

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2023 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH-8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse [stefan.grieder@hispeed.ch](mailto:stefan.grieder@hispeed.ch) eingereicht werden.

**Aufgabe 1431:** Man bestimme den Wert der Doppelreihe

$$\sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(2n+1)(2k+1)(2n+2k+3)^2} \binom{-1/2}{n}.$$

Raymond Mortini, Metz, F und Rudolf Rupp, Nürnberg, D

**Aufgabe 1432:** In einem Dreieck  $ABC$  mit Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  sei  $N$  der Nagel-Punkt. Weiter seien die Winkel  $\varphi_A = \sphericalangle NAB$ ,  $\varphi_B = \sphericalangle NBC$  und  $\varphi_C = \sphericalangle NCA$ . Man beweise die Ungleichung

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cot(\varphi_A) + \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) \cot(\varphi_B) + \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cot(\varphi_C) \geq 9.$$

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

**Aufgabe 1433 (Die einfache dritte Aufgabe):** Sei  $ABCD$  ein Quadrat und  $P$  ein Punkt auf der Seite  $BC$ . Beweise, dass der Punkt  $P$  die Seite  $BC$  genau dann im Goldenen Schnitt teilt ( $PC : PB = (1 + \sqrt{5})/2$ ), wenn die Steiner-Ellipse des Dreiecks  $PAD$  durch die Mitte der Seite  $CD$  geht.

Tran Quang Hung, Hanoi, VN

## Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2022

**Aufgabe 1419.** In der Ebene eines Dreiecks  $A_1A_2A_3$  mit Seitenlängen  $a_1, a_2, a_3$  und Höhenschnittpunkt  $H$  sei ein von  $A_1, A_2, A_3$  verschiedener Punkt  $P$  gegeben. Mit  $r_1 = PA_1, r_2 = PA_2, r_3 = PA_3$  beweise man folgende Ungleichungen:

$$\frac{a_2a_3 - r_2r_3}{r_1} \leq \sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \leq \frac{a_2r_3 + a_3r_2}{a_1}.$$

Die Gleichheitszeichen gelten genau für  $P = H$ . Man untersuche Spezialfälle.

Gheorghe Bercea, München, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von folgenden 5 Lesern sind Lösungen eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A) und Bernhard Ruh (Zuchwil, CH).

Die meisten Löser arbeiten in einem Koordinatensystem und zeigen die behaupteten Ungleichungen mit mehr oder weniger aufwändigen Rechnungen. *Bernhard Ruh*, dessen Lösung wir folgen, konnte den mittleren Ausdruck als Länge geometrisch deuten und dann mit bekannten Ungleichungen arbeiten.

Da der Ausdruck symmetrisch in  $A_2$  und  $A_3$  ist, sei o. B. d. A.  $a_3 \geq a_2$ . Um den Wurzelausdruck zu vereinfachen, setzen wir das Dreieck so in die komplexe Zahlenebene, dass der Nullpunkt in der Mitte der Seite  $A_2A_3$  zu liegen kommt,  $A_2$  und  $A_3$  reell sind und  $A_1$  in den ersten Quadranten zu liegen kommt. Entsprechen dann den Eckpunkten  $A_1, A_2, A_3$  und dem Punkt  $P$  die komplexen Zahlen  $a, b = -c$ ,  $c$  und  $p$ , so ergibt sich für den Radikanden, wie eine leichte Rechnung zeigt:

$$-4c^2 + |a - c|^2 + |a + c|^2 - |p - a|^2 + |p + c|^2 + |p - c|^2 = |p + a|^2.$$

Bezeichnet  $A^*$  den am Nullpunkt gespiegelten Punkt  $A$ , so entspricht der Wurzelausdruck einfach der Länge  $PA^*$  (siehe Figur).

Nach multiplizieren mit  $r_1$  ist die erste Ungleichung nun äquivalent zu

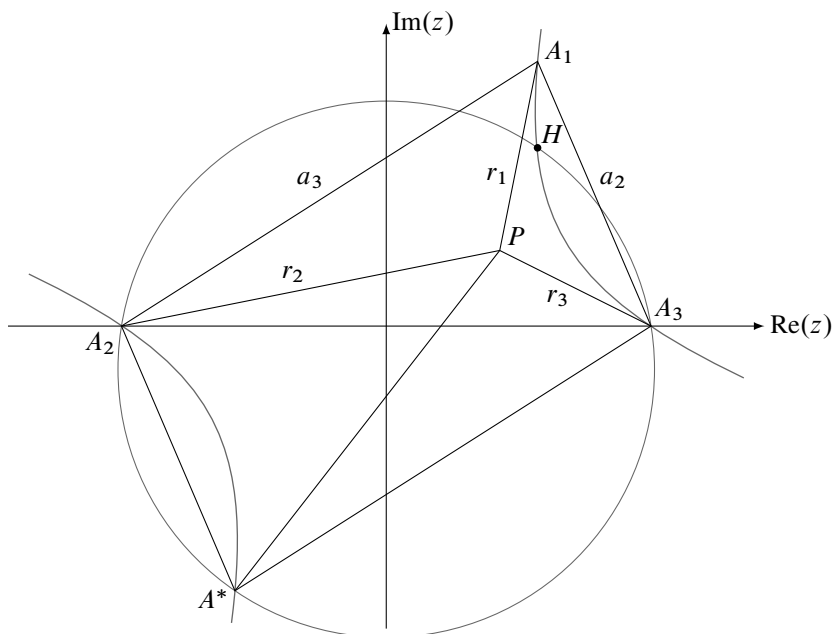
$$|a - c||a + c| - |p - c||p + c| \leq |p - a||p + a|.$$

Wegen  $|a - c||a + c| = |a^2 - c^2|$  etc. entspricht dies aber einfach der Dreiecksungleichung  $|p^2 - c^2| + |p^2 - a^2| \geq |a^2 - c^2|$ . Gleichheit gilt, wenn  $P$  auf einem von zwei Hyperbelstücken liegt (Bild der Strecke von  $a^2$  nach  $c^2$  unter  $z \rightarrow \sqrt{z}$ ). Der eine Bogen liegt innerhalb des Dreiecks und verbindet  $A_1$  mit  $A_3$ , der andere Bogen  $A^*$  mit  $A_2$ . Liegt  $A_1$  auf der Imaginärachse ( $a_2 = a_3$ ), so entartet die Hyperbel zur  $x$ - und  $y$ -Achse.

Die Ungleichung von Ptolemäus auf die vier Punkte  $PA_2A^*A_3$  angewandt, liefert direkt

$$PA^* \cdot A_2A_3 \leq PA_2 \cdot A^*A_3 + A^*A_2 \cdot PA_3.$$

Weil der Punkt  $A^*$  das gegebene Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzt, gegenüberliegende Seiten also gleich lang sind, entspricht dies genau der zweiten Ungleichung. Gleichheit gilt nach Ptolemäus, wenn  $P$  auf dem Umkreis des Dreiecks  $A_2A^*A_3$  liegt, allerdings nur auf dem Bogen zwischen  $A_3$  und  $A_2$ .



Für  $P = H$  ist  $r_i = 2R \cos(\alpha_i)$  ( $R$  Umkreisradius) und  $a_i = 2R \sin(\alpha_i)$ . Die Gleichheit der beiden äusseren Terme folgt dann leicht aus der in (nicht rechtwinkligen) Dreiecken gültigen Beziehung  $\prod \tan(\alpha_i) = \sum \tan(\alpha_i)$ . Für stumpfwinklige Dreiecke gilt die Gleichheit nur, wenn die Distanz  $A_i H$  mit Vorzeichen versehen wird, tritt daher in unserem Fall nicht auf (für rechtwinklige Dreiecke ist  $H$  einer der Eckpunkte). Weitere Punkte für Gleichheit können ausgeschlossen werden, da sich die Hyperbelstücke und der Kreisbogen höchstens in einem (von den Eckpunkten verschiedenen) Punkt schneiden können.

Bemerkung: Multiplikation mit  $a_1 r_1$  führt für die äusseren Terme auf die Ungleichung

$$a_1 a_2 a_3 \leq a_1 r_2 r_3 + r_1 a_2 r_3 + r_1 r_2 a_3.$$

Diese wurde vor über hundert Jahren von Tsuruichi Hayashi, Two theorems on complex numbers, *Tohoku Math. J.* **4** (1913/14), bewiesen. In dieser Arbeit wurde auch gezeigt, dass Gleichheit nur in spitzwinkligen Dreiecken für  $P = H$  auftritt.

Walther Janous gibt an, dass sich für  $P = U$  (Umkreismittelpunkt) und mit  $a, b, c$  anstelle von  $a_1, a_2, a_3$  die Ungleichung

$$\frac{bc - R^2}{R} \leq \sqrt{R^2 - a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{(b + c)R}{a}$$

ergibt. Der Autor Gheorghe Bercea gibt für  $P = S$  (Schwerpunkt) und mit  $r_i = \frac{2}{3} m_i$  ( $m_i$  Länge der Seitenhalbierende) und  $\frac{4}{9} r_a^2 = \frac{1}{9}(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)$  etc. und nach Multi-

plikation mit  $\frac{3}{2}$  die Ungleichung

$$\frac{9bc - 4m_b m_c}{4m_a} \leq 2m_a \leq \frac{bm_c + cm_b}{a}$$

an.

**Aufgabe 1420.** Die Felder eines  $2 \times n$ -Gitterrechtecks  $G_n$  sind so mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 zu belegen, dass die Ziffernsumme in jedem Teilquadrat von  $G_n$  gleich 7 beträgt. Man bestimme die Anzahl  $z_n$  solcher Belegungen rekursiv und als Funktion von  $n$ .

Jany C. Binz, Bolligen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind von folgenden 8 Lesern Beiträge eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Mit einer Fallunterscheidung hat man relativ schnell eine explizite Formel für die Anzahl der Belegungen. Es ist fast schwieriger eine rekursive Formel anzugeben, was die Löser auch auf verschiedenen Arten machten. Wir folgen den Ausführungen von *Fritz Siegerist*.

Auf die Spalte  $[1, 1]^t$  muss zwingend  $[1, 4]^t$ ,  $[4, 1]^t$ ,  $[2, 3]^t$  oder  $[3, 2]^t$  folgen und nach einer Spalte  $[1, 2]^t$  oder  $[2, 1]^t$  kommt zwingend  $[1, 3]^t$ ,  $[2, 2]^t$  oder  $[3, 1]^t$  und je umgekehrt. Weitere Spalten kommen nicht vor. Die gesuchte Anzahl  $z_n$  beträgt also (mit  $n$  Faktoren bei jedem der vier Summanden):

$$z_n = 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \dots + 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \dots + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots + 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \dots$$

Für gerades  $n$  ist somit

$$z_n = 2(4^{n/2} + 6^{n/2})$$

und für ungerades  $n$  ist

$$z_n = 5(4^{(n-1)/2} + 6^{(n-1)/2}).$$

Die sich abwechselnden Faktoren und die übereinstimmenden Exponentialbasen 2 und  $\sqrt{6}$  bestimmen den viergliedrigen Ansatz

$$z_n = c_1 2^n + c_2 (-2)^n + c_3 \sqrt{6}^n + c_4 (-\sqrt{6})^n.$$

Er wird erfüllt von  $c_1 = \frac{9}{4}$ ,  $c_2 = -\frac{1}{4}$ ,  $c_3 = 1 + \frac{5}{2\sqrt{6}}$ ,  $c_4 = 1 - \frac{5}{2\sqrt{6}}$  und man erhält somit

$$z_n = \frac{9}{4} 2^n - \frac{1}{4} (-2)^n + \left(1 + \frac{5}{2\sqrt{6}}\right) \sqrt{6}^n + \left(1 - \frac{5}{2\sqrt{6}}\right) (-\sqrt{6})^n.$$

Aus dem charakteristischen Polynom  $(x-2)(x+2)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) = x^4 - 10x^2 + 24$  erhält man die lineare Rekursionsgleichung

$$z_n = 10z_{n-2} - 24z_{n-4}$$

mit den Startwerten  $z_2 = 20$ ,  $z_3 = 50$ ,  $z_4 = 104$  und  $z_5 = 260$ .

Bemerkung: Ein Leser weist darauf hin, dass fast dieselbe Aufgabe schon als Aufgabe 1391 in dieser Zeitschrift erschienen ist.

**Aufgabe 1421 (Die einfache dritte Aufgabe).** Es seien  $n^3$  ( $n \geq 2$ ) Würfelchen der Kantenlänge 1 zu einem Würfel mit der Kantenlänge  $n$  angeordnet und davon zwei schwarz und die übrigen weiss gefärbt. Die zwei ausgezeichneten schwarzen Würfelchen seien zufällig im  $n \times n \times n$ -Würfel verteilt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind sie benachbart, wenn dies bedeutet, dass zwei Seitenquadrate oder zwei Kanten oder bloss zwei Ecken der beiden schwarzen Würfelchen zusammenfallen?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Folgende 8 Leser haben Beiträge eingesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Hyunbin Yoo (KOR).

Die Vorgehensweisen unterscheiden sich dadurch, ob man von einem Würfelchen ausgeht und die Wahrscheinlichkeit bestimmt, dass das andere benachbart ist, oder ob man alle möglichen Fälle von zwei Würfelchen zählt, die benachbart sind. Schlussendlich kommt es auf dasselbe heraus. Wir folgen den Ausführungen von *Fritz Siegerist*.

Im Inneren des Würfels befinden sich  $(n-2)^3$  Würfelchen mit je 26 Nachbarn; im Inneren seiner 6 Flächen sind deren  $6(n-2)^2$  Würfelchen mit je 17 Nachbarn; im Inneren seiner 12 Kanten sind deren  $12(n-2)$  Würfelchen mit je 11 Nachbarn und deren 8 liegen in den Ecken mit je 7 Nachbarn. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt deshalb

$$\begin{aligned} & \frac{(n-2)^3}{n^3} \cdot \frac{26}{n^3-1} + \frac{6(n-2)^2}{n^3} \cdot \frac{17}{n^3-1} + \frac{12(n-2)}{n^3} \cdot \frac{11}{n^3-1} + \frac{8}{n^3} \cdot \frac{7}{n^3-1} \\ &= \frac{2(13n^2 - 14n + 4)}{n^3(n^2 + n + 1)}. \end{aligned}$$