Elemente der Mathematik 77 (2022), 196–200
DOI 10.4171/EM/491

© 2022 Swiss Mathematical Society
Published by EMS Press
This work is licensed under a CC BY 4.0 license

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2023 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Aufgabe 1428: Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Man bestimme die grösste Zahl $k_1 > 0$ und die kleinste Zahl $k_2 > 0$ derart, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$k_1 \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{ab+bc+ca}} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq k_2 \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Péter Ivády, Budapest, H

Aufgabe 1429: In der xy-Ebene seien die „Brennpunkte“ $F_1(-1,0)$ und $F_2(1,0)$ gegeben. Für einen Punkt P seien d_1 und d_2 die Abstände von P zu F_1 und F_2. Betrachtet man den geometrischen Ort der Punkte P mit ${d_1}^{d_2} = k$ ($k > 1$ konstant), so entsteht für grosses k (etwa $k = 3$) ein Oval um die beiden Punkte F_1, F_2. Für kleiner werdendes k (etwa $k = 1.5$) erscheint ein birnenförmiges Gebilde, das sich bei weiterer Senkung von k so einschnürt, dass der betrachtete geometrische Ort in je ein Oval um F_1 und eines um F_2 zerfällt. Man gebe für $k = k^*$, wo sich die beiden Kurven gerade noch berühren, eine Gleichung an, aus der k^* numerisch ermittelt werden kann.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1430 (Die einfache dritte Aufgabe): Eine n-stellige natürliche Zahl $z = ab$ entstehe durch Aneinanderfügen zweier natürlichen Zahlen a und b. Wir nennen z eine Swapzahl, wenn durch Vertauschen von a und b ein echtes Vielfaches von z entsteht, wenn also $ba = k \cdot ab$ für ein natürliches $k \geq 2$.

(a) Bestimme alle Swapzahlen mit einstelligem a.

(b) Bestimme die kleinste Swapzahl mit $a = 12$.

Bernhard Ruh, Zuchwil, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2021

Aufgabe 1416. Man zeige, dass

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n} n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^4}{1944}.$$

Frieder Grupp, Bergrheinfeld, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 5 Lesern sind Beiträge eingegangen: Erhard Braune (Linz, A), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Seán Stewart (Thuwal, SA) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Erkennt man, dass die Summe links aus der Potenzreihenentwicklung von $\arcsin^4(x)$ hergeleitet werden kann, ist die Aufgabe nicht schwierig. Wir folgen den Ausführungen von *Seán Stewart*, der das sehr schön zeigt.

Ist S die Summe oben links und ruft man sich die Definition der verallgemeinerten harmonischen Zahlen $H_n^{(2)} = \sum_{m=1}^{n} 1/m^2$ in Erinnerung, so lässt sich S als

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{H_{n-1}^{(2)}}{\binom{2n}{n} n^2}$$

schreiben. Für einen positiven Parameter a kann man die Potenzreihenentwicklung

$$y = e^{a \arcsin(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x < 1, \tag{1}$$

betrachten. Mit $y' = ay/\sqrt{1-x^2}$ erhält man $(1-x^2)(y')^2 = a^2 y^2$ und nach nochmaligem Ableiten und Teilen durch $2y'$ erhält man die Differentialgleichung

$$(1-x^2)y'' - xy' - a^2 y = 0.$$

Setzt man die Potenzreihenentwicklung (1) ein, so erhält man mit Koeffizientenvergleich

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + a^2}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n \geq 0,$$

und mit $y(0) = 1$ sowie $y'(0) = a$ die Anfangswerte $a_0 = 1$ und $a_1 = a$. Die Werte von a_n hängen daher von der Parität von n ab und man erhält

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(a^2 + (2k)^2\right) = \frac{1}{(2n)!} a^2 (a^2 + 2^2) \cdot \ldots \cdot \left(a^2 + (2n-2)^2\right), \quad n \geq 0, \tag{2}$$

sowie

$$a_{2n+1} = \frac{a}{(2n+1)!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(a^2 + (2k+1)^2\right), \quad n \geq 0,$$

wobei das leere Produkt wie üblich den Wert 1 hat.

Entwickelt man nun $e^{a \arcsin(x)}$ als eine Potenzreihe in a,

$$e^{a \arcsin(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \arcsin^k(x)}{k!},$$

so kann man durch Koeffizientenvergleich für a^k Potenzreihen von $\arcsin^k(x)$ erhalten. Hier interessiert nun die Potenzreihe von $\arcsin^4(x)$. Durch Koeffizientenvergleich mit a^4 findet man

$$\begin{aligned}\frac{1}{4!}\arcsin^4(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n-2)^2}{(2k)^2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} 2^{2n-4}\big((n-1)!\big)^2 H_{n-1}^{(2)} = \frac{1}{16} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{H_{n-1}^{(2)}}{\binom{2n}{n} n^2} (2x)^{2n} \quad (x < 1),\end{aligned}$$

da man nur Beiträge für $n \geq 2$ aus (2) hat. Setzt man schliesslich $x = \frac{1}{2}$ ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{24}\arcsin^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} \cdot S$$

und wegen $\arcsin(1/2) = \pi/6$ der behauptete Wert von S.

Bemerkungen: Ein Leser weist darauf hin, dass man den Wert der Summe explizit im folgenden Artikel finden kann: W. Chu, D. Zheng, Infinite series with harmonic numbers and central binomial theorem. *Int. J. Number Theory* **5** (2009), 429–448.

Aufgabe 1417. Sei durch $a_n = n^p + c$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Folge natürlicher Zahlen definiert, wobei p eine Primzahl und c eine natürliche Zahl ist.

(a) Zeige: Für jeden gemeinsamen Teiler t von a_n und a_{n+1} ist $t \equiv 1 \pmod{p}$.

(b) Für $p = 17$ und $c = 9$ finde man die kleinste natürliche Zahl n so, dass a_n und a_{n+1} nicht teilerfremd sind.

Ahmad Sabihi, Isfahan, IR

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 4 Leser haben Zuschriften eingesandt: Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH) und Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH).

Während der erste Teil im Wesentlichen nur modulare Arithmetik benutzt, ist beim zweiten Teil das kleinste n überraschend gross. Die folgende Lösung ist aus den Zuschriften von *Joachim Klose* für Teil (a) und *Bernhard Ruh* für Teil (b) zusammengesetzt.

Zu (a). Man darf annehmen, dass t eine Primzahl ist. Denn ist $s \equiv 1 \pmod{p}$ für alle Primteiler s von t, so gilt das auch für t.

Die multiplikative Gruppe G des Restklassenkörpers $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung $t-1$. Ist t ein gemeinsamer Teiler von $n^p + c$ und $(n+1)^p + c$, so werden die Restklassen von n und $n+1$ unter dem Potenzierungshomomorphismus $\tau_p\colon x \mapsto x^p$ in G auf dasselbe Element $-c$ in G abgebildet ($n \equiv 0 \pmod{t}$ oder $n+1 \equiv 0 \pmod{t}$ kann leicht ausgeschlossen werden). Daher ist τ_p kein Monomorphismus.

Wären nun p und $t-1$ teilerfremd, so gäbe es eine Darstellung $1=\mu p+\lambda(t-1)$ mit ganzen Zahlen μ und λ. Die Potenzierungshomomorphismen τ_p und $\tau_\mu\colon x\mapsto x^\mu$ wären dann zueinander invers und τ_p wäre ein Isomorphismus im Widerspruch zum oben Gesagten und daher gilt $t\equiv 1 \pmod{p}$.

Zu (b). Zwei Polynome haben bekanntlich einen gemeinsamen Teiler, wenn ihre Resultante (Determinante der Sylvestermatrix) r gleich Null ist. Da die Zahlen in unserem Fall sehr gross werden, setzt man mit Vorteil ein CAS ein. Der Algorithmus für das Auffinden des gemeinsamen Faktors modulo r ist ebenfalls in den meisten CAS implementiert (Stichwort: *modular gcd algorithm*), man findet den Term $n+a$. Das gesuchte n ist dann die Differenz $n=r-a$ und hat 52 Stellen. Hier erhält man für r die Primzahl

$$r = 8\,936\,582\,237\,915\,716\,659\,950\,962\,253\,358\,945\,635\,793\,453\,256\,935\,559$$

und

$$n = 8\,424\,432\,925\,592\,889\,329\,288\,197\,322\,308\,900\,672\,459\,420\,460\,792\,433.$$

Aufgabe 1418 (Die einfache dritte Aufgabe). Für jede natürliche Zahl $n>2$ sei $H(n)$ der Graph, dessen Ecken die $\frac{1}{2}(n-1)!$ Hamiltonschen Kreise des vollständigen Graphen $K(n)$ sind, wobei zwei Ecken in $H(n)$ genau dann durch eine Kante verbunden werden, wenn ihre Kantenmengen disjunkt sind. John Conway und Alex Ryba haben bewiesen, dass $H(6)$ aus 6 zum Petersen-Graphen isomorphen Zusammenhangkomponenten besteht (siehe: J. H. Conway und A. J. E. Ryba, Extending the Pascal Mysticum, *The Mathematical Intelligencer* 2013). Man bestimme für jeden der übrigen Graphen $H(n)$ die Zahl der Zusammenhangskomponenten.

Rolfdieter Frank, Koblenz, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 2 Lesern sind Beiträge eingegangen: Bernhard Ruh (Zuchwil, CH) und Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH).

Wir folgen den Ausführungen von *Wolfgang Seewald*.

Wir nummerieren die Ecken des vollständigen Graphen $K(n)$ als $0,1,\dots,n-1$ und verwenden folgende, etwas saloppe Notation für einen Hamiltonkreis: $(0,\pi)$, wobei π eine Permutation der natürlichen Zahlen 1 bis $n-1$ ist. Ist etwa $n=4$, so bedeutet $(0,1,3,2,4)$, dass der Hamiltonkreis durch die Ecken $0,1,3,2,4$ geht und wieder zu 0 zurückkehrt.

$n=3$: Es gibt nur einen Hamiltonkreis $(0,1,2)$.

$n=4$: $K(4)$ enthält 6 Kanten, jeder Hamiltonkreis deren 4. Somit können zwei verschiedene Hamiltonkreise nicht kantendisjunkt sein. Jeder Hamiltonkreis, es gibt 3 davon, bildet eine eigene Zusammenhangskomponente.

$n=5$: $K(5)$ enthält 10 Kanten, jeder Hamiltonkreis deren 5. Somit kann jeder Hamiltonkreis mit genau einem weiteren Hamiltonkreis kantendisjunkt sein. Dies ist offenbar auch der Fall: $(0,1,2,3,4)$ und $(0,2,4,1,3)$ sind kantendisjunkt etc. Es gibt 12 Hamiltonkreise, also 6 Zusammenhangskomponenten.

$n\geq 7$: Jeder Hamiltonkreis ist in $H(n)$ mit jedem anderen verbunden. Es gibt nur eine Zusammenhangskomponente. Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen darstellen, sogar als Produkt von Transpositionen von Nachbarzahlen. Es genügt somit zu zeigen, dass $H_1=(0,1,2,3,4,\dots,n-1)$ verbunden ist mit $H_2=(0,2,1,3,4,\dots,n-1)$.

Wir konstruieren den Hamiltonkreis H_3 wie folgt: $H_3 = (0, 4, 1, 6, 2, 5, \varphi_n)$. Dabei ist φ_n rekursiv definiert: $\varphi_7 = (3)$ und für $n > 7$ ist $\varphi_n = (n-1, \varphi'_{n-1})$, wobei φ'_{n-1} die umgekehrte Reihenfolge von φ_{n-1} bezeichnet:

n	H_3
7	$(0, 4, 1, 6, 2, 5,\ 3)$
8	$(0, 4, 1, 6, 2, 5,\ 7, 3)$
9	$(0, 4, 1, 6, 2, 5,\ 8, 3, 7)$
10	$(0, 4, 1, 6, 2, 5,\ 9, 7, 3, 8)$
	etc.

Man überprüft leicht, dass H_3 sowohl mit H_1 als auch H_2 kantendisjunkt ist. Somit sind H_1 und H_2 in $H(n)$ miteinander verbunden und es gibt nur eine Zusammenhangskomponenten in $H(n)$.

Korrigendum: In der Löserliste zu Aufgabe 1412 sind durch ein Versehen *Frieder Grupp* und *Michael Vowe* unerwähnt geblieben.