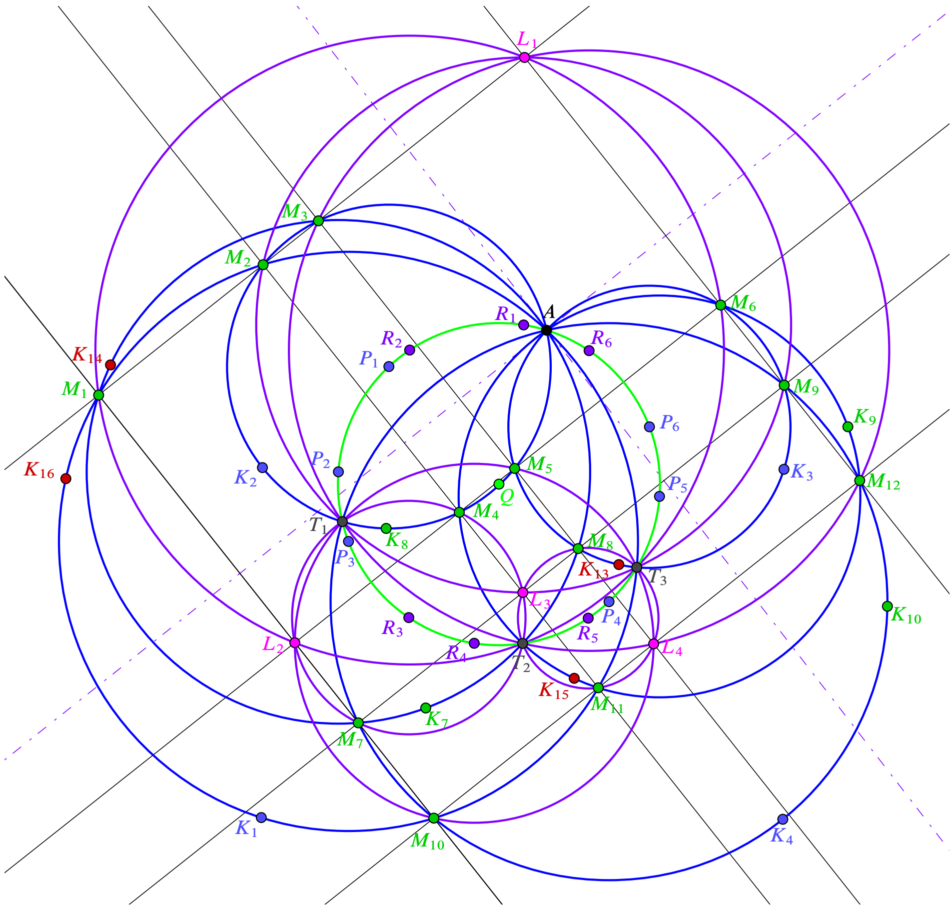

Abbildung 7

(d) Auch die drei P-Kreisschnittpunkte T_j, $j = 1, 2, 3$, die nicht M-Punkte sind, liegen auf dem Kreis Q.

(e) Es gibt sechs Kreise – die R-Kreise, durch jeden M-Punkt einen – die je zwei M-, zwei L- und zwei T-Punkte enthalten.

(f) Auch die sechs R-Kreismittelpunkte R_j, $j = 1, 2, \ldots, 6$, liegen auf dem Kreis Q.

(g) Drei Durchmesser des Kreises Q werden durch zwei P-, drei durch zwei R-Punkte begrenzt.

(h) Die P-Kreisschnittpunkte T_1, T_2, T_3 sind die Umkreismittelpunkte des Ausgangsdreiecks und der beiden Teildreiecke.
Der Kreis Q enthält sechzehn spezielle Punkte, die Umkreismittelpunkte des Ausgangsdreiecks und der Teildreiecke, deren gemeinsame Ecke A, sowie die sechs P- und die sechs R-Kreismittelpunkte.

Die Aussagen der Anmerkung können bewiesen werden mit Argumentationen analog zu den vorgängig immer wieder angewandten.

Wir geben noch zwei in den Zusammenhang gehörende Vermutungen.

Vermutung 1. *Ist D der Mittelpunkt der Dreiecksseite a, so gibt es zwei Kreise, die je zwei U- und zwei Z-Punkte und zwei Kreise, die je zwei V- und zwei W-Punkte enthalten.*

Vermutung 2. *Durch A gehen zwölf Kreise – die J-Kreise – welche je einen der sechs F- und zwei der sechs H-Kreismittelpunkte enthalten. Durch A gehen vier weitere Kreise, die je drei J-Kreismittelpunkte und einen L-Kreismittelpunkt enthalten.*

Dank. Vielmals danken möchte ich Professor Norbert Hungerbühler (ETH Zürich) für alle seine hilfreichen Bemerkungen und ermutigenden Kommentare.

Literatur

[1] P. Thurnheer, Teildreiecke und Kreise, *Elem. Math.* **77** (2022), 187–191.

Peter Thurnheer
ETHZ
Entlisbergstrasse 29
8038 Zürich, Switzerland
tpeter@retired.ethz.ch