Elemente der Mathematik 78 (2023), 135–140
DOI 10.4171/EM/509
© 2023 Swiss Mathematical Society
Published by EMS Press
This work is licensed under a CC BY 4.0 license

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2024 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Aufgabe 1437: Die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{\ln(1-x)}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = -1,$$

lässt sich in eine Potenzreihe entwickeln, etwa $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $|x| < 1$.

(a) Man beweise $\frac{1}{3k^2} \leq a_k \leq \frac{2}{k}$ für $k \geq 1$.

(b) Konvergieren die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und falls ja, gegen welchen Grenzwert?

Frieder Grupp, Bergrheinfeld, D

Aufgabe 1438: Es seien $z_j = r_j e^{it_j}$ zwei Punkte in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ mit $0 < r_j < 1$ und $|t_j| < \pi/2$. Weiterhin sei $\Delta = \langle z_1, z_2, 1 \rangle$ das durch die Punkte z_1, z_2, 1 bestimmte abgeschlossene Dreieck. Man zeige: Für alle $z = re^{it} \in \Delta$ mit $|t| < \pi/2$ gilt

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \max\left\{\frac{|1-z_1|}{1-|z_1|}, \frac{|1-z_2|}{1-|z_2|}\right\} \quad \text{und} \quad \frac{|t|}{1-r} \leq \max\left\{\frac{|t_1|}{1-r_1}, \frac{|t_2|}{1-r_2}\right\}.$$

Raymond Mortini, Metz, F und Rudolf Rupp, Nürnberg, D

Aufgabe 1439 (Die einfache dritte Aufgabe): Man betrachte die Permutation von n verschiedenen Ziffern $1, 2, 3, \ldots, n$. Welche geraden Permutationen g besitzen mindestens eine „Quadratwurzel“ f im Sinne von $f \circ f = g$, und wie lässt sich eine solche Permutation f aus g konstruieren?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2022

Aufgabe 1425. Die Folge $Q_0(x), Q_1(x), \ldots$ von Polynomen sei rekursiv definiert durch $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) + nQ_{n-1}(x)$ für $n \geq 1$. Man beweise:

(a) Wird $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} x^k$ gesetzt, so gilt

$$b_{2k}^{(2n)} = \binom{n}{k} \prod_{r=1}^{n-k} (2n - 2r + 1) \quad \text{und} \quad b_{2k+1}^{(2n+1)} = \binom{n}{k} \prod_{r=0}^{n-k-1} (2n - 2r + 1).$$

(b) Die Nullstellen der Polynome $Q_n(x)$ $(n \geq 1)$ sind einfach und liegen alle auf einer Geraden. Die Nullstellen von $Q_n(x)$ und $Q_{n+1}(x)$ trennen sich, d. h., zwischen zwei benachbarter Nullstellen von $Q_{n+1}(x)$ liegt stets eine Nullstelle von $Q_n(x)$.

(c) Ist z_n diejenige Nullstelle von $Q_n(x)$ mit grösstem Imaginärteil, so gilt

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{n+1}} \quad (n \geq 2).$$

Frieder Grupp, Bergrheinfeld, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 6 Lesern sind Beiträge eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Gerhard Wanner (Genève, CH).

Erkennt man die Verwandtschaft zu den Hermiteschen Polynomen (Drehung der Nullstellenmenge um 90°), so kann man daraus fast alle Behauptungen dieser Aufgabenstellung gewinnen. Vollständige Lösungen sind nur von *Joachim Klose* und *Bernhard Ruh*, dessen Lösung wir folgen, eingetroffen.

(a) Der Vollständigkeit halber sei noch die Eigenschaft

$$b_{2k}^{(2n+1)} = b_{2k+1}^{(2n)} = 0$$

erwähnt, welche aber aus der gegebenen Rekursion sofort folgt. Der Beweis für die restlichen Koeffizienten erfolgt rekursiv. Der Nachweis für $n = 0$ und $n = 1$ ist klar. Im Weiteren ist

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) + nQ_{n-1}(x) &= \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} x^{k+1} + n \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(n-1)} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} b_{k-1}^{(n)} x^k + n \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(n-1)} x^k \\ &= b_n^{(n)} x^{n+1} + b_{n-1}^{(n)} x^n + b_0^{(n-1)} x^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k-1}^{(n)} + n b_k^{(n-1)}) x^k. \end{aligned}$$

Nun vergleichen wir dies mit $Q_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k^{(n+1)} x^k$. Für $k = 0, n, n+1$ ist die Gleichheit leicht nachweisbar. Für die restlichen k bleibt

$$b_{k-1}^{(n)} + n b_k^{(n-1)} = b_k^{(n+1)}$$

zu zeigen. Für ungerades bzw. gerades n bedeutet dies

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1} \quad \text{bzw.} \quad n\binom{n-1}{k}=(n-k)\binom{n}{k}.$$

Dies sind aber zwei bekannte Identitäten.

(b) Für das Folgende ist es von Vorteil, an Stelle von Q_n die (wohlbekannten) Hermiteschen Polynome der Wahrscheinlichkeitsrechnung He_n zu untersuchen. Sie sind definiert durch $\mathrm{He}_0(x)=1$, $\mathrm{He}_1(x)=x$, $\mathrm{He}_{n+1}(x)=x\,\mathrm{He}_n(x)-n\,\mathrm{He}_{n-1}(x)$ und sind wegen $Q_n(x)=(-i)^n\,\mathrm{He}_n(ix)$ sozusagen das reelle Pendant von Q_n. Der Beweis, dass He_n genau n verschiedene reelle Nullstellen besitzt, wird meistens mit dem Satz von Sturm geführt. Zuerst zeigt man mit Induktion leicht ${\mathrm{He}_n}'=n\,\mathrm{He}_{n-1}$. Aus der Rekursionsgleichung ergibt sich dann, dass die Elemente $\mathrm{He}_n,\mathrm{He}_{n-1},\dots,\mathrm{He}_0$ eine Sturmsche Kette bilden. Die Anzahl der reellen Nullstellen von $\mathrm{He}_n(x)$ im Intervall $[a,b)$ erhält man dann gemäss dem Sturmschen Satz als Differenz $\sigma(a)-\sigma(b)$, wobei $\sigma(x)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $\mathrm{He}_n(x),\mathrm{He}_{n-1}(x),\dots,\mathrm{He}_0(x)$ bezeichnet. In unserem Fall erhält man unmittelbar $\sigma(-\infty)-\sigma(\infty)=n-0=n$. Entsprechend hat $Q_n(x)$ genau n verschiedene Nullstellen auf der imaginären Achse. Weiter liegt wegen ${\mathrm{He}_{n+1}}'=(n+1)\,\mathrm{He}_n$ und dem Satz von Rolle jede der n Nullstellen von He_n zwischen zwei Nullstellen von He_{n+1}, was die in der Aufgabe beschriebene Trennungseigenschaft begründet.

(c) Mit x_n sei die grösste Nullstelle von $\mathrm{He}_n(x)$ bezeichnet; x_n ist gleichzeitig die Stelle des „letzten“ Extremums (Minimum) von $\mathrm{He}_{n+1}(x)$. Um die Differenz abzuschätzen, legen wir in diesem letzten Minimum ein Taylorpolynom an. Man beachte, dass wegen der Eigenschaft $\mathrm{He}'_{n+1}=(n+1)\,\mathrm{He}_n$ die Koeffizienten des Taylorpolynoms vom quadratischen Term an alle positiv sind und dass He_{n+1} mit seinem $n+1$-ten Taylorpolynom übereinstimmt. Deshalb ist x_{n+1} kleiner als oder gleich gross wie die einzige rechts von x_n stehende Nullstelle des Taylorpolynoms vom Grad grösser gleich 2.

Für das Taylorpolynom vom Grad 2, wegen $\mathrm{He}_{n+1}(x_n)=-n\,\mathrm{He}_{n-1}(x_n)$ (Rekursionsformel) und $\mathrm{He}''_{n+1}(x_n)=n(n+1)\,\mathrm{He}_{n-1}(x_n)$ erhalten wir

$$T_2(x_n+h)=-n\,\mathrm{He}_{n-1}(x_n)+\frac{n(n+1)\,\mathrm{He}_{n-1}(x_n)}{2}h^2.$$

Das Berechnen der Nullstellen liefert die Abschätzung

$$x_{n+1}\le x_n+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}},$$

welche leider etwas schwächer ist als in der Aufgabe verlangt. Wir benötigen also das Taylorpolynom dritten Grades. Wegen

$$\mathrm{He}'''_{n+1}(x)=(n+1)n(n-1)\,\mathrm{He}_{n-2}(x)=(n+1)n\big(x\,\mathrm{He}_{n-1}(x)-\mathrm{He}_n(x)\big)$$

erhalten wir dafür

$$T_3(x_n+h)=-n\,\mathrm{He}_{n-1}(x_n)+\frac{n(n+1)\,\mathrm{He}_{n-1}(x_n)}{2}h^2+\frac{n(n+1)x_n\,\mathrm{He}_{n-1}(x_n)}{6}h^3.$$

Es ist nun einfacher, nicht die Nullstelle zu berechnen, sondern nachzuweisen, dass der Wert $T_3\big(x_n + \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{n+1}}\big)$ positiv ist. Tatsächlich ist

$$T_3\left(x_n + \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{n+1}}\right) = n\,\mathrm{He}_{n-1}(x_n) \cdot \frac{(9-5\sqrt{3})x_n - (3\sqrt{3}-5)\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

Nun ist $\mathrm{He}_{n-1}(x_n) > 0$, da x_n grösser als die letzte Nullstelle von He_{n-1} ist und eine Rechnung zeigt, dass obiger Zähler für $x_n \geq \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{n+1}$ grösser oder gleich Null ist. Es ist aber bekannterweise $x_n \geq \sqrt{n-1}$ $(*)$ und klarerweise $\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{n+1} \leq \sqrt{n-1}$ für $n \geq 2$, was den Beweis der Ungleichung abschliesst.

Bemerkung. *Joachim Klose* gewinnt die Abschätzung $(*)$ leicht aus dem Koeffizienten $-b_{n-2}^{(n)}x^{n-2}$ von $\mathrm{He}_n(x)$ und der Faktorisierung $\mathrm{He}_n(x) = \prod_u (x-u)$, wobei u die Nullstellenmenge von He_n durchläuft.

Aufgabe 1426. Für ein Dreieck ABC mit den Winkelhalbierenden $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ beweise man die Ungleichung

$$\frac{a+b}{w_\alpha + w_\beta} + \frac{b+c}{w_\beta + w_\gamma} + \frac{c+a}{w_\gamma + w_\alpha} \geq 2\sqrt{3}.$$

Nguyen Duy Khanh, Nam Dinh, VN

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 9 Lesern sind Beiträge zugesandt worden: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Die Lösungsstrategien unterscheiden sich dadurch, ob man die Aufgabe als Extremalproblem oder ob man die behauptete Ungleichung direkt verifiziert. Wir folgen der Lösung von *Michael Vowe*, der mit sehr elementaren Ungleichungen auskommt.

Mit der bekannten Darstellung von w_α und der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel erhält man

$$w_\alpha = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)} \leq \sqrt{s(s-a)}$$

mit Gleichheit nur, falls $b = c$. Mit der Ungleichung zwischen dem quadratischen und arithmetischen Mittel

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

folgt

$$w_\alpha + w_\beta = 2\sqrt{s}\left(\frac{\sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}}{2}\right) \leq \sqrt{2s}\sqrt{c}.$$

Wegen $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ist demnach

$$\frac{a+b}{w_\alpha + w_\beta} + \frac{b+c}{w_\beta + w_\gamma} + \frac{c+a}{w_\gamma + w_\alpha} \geq \frac{2}{\sqrt{2s}}\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{b}}\right)$$

und es bleibt zu zeigen, dass

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{b}} \geq \sqrt{6s}.$$

Quadriert man beide Seiten, so erhält man die äquivalente Ungleichung

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + 2(a+b+c) \geq 6s$$

bzw.

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq (a+b+c)abc.$$

Aus $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$ folgt $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ und für unseren Fall

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq ab^2c + bc^2a + ca^2b = (a+b+c)abc.$$

Gleichheit gilt nur für das gleichseitige Dreieck.

Bemerkung. *Walther Janous* verallgemeinert die Aufgabe und beweist für nichtnegative reelle Zahlen p die schärfere Ungleichung

$$\frac{p(a+b)+(1-p)c}{\sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}} + \frac{p(b+c)+(1-p)a}{\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c}} + \frac{p(c+a)+(1-p)b}{\sqrt{s-c}+\sqrt{s-a}} \geq (p+1)\sqrt{3s}$$

und erhält interessante Resultate für die Fälle $p = 0$, $p = \frac{1}{2}$ und $p = 1$ (Aufgabe).

Aufgabe 1427 (Die einfache dritte Aufgabe). Einem Rechteck mit Seitenverhältnis $r : 1$ $(1 \leq r \leq 2)$ soll das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Konstruiere bzw. falte dieses Dreieck und bestimme das Verhältnis von Dreieckinhalt zu Rechteckinhalt. Wann ist dieses Verhältnis minimal?

André Kiener, Oberdorf SO, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 10 Leser haben Lösungen zugesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Hyunbin Yoo (Busan, KOR) und Josef Züger (Bonaduz, CH).

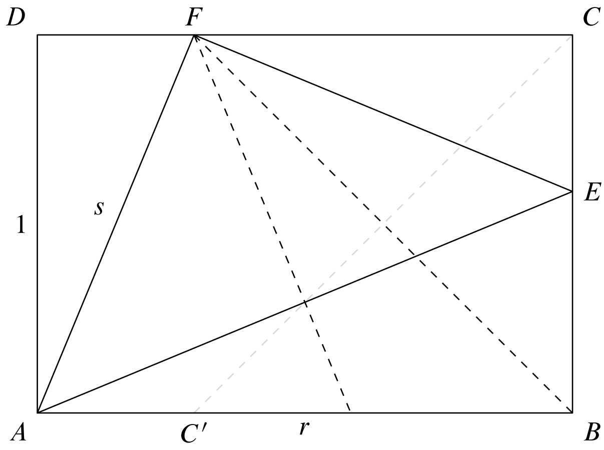
Die eingereichten Lösungen unterscheiden sich nur durch Details. Wir folgen den Ausführungen von *Fritz Siegerist*, der wie andere auch, noch ein paar zusätzliche Angaben macht.

Die Dreiecke AFD und FEC sind kongruent. Für beliebiges r bestimmen somit 2 Faltungen die Ecken des Dreiecks (siehe Figur, dunkel gestrichelte Linien).

Es ist $s = \sqrt{1 + (r-1)^2}$ und das gesuchte Flächenverhältnis ist

$$f(r) = \frac{s^2/2}{r} = \frac{r^2 - 2r + 2}{2r} = \frac{r}{2} + \frac{1}{r} - 1.$$

Das Flächenverhältnis wird durch $f'(r) = 0$ minimal. Es resultiert $r = \sqrt{2}$, das DIN A Format. Dann gilt $r - 1 = \tan(\frac{\pi}{8})$; der rechte Winkel links unten wird also im Verhältnis $1 : 2 : 1$ geteilt und das Dreieck AEB ist zu den Dreiecken AFD und FEC ähnlich.



Kuriosum. Die beiden Teilungen der Rechteckseiten durch die Punkte E und F haben genau dann dasselbe (und zwar goldene) Verhältnis, wenn $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, d. h., das goldene Rechteck vorliegt.

Korrigendum. Durch ein Versehen sind in den Löserlisten zu den Aufgaben 1419, 1420 und 1421 *Wolfgang Seewald* und in den Löserlisten zu den Aufgaben 1422, 1423 und 1424 *Bernhard Ruh* unerwähnt geblieben.