
Die Infizierung des \mathbb{Z}^2

Klaus Altmann

Klaus Altmann wurde 1986 an der Humboldt-Universität zu Berlin promoviert (Deformationen algebraischer Singularitäten) und ist nach Stationen in Kaiserslautern und Düsseldorf jetzt Professor an der Freien Universität Berlin. Sein Forschungsgebiet ist die torische Geometrie.

1 Vier Punkte in der Ebene

1.1 Eine seltsame Ordnungsrelation

Für zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ sagen wir, dass „ P vor Q “ liegt (und schreiben $P < Q$), falls für deren Koordinaten

$$Q_1 - P_1 = 1 \quad \text{oder} \quad Q_2 - P_2 = 1$$

gilt. Mit anderen Worten, der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ verläuft von 0 zu einem beliebigen Punkt auf den beiden roten Geraden in Abbildung 1. Wir haben vier solcher Vektoren, nämlich $(5, 1)$, $(1, 3)$, $(-4, 1)$ und $(1, -2)$ als Beispiele in grüner Farbe eingezeichnet. Diese Relation führt zu unserem wichtigsten Begriff, nämlich dem der *exzeptionellen Folgen* von Punkten mit ganzzahligen Koordinaten.

Der Hintergrund des Artikels ist die Untersuchung der Struktur aller maximalen exzeptionellen Folgen auf torischen Varietäten vom Picard-Rang 2. Darauf wird aber nur kurz im letzten Kapitel eingegangen. Das Ziel des vorliegenden Artikels ist dagegen, diese und benachbarte Fragestellungen in eine völlig andere und elementare Sprache umzuformulieren und dann zu diskutieren. Es wird schnell klar, dass man so auf schwierige und auch bisher noch nicht gelöste Probleme stößt. Konkret werden endliche Punktkonfigurationen in der Ebene betrachtet, deren Lage streng reglementiert ist. Man fragt dann, wie sich diese Konfigurationen nach bestimmten Regeln ausbreiten können, um schließlich die gesamte Ebene zu „infizieren“. Ausgangspunkt ist der kleinste Spezialfall von vier Punkten – hier kann man schnell und spielerisch einen ersten Eindruck von der Problemstellung bekommen. Während sich das zweidimensionale Problem umfassend und klar lösen lässt, wird auch gezeigt, wie die natürliche Verallgemeinerung auf drei Dimensionen offene Fragen erzeugt. Hier handelt der kleinste Spezialfall von gewissen räumlichen Anordnungen von acht Punkten.

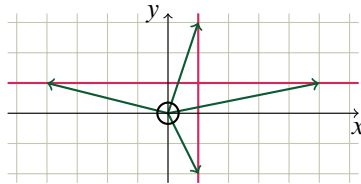


Abbildung 1. Erlaubte Verbindungsvektoren

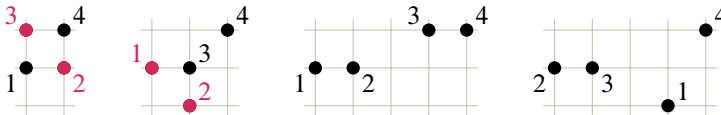


Abbildung 2. Exzeptionelle Folgen mit jeweils vier Elementen

Definition 1.1. Eine endliche Folge $\mathcal{P} = (P^1, P^2, \dots, P^n)$ von Punkten $P^i \in \mathbb{Z}^2$ heißt *exzeptionell*, falls für alle Indizes $i < j$ immer $P^i < P^j$ gilt.

Bemerkung 1.2. Die eingangs definierte Relation $P < Q$ ist keine Ordnungsrelation im üblichen Sinne. Zunächst ist sie offensichtlich nicht transitiv – so ist z. B. $(0, 0) < (1, 1) < (2, 2)$, aber $(0, 0) \not< (2, 2)$. Und dann gibt es auch noch das Phänomen, dass z. B. $(1, 0) < (0, 1)$ und gleichzeitig $(0, 1) < (1, 0)$ gelten. Immerhin kann ein Punkt P niemals die Relation $P < P$ erfüllen.

Die fehlende Transitivität impliziert, dass es in der vorigen Definition 1.1 nicht genügt, nur $P^i < P^{i+1}$ zu fordern. Es sind wirklich alle $\binom{n}{2}$ Paare zu prüfen.

1.2 Beispiele exzeptioneller Folgen

In Abbildung 2 sehen wir typische Beispiele exzeptioneller Folgen mit jeweils vier Punkten, d. h. $n = 4$. Um die Beschriftung zu verschlanken, haben wir dabei die Punkte P^i nur mit ihrer Nummer, also einfach mit i beschriftet. In den beiden linken Folgen sind die jeweiligen Reihenfolgen der rot markierten Punkte P^2/P^3 bzw. P^1/P^2 nicht zwingend – d. h., wenn man sie vertauscht, bleibt die Folge exzeptionell. Im Unterschied dazu hat man bei den beiden rechten Folgen keine Wahl. Schließlich kann man durch Verschiebung des horizontalen Punktpaares auf der mittleren Geraden beliebige weitere exzeptionelle Folgen konstruieren.

1.3 Maximale exzeptionelle Folgen

Es ist kein Zufall, dass alle unsere Beispiele in Abbildung 2 aus genau vier Punkten bestehen – denn das ist die maximale Anzahl, die überhaupt möglich ist. Um das einzusehen, bezeichnen wir mit $\underline{\mathcal{P}} \subset \mathbb{Z}^2$ die einer (exzeptionellen) Folge \mathcal{P} zugrundeliegende Menge. Außerdem sei $\pi_{\mathcal{P}}$ die Hintereinanderausführung der beiden Abbildungen

$$\pi_{\mathcal{P}} : \underline{\mathcal{P}} \hookrightarrow \mathbb{Z}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \quad \text{mit} \quad P^i \mapsto (\overline{P_1^i}, \overline{P_2^i}),$$

wobei $\bar{g} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hier die Restklasse modulo 2 einer ganzen Zahl $g \in \mathbb{Z}$ bezeichnet. Es folgt direkt aus Definition 1.1, dass die Gesamtabbildung $\pi_{\mathcal{P}}$ für exzeptionelle \mathcal{P} injektiv ist. Da der Zielraum $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ aber nur vier Elemente hat, ergibt sich sofort $|\mathcal{P}| \leq 4$.

Durch diese Abschätzung werden natürlich die *maximalen* exzeptionellen Sequenzen, also die mit genau vier Elementen, besonders interessant. Ein naheliegendes Ziel ist es dann, qualitative Eigenschaften solcher Sequenzen zu finden (sind sie z. B. immer räumlich beschränkt?) – oder sogar alle Möglichkeiten zu klassifizieren. Gibt es z. B. weitere Beispiele, die sich grundlegend von denen aus Abbildung 2 unterscheiden?

1.4 Die Infektion des Gitters \mathbb{Z}^2

Eine andere mögliche qualitative Eigenschaft einer exzeptionellen Folge ist ihre Infektiosität. Dazu stellen wir uns die Elemente beliebig gegebener Teilmengen $M \subseteq \mathbb{Z}^2$ als infiziert vor und postulieren folgende Ansteckungsregel.

Definition 1.3. (1) Die durch M *direkt* infizierte Menge $\text{Inf}(M) \supseteq M$ sei

$$\text{Inf}(M) := M \cup \bigcup_{P, P+(1,0) \in M} (P + (\mathbb{Z}, 0)) \cup \bigcup_{P, P+(0,1) \in M} (P + (0, \mathbb{Z})).$$

(2) Die durch M *mittelbar* infizierte Menge ist

$$\text{Inf}^\infty(M) := \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Inf}^k(M).$$

Mit anderen Worten: Jedes Paar horizontal oder vertikal benachbarter Punkte aus M steckt zunächst die gesamte Verbindungsgerade an, d. h. schickt sie nach $\text{Inf}(M)$. In k Schritten erreicht die Infektion dann die Menge

$$\text{Inf}^k(M) := \text{Inf}(\text{Inf}^{k-1}(M)) \quad \text{mit} \quad \text{Inf}^0(M) := M.$$

Der oben erwähnte Begriff der Infektiosität einer exzeptionellen Folge \mathcal{P} kann nun folgendermaßen präzisiert werden.

Definition 1.4. Eine exzeptionelle Folge \mathcal{P} heißt *voll (infektiös)*, wenn irgendwann jeder Punkt infiziert wird, d. h., wenn $\text{Inf}^\infty(\mathcal{P}) = \mathbb{Z}^2$ gilt.

Wir können jetzt die Beispiele von Abbildung 2 aus Abschnitt 1.2 auf ihre Infektiosität hin untersuchen:

- (1) In allen vier Fällen gehört die mittlere horizontale Gerade zu $\text{Inf}(\mathcal{P}) = \text{Inf}^1(\mathcal{P})$.
- (2) Im nächsten Schritt sehen wir, dass die vertikale Gerade durch P^4 in $\text{Inf}^2(\mathcal{P})$ enthalten ist – dasselbe gilt aber stets auch für die linke vertikale Nachbargerade.
- (3) Die zwei benachbarten vertikalen Geraden aus (2) bedeuten, dass wir in jeder Höhe ein infiziertes horizontales Punktepaar haben. Es ergibt sich $\text{Inf}^3(\mathcal{P}) = \mathbb{Z}^2$.

1.5 Volle exzeptionelle Folgen sind maximal

Es ist klar, dass die Infektiosität einer (exzeptionellen) Folge mit ihrer Größe wächst. Dazu passt die folgende Beobachtung.

Satz 1.5. *Eine volle exzeptionelle Folge ist stets maximal.*

Beweis. Analog zur Abbildung $\pi_{\mathcal{P}}$ in Abschnitt 1.3 betrachten wir jetzt die Surjektion $\pi : \mathbb{Z}^2 \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Für jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{Z}^2$ gilt

$$\pi(M) = \pi(\text{Inf}(M)),$$

denn falls P und $P + (1, 0)$ Elemente von M sind, so gilt $\overline{P}, \overline{P} + (1, 0) \in \pi(M)$, und auch die gesamte Menge $\pi(P + (\mathbb{Z}, 0))$ besteht lediglich aus diesen beiden Punkten. Die analoge Behauptung bleibt auch für die vertikalen Nachbarn richtig. Mit Induktion erhalten wir also für volle exzeptionelle Folgen \mathcal{P} die Gleichheiten

$$\pi(\underline{\mathcal{P}}) = \pi(\text{Inf}^\infty(\underline{\mathcal{P}})) = \pi(\mathbb{Z}^2) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

Das ist aber gleichbedeutend mit der Maximalität, wie sie in Abschnitt 1.3 definiert wurde. ■

Eine Frage, die aus dieser Aussage entsteht, ist, ob die Maximalität einer exzeptionellen Folge ihre volle Infektiosität, d. h. die Eigenschaft „voll“ impliziert. Am Ende von Abschnitt 1.4 haben wir gesehen, dass das für die Beispiele von Abbildung 2 aus Abschnitt 1.2 zutrif. Die Antwort wird in einer allgemeineren Situation in Satz 2.6 gegeben.

2 Anordnungen von $a \cdot b$ Punkten in der Ebene

Die Betrachtungen aus Kapitel 1 lassen sich in verschiedene Richtungen verallgemeinern. Wir bleiben zunächst in Dimension 2, erhöhen aber die Anzahl der Punkte durch die Einführung von gewissen Parametern (a, b) .

2.1 Einordnung des vorigen Kapitels als Spezialfall $a = b = 2$

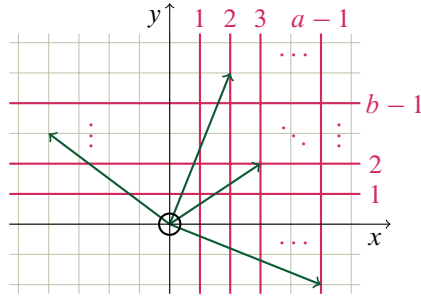
Wir betten jetzt das Szenario von Kapitel 1 systematisch in einen allgemeineren Kontext ein. Dazu fixieren wir zwei natürliche Zahlen $a, b \geq 2$. Die Relation $P < Q$ aus Abschnitt 1.1 wird dann mittels

$$Q_1 - P_1 \in \{1, \dots, a - 1\} \quad \text{oder} \quad Q_2 - P_2 \in \{1, \dots, b - 1\}$$

definiert, siehe Abbildung 3 für eine schematische Darstellung der jetzt erlaubten Verbindungsvektoren.

Der Begriff der exzeptionellen Folge aus Definition 1.1 kann wörtlich beibehalten werden. Ein Beispiel dafür, mit $a = 4$ und $b = 3$, ist später in Abbildung 6 zu sehen. Die exzeptionelle Folge besteht aus den 12 grünen und roten Punkten in vertikaler lexikographischer Ordnung – d. h. vorrangig wird gemäß aufsteigender Höhe, und erst danach von links nach rechts geordnet.

Satz/Definition 2.1. *Eine exzeptionelle Folge \mathcal{P} besteht aus höchstens $a \cdot b$ Elementen. Folgen mit $|\mathcal{P}| = ab$ nennen wir maximal.*

Abbildung 3. Erlaubte Verbindungsvektoren für $a, b \geq 2$

Auch diese Aussage konnte im Prinzip wörtlich aus Kapitel 1 übertragen werden. Der Beweis von Abschnitt 1.3 thematisiert jetzt die injektive Abbildung

$$\pi_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \hookrightarrow (\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}),$$

die genau für die maximalen Folgen bijektiv wird.

Die Ansteckungsregel aus Abschnitt 1.4 wird angepasst: Um eine horizontale oder vertikale Gerade zu infizieren, benötigen wir jetzt a nebeneinander bzw. b übereinander liegende Punkte. Mit anderen Worten, wir ändern lediglich den ersten Teil der Definition 1.3 folgendermaßen ab.

Definition 2.2. Die durch ein $M \subseteq \mathbb{Z}^2$ direkt infizierte Menge $\text{Inf}(M) \supseteq M$ ist definiert als

$$\text{Inf}(M) := M \cup \bigcup_{h(P) \subset M} (P + (\mathbb{Z}, 0)) \cup \bigcup_{v(P) \subset M} (P + (0, \mathbb{Z})),$$

wobei

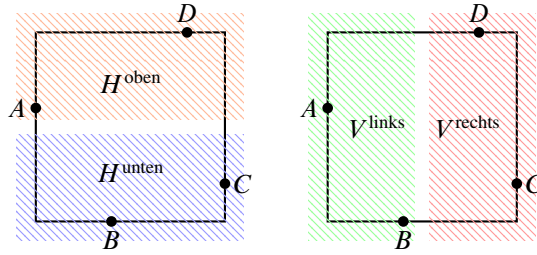
$$\begin{aligned} h(P) &:= \{P + (k, 0) \mid k = 0, 1, \dots, a-1\}, \\ v(P) &:= \{P + (0, l) \mid l = 0, 1, \dots, b-1\} \end{aligned}$$

ist. Der Begriff der mittelbaren Infektion bleibt wörtlich erhalten.

Schließlich überträgt sich Satz 1.5 zusammen mit seinem Beweis aus Abschnitt 1.5 genau auf unsere allgemeinere Situation. Das heißt, nur maximale exzeptionelle Folgen haben die Chance, die gesamte Ebene \mathbb{Z}^2 zu infizieren, also voll zu sein.

2.2 Maximale exzeptionelle Folgen in \mathbb{Z}^2 sind beschränkt

Wenn man die unbeschränkten Beispiele aus dem späteren Abschnitt 3.2 gesehen hat, wird man vorsichtig in Vermutungen über die möglichen Ausdehnungen exzeptioneller Folgen. Wir bezeichnen mit $\text{horz}(\mathcal{P})$ und $\text{vert}(\mathcal{P})$ die horizontale bzw. vertikale Ausdehnung von \mathcal{P} , also die Anzahl der vertikalen bzw. horizontalen Geraden (sic!), die man jeweils benötigt, um \mathcal{P} einschließlich seiner Lücken zu überdecken. In den vier Beispielen der Abbildung 2 bedeutet dies $\text{horz}(\mathcal{P}) = 2, 3, 5$ und $\text{vert}(\mathcal{P}) = 2, 3, 2, 3$ bei $a = b = 2$. In Abbildung 6 haben wir $\text{horz}(\mathcal{P}) = 8$ und $\text{vert}(\mathcal{P}) = 5$ bei $a = 4$ und $b = 3$.

Abbildung 4. Die horizontale und die vertikale Unterteilung von R

Satz 2.3. Für eine exzeptionelle Sequenz \mathcal{P} gilt stets

$$\text{horz}(\mathcal{P}) \leq 2a - 1 \quad \text{oder} \quad \text{vert}(\mathcal{P}) \leq 2b - 1.$$

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an, d. h. $\text{horz}(\mathcal{P}) \geq 2a$ und $\text{vert}(\mathcal{P}) \geq 2b$. Weiter bezeichnen wir mit $\underline{x} < \bar{x}$ und $\underline{y} < \bar{y}$ die extremen horizontalen und vertikalen Positionen von \mathcal{P} , d. h. $\text{horz}(\mathcal{P}) = \bar{x} - \underline{x} + 1$ und $\text{vert}(\mathcal{P}) = \bar{y} - \underline{y} + 1$, und

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \underline{y} \leq y \leq \bar{y}\}$$

ist das kleinste Rechteck (mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen), das \mathcal{P} enthält. Wir unterteilen dieses Rechteck folgendermaßen in Paare horizontaler und vertikaler Streifen:

$$\begin{aligned} H^{\text{unten}} &:= \{(x, y) \in R \mid y < \underline{y} + b\}, & H^{\text{oben}} &:= \{(x, y) \in R \mid y \geq \underline{y} + b\}, \\ V^{\text{links}} &:= \{(x, y) \in R \mid x < \underline{x} + a\}, & V^{\text{rechts}} &:= \{(x, y) \in R \mid x \geq \underline{x} + a\}, \end{aligned}$$

wie in Abbildung 4 skizziert. Dann gibt es auf dem Rand von R extremale Punkte von \mathcal{P} ,

$$A = (\underline{x}, y_A), \quad B = (x_B, \underline{y}), \quad C = (\bar{x}, y_C), \quad D = (x_D, \bar{y}) \in \mathcal{P},$$

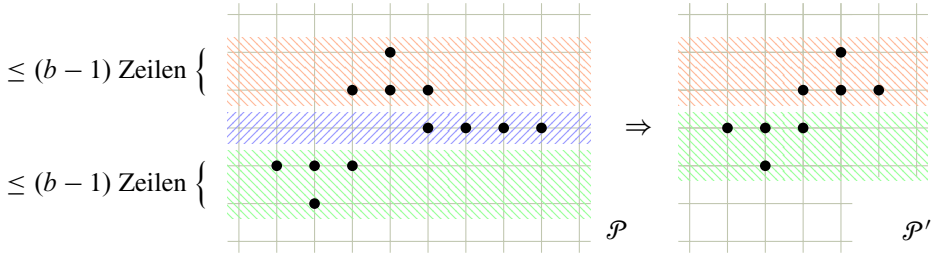
die zunächst nicht alle voneinander verschieden sein müssen – so könnte vielleicht $A = B$ oder $A = D$ gelten. Es ist aber garantiert, dass

$$A \in V^{\text{links}}, \quad B \in H^{\text{unten}}, \quad C \in V^{\text{rechts}} \quad \text{und} \quad D \in H^{\text{oben}}.$$

Die vertikale Position von A ist unbestimmt; dieser Punkt kann in H^{oben} oder in H^{unten} liegen. Wir nehmen aber jetzt an, dass der erste Fall zutrifft – so, wie es auch in der Skizze angedeutet ist. Der andere Fall verläuft dann analog.

Aus $A \in H^{\text{oben}}$ folgt nun aber sofort $A \neq B$ und $B \not< A$, wobei hier die aktualisierte Ordnungsrelation aus Abschnitt 2.1 gemeint ist. Die Exzeptionalitätsbedingung von Definition 1.1 impliziert dann aber $A < B$, was wiederum $B \in V^{\text{links}}$ nach sich zieht. Völlig analog erhalten wir daraus $B \neq C$ und $C \not< B$, also $B < C$ und damit $C \in H^{\text{unten}}$.

Aus den Relationen $B \not< A$ und $C \not< B$ folgt aber auch, dass die drei verschiedenen Punkte A, B, C in genau dieser Reihenfolge in der exzeptionellen Folge \mathcal{P} auftreten müssen. Das impliziert dann (trotz der fehlenden Transitivität von $<$) die Relation $A < C$. Andererseits sind A und C horizontal aber zu weit (mehr als a) voneinander entfernt, und aus $A \in H^{\text{oben}}$ und $C \in H^{\text{unten}}$ folgt zusätzlich $A_2 \geq C_2$; das ergibt einen Widerspruch. ■

Abbildung 5. Mittlere Zeilen zerlegen flache \mathcal{P} (hier ist $a = 4$, $b = 3$)

2.3 Kontraktion mittlerer Zeilen

Die Aussage von Satz 2.3 erlaubt uns, immer o. B. d. A. anzunehmen, dass eine exzeptionelle Folge \mathcal{P} aus höchstens $2b - 1$ Zeilen besteht, d. h., dass $\text{vert}(\mathcal{P}) \leq 2b - 1$ gilt. Wir werden das ab sofort tun und nennen solche Sequenzen *flach*.

Definition 2.4. Sei \mathcal{P} exzeptionell. Wir nennen die Zeilen, die zu allen (!) Elementen von \mathcal{P} einen vertikalen Abstand $< b$ haben, *mittlere Zeilen* von \mathcal{P} .

Nun ist klar, dass genau die flachen exzeptionellen Sequenzen stets mittlere Zeilen haben. Der Name stammt von solchen Sequenzen \mathcal{P} , für die sogar $\text{vert}(\mathcal{P}) = 2b - 1$ gilt – in diesem Fall gibt es genau eine mittlere Zeile (und diese liegt in der Mitte). Deren Bedeutung wird aber erst durch die folgende Konstruktion klar.

Jede mittlere Zeile einer (flachen) exzeptionellen Folge induziert eine disjunkte Zerlegung der zugrundeliegenden Menge $\underline{\mathcal{P}} = \underline{\mathcal{P}}^- \sqcup \underline{\mathcal{P}}^0 \sqcup \underline{\mathcal{P}}^+$ in die Punkte unter, auf oder über der jeweiligen mittleren Zeile, siehe Abbildung 5. Damit können wir $\underline{\mathcal{P}}' \subset \mathbb{Z}^2$ mittels

$$\underline{\mathcal{P}}' := (\underline{\mathcal{P}}^- + (0, 1)) \sqcup \underline{\mathcal{P}}^+$$

definieren. Mit anderen Worten, die mittlere Zeile von \mathcal{P} wird gestrichen, und die darunterliegenden Zeilen werden um 1 angehoben. Außerdem induziert die Ordnung in \mathcal{P} eine Ordnung in \mathcal{P}' .

Satz 2.5. Sei \mathcal{P} eine flache exzeptionelle Folge bezüglich der Parameter (a, b) . Dann ist \mathcal{P}' eine (nicht mehr unbedingt flache) exzeptionelle Folge bezüglich der reduzierten Parameter $(a, b - 1)$.

Beweis. Seien $(P^i)', (P^j)' \in \mathcal{P}'$ aus den zwei Punkten $P^i, P^j \in \underline{\mathcal{P}} \setminus \underline{\mathcal{P}}^0$ mit $i < j$ entstanden. Wir müssen nun die Gültigkeit der horizontalen oder vertikalen Abstandsregelung aus Abschnitt 2.1 nachprüfen.

Falls $P_1^j - P_1^i \in \{1, \dots, a - 1\}$, so gilt das unverändert auch für $(P^j)'_1 - (P^i)'_1$. Falls $(P^j)'_2 - (P^i)'_2 \leq 0$, so war auch $P_2^j - P_2^i \leq 0$. Und falls schließlich die vertikale Bedingung mit $(P^j)'_2 - (P^i)'_2 \geq b - 1$ verletzt wird, so folgt $P^i \in \underline{\mathcal{P}}^-$ und $P^j \in \underline{\mathcal{P}}^+$, also

$$(P^j)'_2 - (P^i)'_2 = (P^j)'_2 - (P^i)'_2 + 1 \geq b.$$

Und damit hatten auch schon P^i, P^j die vertikale Bedingung nicht erfüllt. ■

Diese Kontraktion mittlerer Zeilen eröffnet die Möglichkeit der vollständigen Induktion. In der Tat erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 2.6. *Sei \mathcal{P} eine flache, maximale exzeptionelle Sequenz. Dann enthalten mittlere Zeilen stets a aufeinanderfolgende Elemente, die kontrahierte Sequenz \mathcal{P}' ist maximal (bezüglich der geänderten Parameter) und \mathcal{P} ist voll.*

Beweis. Wir fixieren eine mittlere Zeile $Z_0 \subset \underline{\mathcal{P}}$ auf o. B. d. A. Höhe 0. Wir benutzen nun die Bijektion $\pi_{\mathcal{P}}: \mathcal{P} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})$ aus Abschnitt 2.1. Per Definition von Z_0 und dem Begriff einer mittleren Zeile folgt, dass

$$\pi_{\mathcal{P}}^{-1}((\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) \times \{0\}) = Z_0$$

gelten muss. Das impliziert $|Z_0| = a$, und die Abwesenheit von Lücken folgt dann direkt aus der Exzeptionalitätsbedingung.

Ein alternatives Argument benutzt zunächst nur $|Z_0| \leq a$ und folgert dann mittels

$$ab = |\mathcal{P}| = |\mathcal{P}'| + |Z_0| \leq a(b-1) + a = ab,$$

dass in der Mitte ein Gleichheitszeichen stehen muss, d. h. $|\mathcal{P}'| = a(b-1)$ und $|Z_0| = a$. Auf diese Weise haben wir auch gleich die Maximalität von \mathcal{P}' bewiesen.

Um schließlich \mathbb{Z}^2 aus \mathcal{P} heraus zu infizieren, beginnt man mit der mittleren Zeile Z_0 , die die gesamte horizontale Gerade $\mathbb{Z} \times \{0\}$ kontaminiert. Nun kann man per Induktion annehmen, dass \mathcal{P}' mittels der an die Parameter $(a, b-1)$ angepassten Regeln die Ebene \mathbb{Z}^2 infiziert. Und diesen Prozess kann man dann schrittweise mit \mathcal{P} für die Parameter (a, b) nachvollziehen. ■

2.4 Die Klassifikation aller flachen Folgen

Der Begriff der exzeptionellen Folge beinhaltet die Ordnung der Elemente von \mathcal{P} . Eine Umordnung wird fast immer die Exzeptionalitätsbedingung verletzen. Deshalb ist es bemerkenswert, dass flache, maximale exzeptionelle Sequenzen stets erlauben, sie vertikal lexikographisch anzuordnen – d. h. vorrangig mit aufsteigender Höhe, um danach von links nach rechts zu sortieren. Dieses Resultat wird in [2, Theorem 6.4] bewiesen.

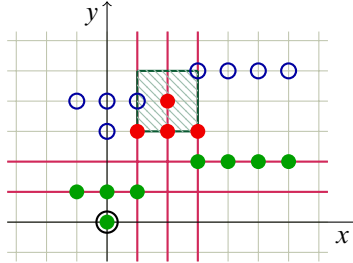
Diese Arbeit [2, Abschnitt (7.2)] erhält sogar eine vollständige Klassifikation aller maximalen exzeptionellen Sequenzen. Um diese wiederzugeben, benötigen wir zunächst das Rechteck

$$\square := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x \leq a-1, b \leq y \leq 2b-1\},$$

das in Abbildung 6 schraffiert ist. Wir bezeichnen außerdem für jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ und jedes $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$X_k := X \cap [y = k] := \{(x, y) \in X \mid y = k\}$$

die Schicht in Höhe k . Nun kann man alle maximalen exzeptionellen Folgen \mathcal{P} der Höhe $\text{vert}(\mathcal{P}) \leq 2b$ (bis auf mögliche Verschiebung, siehe [2, Theorem 7.7]) folgendermaßen explizit konstruieren.

Abbildung 6. Die Mengen X , Y und Z für $a = 4$ und $b = 3$

Definition 2.7. Eine Teilmenge $X \subseteq \square$ heißt *zulässig*, falls

- (1) $X = \emptyset$ oder $(a - 1, b) \in X_b$ (die rechte untere Ecke von \square),
- (2) jede horizontale Schicht X_k aus einer (möglicherweise leeren) Reihe von benachbarten Punkten besteht (d. h. ohne Lücke) und
- (3) $X_k \subseteq X_{k-1} + (0, 1)$ für $k \geq b + 1$.

Die dritte Bedingung sagt, dass es in X keine „überhängenden“ Punkte gibt. In Abbildung 6 ($a = 4, b = 3$) wurde eine zulässige Beispielmengung X , bestehend aus vier Punkten, in rot eingezeichnet.

Konstruktion von $\mathcal{P}(X)$. Nach Wahl einer zulässigen Teilmenge $X \subseteq \square$ führt man nun folgende Schritte aus:

- (4) Ergänze X mit einer Teilmenge $Y \subset \mathbb{Z}^2 \setminus X$, so dass
 - (i) $Y_k = \emptyset$ für $k < b$ oder $k \geq 2b$ und
 - (ii) für alle übrigen $k \in \{b, b + 1, \dots, 2b - 1\}$ die Vereinigung $Y_k \sqcup X_k$ in dieser Reihenfolge eine Folge von genau a Punkten ohne Lücke bildet.
- (5) Verschiebe Y nach unten, d. h., wir definieren $Z := Y - (0, b)$ und setzen dann schließlich $\mathcal{P}(X) := Z \cup X$. Bezüglich der lexikographischen Ordnung wird das eine exzeptionelle Folge $\mathcal{P}(X)$.

In Abbildung 6 haben wir die Elemente von Y als leere Kreise in blau und Z als gefüllte Kreise in grün markiert. Drei Punkte bleiben zu bemerken:

- (a) Nach Fixierung von $X \subseteq \square$ sind die Schichten Y_k nur für $X_k \neq \emptyset$ eindeutig bestimmt. Die horizontale Positionierung der anderen Y_k ist dagegen frei wählbar – und es sind genau diese, die zu maximalen Zeilen, nämlich Z_{k-b} , in \mathcal{P} führen.
- (b) Falls $X_{2b-1} \neq \emptyset$, so hat \mathcal{P} die Höhe $\text{vert}(\mathcal{P}) = 2b$, ist also nicht flach – und hat auch keine Zeile der Länge a , die man, wie in Abschnitt 2.3, kontrahieren könnte. Aber, sozusagen als Illustration zu Satz 2.3, sieht man hier direkt, dass $\text{horz}(\mathcal{P}) \leq 2a - 1$ gilt.
- (c) Für $a = b = 2$ ist $\square = \{(1, 2), (1, 3)\}$, d. h., für flache maximale \mathcal{P} haben wir nur die Wahl zwischen $X = \emptyset$ und $X = \{(1, 2)\}$. Beide Fälle sind in Abbildung 2 jeweils zweimal vertreten.

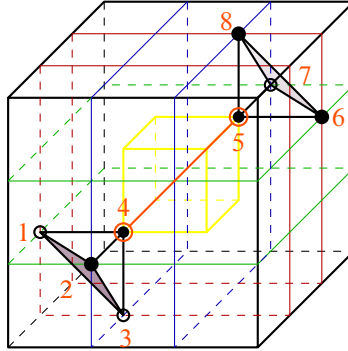


Abbildung 7. Länge, Breite und Höhe sind jeweils 4

3 Übergang zu drei Dimensionen

In [1] sind wir zur Situation $a = b = 2$ zurückgekehrt und haben dann die Situation von Kapitel 1 auf andere Weise verallgemeinert als bisher in Kapitel 2, nämlich durch Erhöhung der Dimension. Wir arbeiten jetzt in \mathbb{Z}^3 statt in \mathbb{Z}^2 .

3.1 Die veränderte Lage

Wir verallgemeinern das Szenario von Kapitel 1 auf drei Dimensionen. Zunächst definieren wir für zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{Z}^3$ die Relation $P < Q$ mittels

$$Q_1 - P_1 = 1 \quad \text{oder} \quad Q_2 - P_2 = 1 \quad \text{oder} \quad Q_3 - P_3 = 1.$$

Wir übernehmen dann wörtlich den Begriff der *exzeptionellen Folge* \mathcal{P} aus Definition 1.1. Die analog zu Abschnitt 1.3 definierte Abbildung $\pi_{\mathcal{P}} : \underline{\mathcal{P}} \hookrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ist wieder injektiv auf exzeptionellen \mathcal{P} , und wir definieren maximale Folgen durch $|\mathcal{P}| = 8$. Der Infektionsbegriff von Definition 1.3 muss nur für die *direkten Infektionen* von $M \subseteq \mathbb{Z}^3$ aus dem ersten Teil aktualisiert werden:

$$\begin{aligned} \text{Inf}(M) := M \cup & \bigcup_{P, P+(1,0,0) \in M} (P + (\mathbb{Z}, 0, 0)) \\ & \cup \bigcup_{P, P+(0,1,0) \in M} (P + (0, \mathbb{Z}, 0)) \\ & \cup \bigcup_{P, P+(0,0,1) \in M} (P + (0, 0, \mathbb{Z})). \end{aligned}$$

Wieder impliziert die volle Infektiosität, d. h. $\text{Inf}^{\infty}(\underline{\mathcal{P}}) = \mathbb{Z}^3$, die Eigenschaft „maximal“, analog zu Abschnitt 1.5.

Man erhält erste Beispiele maximaler exzeptioneller Folgen in \mathbb{Z}^3 , indem man zwei beliebige ebene exzeptionelle Folgen $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2 \subset \mathbb{Z}^2$ mit $|\mathcal{P}^1| = |\mathcal{P}^2| = 4$ in zueinander parallele Ebenen mit Abstand 1 legt.

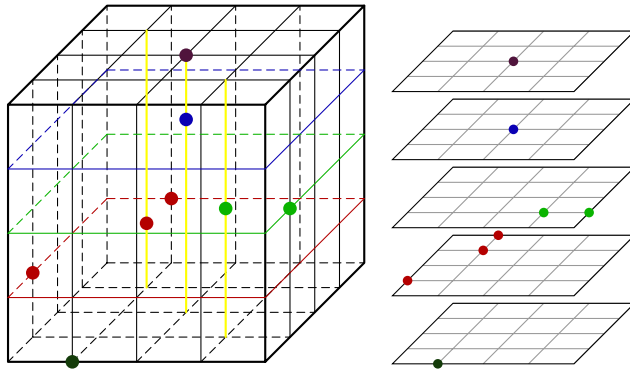


Abbildung 8. Länge, Breite und Höhe sind jeweils 5

3.2 Unbeschränkte Ausdehnung

Es gibt aber auch gleichmäßiger ausgedehnte Beispiele, wie die in Abbildung 7 und Abbildung 8, siehe [1, Abschnitt (3.3)]. Darüber hinaus wird in [1, Example 3.4] die maximale exzeptionelle Folge

$$(0, 0, 0) (1, n, n) (1, n, n + 1) (1, n + 1, 0) (2, 1, 0) (2, n, 1) (n, n + 1, 1) (n + 1, n + 1, 1)$$

präsentiert, die sich mit wachsendem Parameter $n \in \mathbb{N}$ gleichzeitig beliebig weit in alle drei Richtungen ausdehnt. Ein Ergebnis, wie es Satz 2.3 war, kann es also jetzt nicht mehr geben.

Selbst die eher trivialen zweischichtigen Beispiele vom Ende von Abschnitt 3.1 liefern mit

$$\mathcal{P}^1 = ((0, 0), (7, 1), (8, 1), (1, 2)) \quad \text{und} \quad \mathcal{P}^2 = ((0, 0), (1, 7), (1, 8), (2, 1))$$

einen Beleg dafür, dass es nicht immer möglich ist, eine der (jetzt sechs verschiedenen) lexikographischen Ordnungen zu wählen.

3.3 Und wo bleibt das Positive?

In [1, Theorem 2.4] wurde gezeigt, dass wenigstens eines unserer Resultate aus Satz 2.6 bestehen bleibt – maximale exzeptionelle Sequenzen sind stets voll. Allerdings konnte diese Aussage nur mit der abschließenden Hilfe eines Computers verifiziert werden, was bei der überschaubaren Größe des Problems ernüchternd ist.

Erklärbar wird das aber dadurch, dass zwei unserer wichtigsten Hilfsmittel aus der zweidimensionalen Theorie, nämlich die Beschränktheit und die lexikographische Ordnung, jetzt nicht mehr zur Verfügung stehen.

Das Problem, ob maximale exzeptionelle Folgen immer voll sind, bleibt offen für allgemeinere Parameter (a, b, c) in \mathbb{Z}^3 oder auch schon für die kleinsten Parameter $(2, 2, 2, 2)$ in \mathbb{Z}^4 . Ein erster Schritt in diese Richtung ist allein die Frage, ob es in \mathcal{P} immer hinreichend viele nebeneinander liegende Punkte gibt, um eine erste Gerade zu infizieren.

4 Der Kontext des Problems

Wir erwähnen hier kurz und ohne nähere Erläuterungen die Ursprünge der bisherigen Ausführungen aus der algebraischen Geometrie. Vielleicht inspirieren die erwähnten Begriffe zum weiteren Lesen oder Nachschlagen.

4.1 Derivierte Kategorien

Jede projektive algebraische Varietät X definiert eine triangulierte Kategorie $\mathcal{D}(X)$, die von der Kategorie der kohärenten Garben abgeleitet ist. Dieses $\mathcal{D}(X)$ hat sich als eine reichhaltige Invariante erwiesen.

Man versucht deshalb, solche Kategorien in kleinere Einheiten zu zerteilen, um sie besser untersuchen zu können. Die hierfür benutzte Methode ist die Verwendung semi-orthogonaler Zerlegungen, deren stärkste Version durch volle exzeptionelle Sequenzen gegeben wird. Darunter versteht man Folgen $\mathcal{F} = (F^1, \dots, F^n)$ von Objekten $F^i \in \mathcal{D}(X)$, die $\mathcal{D}(X)$ erzeugen, und zwar so, dass es keinerlei rückwärts gewandte Morphismen $F^j \rightarrow F^i$ für $i < j$ gibt (plus einige weitere Bedingungen).

Es gibt eine gewisse Analogie zur linearen Algebra – Basen $\mathcal{B} = (B^1, \dots, B^n)$ eines Vektorraumes sind dort durch die Eigenschaften, dass sie den Raum erzeugen und linear unabhängig sind, charakterisiert. Alternativ kann man aber auch jeweils eine dieser Eigenschaften dadurch ersetzen, dass die Länge n die richtige, nämlich die Dimension des Vektorraumes ist.

Im Kontext der derivierten Kategorien ist das aber ein offenes Problem, das in Kuznetsovs ICM-Vortrag [6] thematisiert wurde.

Vollheitsvermutung. Wenn $\mathcal{D}(X)$ durch eine exzeptionelle Folge erzeugt ist, dann ist jede andere exzeptionelle Folge mit derselben Länge voll.

4.2 Torische Varietäten

Es gibt eine spezielle Klasse von Varietäten, die Objekten der diskreten Geometrie (Polyeder, Kegel und Fächer) zugeordnet werden können. Diese sind durch die Wirkung eines dichten Torus charakterisiert und heißen deshalb *torische Varietäten*, siehe [3] für eine ausführliche Behandlung.

In [5] hat Kawamata gezeigt, dass glatte torische Varietäten (oder sogar Stacks) stets eine volle exzeptionelle Sequenz besitzen. Diese (und schon gar nicht alle) konnten aber nicht explizit beschrieben werden.

Andererseits ist man versucht, solche Sequenzen zugänglicher zu machen, indem man zusätzliche Anforderung an sie stellt. So kann man z. B. von den Komplexen $F^i \in \mathcal{D}(X)$ verlangen, dass deren Kohomologie in einem Grad konzentriert ist, d. h., dass sie Garben sind. Man könnte sogar fortfahren und für F^i nur Vektorbündel oder sogar nur invertierbare Garben, d. h. Geradenbündel, erlauben. Im Fall der torischen Varietäten kommt natürlicherweise auch noch die Forderung der Äquivarianz hinzu.

Diese möglichen Zusatzforderungen erschweren in jedem Schritt die Chance, dass solche Sequenzen tatsächlich existieren. In der Tat – das Kawamatas Resultat gegenüber-

liegende andere Extrem ist dabei das Resultat Efimovs in [4], dass nicht jede glatte torische Varietät eine volle exzeptionelle Folge *aus invertierbaren Garben* tragen kann.

4.3 Picard-Rang 2

Wenn man also an äquivarianten invertierbaren Garben für die F^i festhalten möchte – und erst diese ermöglichen eine wirklich einfache Beschreibung der Situation – dann muss man seine Voraussetzungen weiter verschärfen. Eine hinreichende (und eigentlich schon wieder zu scharfe) Bedingung ist die, dass der Picard-Rang gleich 2 ist. Dann ist die Existenz gesichert, und in [2] wurde die Kuznetsov-Vermutung für diese äußerst eingeschränkte Klasse von Folgen bewiesen. In unserem jetzigen Aufsatz haben wir davon einen Spezialfall präsentiert – nämlich $X = \mathbb{P}^{a-1} \times \mathbb{P}^{b-1}$. Das in den vorigen Abschnitten betrachtete Gitter \mathbb{Z}^2 entspricht dann der Picard-Gruppe, d. h., jeder Punkt $P \in \mathbb{Z}^2$ repräsentiert ein äquivariantes Geradenbündel F .

In Kapitel 3 sind wir zu $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ gewechselt. Diese Varietät hat dann allerdings schon den Picard-Rang 3 und führte zum Gitter \mathbb{Z}^3 .

Am Schluss ist es vielleicht noch interessant, welches die in Abschnitt 4.2 erwähnten Objekte der diskreten Geometrie sind, die die Varietäten $\mathbb{P}^{a-1} \times \mathbb{P}^{b-1}$ oder $(\mathbb{P}^1)^3$ hervorbringen – es sind das Rechteck $(a-1) \times (b-1)$ bzw. der Würfel mit Kantenlänge 1.

Literatur

- [1] K. Altmann and M. Altmann, Exceptional sequences of 8 line bundles on $(\mathbb{P}^1)^3$. *J. Algebr. Comb.* **56** (2022), no. 2, 305–322
- [2] K. Altmann and F. Witt, The structure of exceptional sequences on toric varieties of Picard rank two. arXiv: [2112.14637](https://arxiv.org/abs/2112.14637) [math.AG] (2021)
- [3] D. A. Cox, J. B. Little, and H. K. Schenck, *Toric varieties*. American Mathematical Society, Providence, 2011
- [4] A. I. Efimov, Maximal lengths of exceptional collections of line bundles. *J. Lond. Math. Soc. (2)* **90** (2014), no. 2, 350–372
- [5] Y. Kawamata, Derived categories of toric varieties. III. *Eur. J. Math.* **2** (2016), no. 1, 196–207
- [6] A. Kuznetsov, Semiorthogonal decompositions in algebraic geometry. In *Proceedings of the international congress of mathematicians (ICM 2014, Seoul, 2014)*. Vol. II: Invited lectures, pp. 635–660, KM Kyung Moon Sa, Seoul, 2014

Klaus Altmann
Institut für Mathematik, FU Berlin
Königin-Luise-Str. 24–26
14195 Berlin, Germany
altmann@math.fu-berlin.de