Elemente der Mathematik 78 (2023), 85–89
DOI 10.4171/EM/503

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2023 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Aufgabe 1434: Berechne

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^3}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+2)^3},$$
$$T_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(3k+1)^3}, \quad T_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(3k+2)^3}.$$

Michael Vowe, Therwil, CH

Aufgabe 1435: Man beweise für $x, y \geq 0$, $x + y = 2$ die Ungleichung

$$\sqrt{x^2+3} + \sqrt{y^2+3} + \sqrt{xy+3} \geq 6.$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BIH

Aufgabe 1436 (Die einfache dritte Aufgabe): Bestimme das Volumen eines Spats mit lauter gleich langen Kanten der Länge a, bei dem an einer Ecke die Kanten mit drei gleich grossen Winkeln φ zusammen stossen.

Walter Burgherr, Rothenburg, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2022

Aufgabe 1422. Seien w_a, w_b und w_c die Längen der Winkelhalbierenden eines Dreiecks mit Fläche F. Beweise, dass

$$w_a w_b + w_b w_c + w_c w_a \geq 3\sqrt{3}F$$

gilt, mit Gleichheit nur für das gleichseitige Dreieck.

Albert Stadler, Herrliberg, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 7 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Eckard Specht (Magdeburg, D), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Grundsätzlich kann die Aufgabe als Extremalproblem gelöst werden, was die Mehrheit der Löser mehr oder weniger ausführlich getan haben. Auch eine direkte Herleitung ist möglich, aber recht aufwändig. Wir folgen den Ausführungen von *Kee-Wai Lau*, der auch eine Referenz für die Aufgabe angibt.

Ein Beweis der Aufgabe findet sich in einem Artikel von Jiang Liu auf den Seiten 90–96 des Buches *Frontiers in Elementary Mathematics* (auf chinesisch), herausgegeben von Ji Chen und Zhonghao Ye, welches 1996 von Jiangsu Educational Press in Jiangsu, China herausgegeben wurde. Liu gibt auch an, dass nach einem Brief von Ji Chen, Zhen Wang die Ungleichung bereits 1993 bewiesen hatte. Wir geben hier eine Übersetzung von Lius Beweis an.

Seien wie üblich s der halbe Umfang, r der Inkreisradius und R der Umkreisradius des Dreiecks. Unter Benutzung von

$$w_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad s-a = r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad abc = 4Rrs, \quad a = 2R\sin(\alpha)$$

und etwas Trigonometrie erhält man

$$\frac{s-a}{aw_a} = \frac{b+c}{2as}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{1}$$

Weiter folgt aus dem Sinussatz

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\sin(\beta)+\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{\cos(\frac{\beta-\gamma}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \leq \frac{1}{\sin(\frac{\alpha}{2})}, \tag{2}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $b = c$. Durch Summation von (1) und Benutzung von (2) und $\cot(\frac{\alpha}{2}) + \cot(\frac{\beta}{2}) + \cot(\frac{\gamma}{2}) = \frac{s}{r}$ ergibt sich

$$\sum_{\text{zykl.}} \frac{s-a}{aw_a} = \frac{1}{2s}\sum_{\text{zykl.}} \frac{b+c}{a}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{1}{2s}\sum_{\text{zykl.}} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2r}, \tag{3}$$

mit Gleichheit genau beim gleichseitigen Dreieck.

Für den weiteren Beweis wird das folgende Lemma benötigt.

Lemma. *Seien x, y, z positive reelle Zahlen. Für das Dreieck ABC gilt dann*

$$\frac{s-a}{x}+\frac{s-b}{y}+\frac{s-c}{z}\geq\frac{(ax+by+cz)s}{ayz+bxz+cxy},$$

mit Gleichheit nur, falls $x=y=z$.

Ein Beweis erschien im Artikel von Jian Liu, Another inequality involving the lengths of the sides and its applications (auf chinesisch), *Zhongxue Shuxue (Suzhou)* **11** (1992), 11–14.

Setzt man im Lemma $x=aw_a$, $y=bw_b$, $z=cw_c$, so erhält man

$$\frac{1}{2r}\geq\frac{s(a^2w_a+b^2w_b+c^2w_c)}{abc(w_aw_b+w_bw_c+w_cw_a)}$$

unter Benutzung von (3), und mit $abc=4Rrs$ ergibt sich daraus

$$2R(w_aw_b+w_bw_c+w_cw_a)\geq a^2w_a+b^2w_b+c^2w_c. \tag{4}$$

Wendet man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf die Vektoren

$$\left(\frac{a}{\sqrt{w_bw_c}},\frac{b}{\sqrt{w_cw_a}},\frac{c}{\sqrt{w_aw_b}}\right)\quad\text{und}\quad\left(\sqrt{w_bw_c},\sqrt{w_cw_a},\sqrt{w_aw_b}\right)$$

an, so erhält man

$$\frac{a^2}{w_bw_c}+\frac{b^2}{w_cw_a}+\frac{c^2}{w_aw_b}\geq\frac{4s^2}{w_aw_b+w_bw_c+w_cw_a},$$

und nach Multiplikation dieser Ungleichung mit $w_aw_bw_c$ und Benutzung von (4) folgt

$$R(w_aw_b+w_bw_c+w_cw_a)^2\geq 2s^2w_aw_bw_c.$$

Mit $w_a=2\sqrt{bcs(s-a)}/(b+c)$, der Heronschen Flächenformel und $abc=4RF$ folgt daraus schliesslich

$$(w_aw_b+w_bw_c+w_cw_a)^2\geq\frac{64F^2s^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Schlussendlich, unter Anwendung der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel $(a+b)(b+c)(c+a)\leq(\frac{4s}{3})^3$ folgt

$$(w_aw_b+w_bw_c+w_cw_a)^2\geq 27F^2,$$

was die Behauptung beweist.

Da uns ein Beweis des Lemmas nicht zur Verfügung steht, sei hier ein Beweis angefügt. Die Ungleichung des Lemmas lässt sich umformen zu

$$(ayz+bxz+cxy)\big((s-a)yz+(s-b)xz+(s-c)xy\big)-sxyz(ax+by+cz)\geq 0.$$

Die linke Seite lässt sich als quadratische Funktion

$$G(x, y, z) = g_1(x, y)z^2 - 2g_2(x, y)z + c(s - c)x^2y^2 \geq 0$$

in der Variablen z deuten, mit

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= a(s - a)y^2 - 2(s - a)(s - b)xy + b(s - b)x^2, \\ g_2(x, y) &= (s - c)\big((s - b)x + (s - a)y\big)xy. \end{aligned}$$

Betrachtet man $g_1(x, y)$ als quadratische Funktion in y, so ist die Diskriminante gleich

$$-4s(s - a)(s - b)(s - c)x^2 = -4F^2x^2 < 0$$

und daher wegen $a(s - a) > 0$ insgesamt $g_1(x, y) > 0$. Nun lässt sich $G(x, y, z)$ als

$$G(x, y, z) = \frac{\big(g_1(x, y)z - g_2(x, y)\big)^2 + F^2x^2y^2(x - y)^2}{g_1(x, y)} \geq 0$$

schreiben, mit Gleichheit nur, falls $x - y = 0$ und $g_1(x, y)z - g_2(x, y) = 0$. Es gilt aber $g_1(x, x) = c(s - c)x^2$ und $g_2(x, x) = c(s - c)x^3$. Daher ist $G(x, y, z) = 0$ nur, falls $x = y = z$.

Bemerkung. Ein Leser führt an, dass dieselbe Aufgabe als Aufgabe 2029 in der Zeitschrift *Crux Mathematicorum* **21** (1996), Nr. 3 erschienen ist. Der einzige Löser war Kee-Wai Lau mit einer anderen als der hier publizierten Lösung.

Aufgabe 1423. Beweise, dass

$$\left\lfloor \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{n^2 + k} \right\rfloor = 2n + 1$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt, wobei $\lfloor x \rfloor$ den ganzzahligen Teil der Zahl x bezeichnet.

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BIH und Mihály Bencze, Brașov, RO

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 13 Leser haben Lösungen zugesandt: Ulrich Abel (Friedberg, D), Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walther Janous (Innsbruck, A), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Joachim Klose (Bonn, D), Harald Merk (Biberach, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Seán Stewart (Thuwal, SA), Lienhard Wimmer (Isny, D), Roland Wyss (Flumenthal, CH) und Hyunbin Yoo (KOR).

Im Wesentlichen läuft die Aufgabe darauf hinaus, zwei Ungleichungen zu beweisen. Dies wurde von den Lösern auf recht unterschiedliche Weise gehandhabt. Allerdings ist hier eine sehr elementare Herleitung möglich. Ähnlich wie *Ulrich Abel*, dessen Ausführungen wir folgen, sind auch einige andere Leser vorgegangen.

Nach der dritten binomischen Formel gilt

$$\sqrt{n^2 + k} - n = \frac{k}{\sqrt{n^2 + k} + n}.$$

Wegen $2n < \sqrt{n^2+k} + n < \sqrt{(n+1)^2} + n = 2n+1$ für $1 \le k \le 2n$ folgt daraus

$$n + \frac{k}{2n+1} < \sqrt{n^2+k} < n + \frac{k}{2n} \quad \text{für } 1 \le k \le 2n.$$

Schliesslich ergibt sich durch Summation und mit $\sum_{k=1}^{2n} k = 2n(2n+1)/2$ sofort

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(n + \frac{k}{2n+1}\right) = 2n+1 < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{n^2+k} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(n + \frac{k}{2n}\right) = 2n+1+\frac{1}{2n},$$

was die Behauptung zeigt.

Aufgabe 1424 (Die einfache dritte Aufgabe). Die regulären 2×2-Matrizen über dem Körper $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ (Rechnen modulo 2) bilden eine multiplikative Gruppe. Zu welcher wohlbekannten Gruppe ist diese isomorph? Man finde dazu auch mindestens einen geeigneten Isomorphismus.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgende 9 Lesern sind Zuschriften eingegangen: Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Hyunbin Yoo (KOR).

Wenn man einmal die Anzahl Gruppenelemente hat, ist die Gruppe leicht identifiziert und ein (abstrakter) Gruppenhomomorphismus angegeben. Wir folgen der Lösung vom *Wolfgang Seewald*, der wie auch *Joachim Klose* einen natürlichen Gruppenhomomorphismus angegeben hat.

Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ besteht aus folgenden sechs Matrizen:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sie wirkt auf den Vektorraum $\mathbb{Z}_2^2$ mit dem Nullvektor $(0,0)^\top$ und den drei nichtverschwindenden Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Offenbar permutiert jedes Element der Gruppe die drei nichtverschwindenden Vektoren. Somit ist $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ isomorph zu S_3, der Permutationsgruppe der Ordnung 3. Der Isomorphismus ist offensichtlich: Zu jeder Matrix gehört die entsprechende Permutation von a, b, c. Andere Isomorphismen würde man erhalten, indem man a, b, c anders definiert, etwa

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Total gibt es sechs Isomorphismen, analog der Automorphismengruppe von S_3,

$$\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3.$$

Bemerkung. Ein Leser weist darauf hin, dass diese Aufgabe auch ausführlich auf Wikipedia (https://de.wikipedia.org/wiki/S3_(Gruppe)) behandelt wird.