Elemente der Mathematik 78 (2023), 180–184
DOI 10.4171/EM/519

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2024 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Aufgabe 1440: Sei ABC ein nicht rechtwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt U. Sei D der Schnittpunkt der Geraden CU und AB und seien V und W die Umkreismittelpunkte der Dreiecke ACD resp. BCD. Die Gerade AW schneide BC im Punkt E und die Gerade BV schneide AC im Punkt F. Zeige, dass sich die Geraden VW und EF auf der Mittelsenkrechten von AB schneiden.

Trang Quang Hung, Hanoi, VN

Aufgabe 1441: Sei c die Kurve gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x(t) = t - \frac{A}{t}, \quad y(t) = t^2 + \frac{B}{t} \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für welche ganzzahligen Werte von A und B besitzt c eine Selbstüberschneidung mit senkrechtem Schnittwinkel?

Gregory Dresden, Lexington VA, USA

Aufgabe 1442 (Die einfache dritte Aufgabe): Es sei

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z}$$

mit positiven x, y, z in $\mathbb{R}$. Man bestimme

$$\min_{x^2+y^2+z^2=1} f(x, y, z).$$

Frieder Grupp, Bergrheinfeld, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2022

Aufgabe 1428. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Man bestimme die grösste Zahl $k_1 > 0$ und die kleinste Zahl $k_2 > 0$ derart, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$k_1 \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{ab+bc+ca}} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \le k_2 \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Péter Ivády, Budapest, H

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Beiträge von folgenden 12 Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Raymond Mortini (Metz, F) und Rudolf Rupp (Nürnberg, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Hat man die optimalen Werte der gesuchten Konstanten gefunden, lassen sich die zugehörigen Ungleichungen direkt nachweisen. Wir folgen der Lösung von *Roland Wyss*, die praktisch identisch mit derjenigen von *Bernhard Ruh* ist.

Mit den Abkürzungen

$$P = ab+bc+ca, \quad Q = a^2+b^2+c^2 \quad \text{und}$$
$$M = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

hat man die Aufgabenstellung

$$k_1 \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{P}} \le M \le k_2 \frac{Q}{P}$$

und man vermutet

$$\min_{a,b,c>0} M \cdot \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}} = \sqrt{2} \quad (\text{etwa für } a=b>0 \text{ und } c \to 0), \quad \text{also } k_1 = \sqrt{2},$$
$$\max_{a,b,c>0} M \cdot \frac{P}{Q} = \frac{3}{2} \quad (\text{für die Werte } a=b=c>0), \quad \text{also } k_2 = \frac{3}{2}.$$

Für den ersten Teil berechnet man den Ausdruck

$$\begin{aligned}&(M^2P-2Q)(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\\ &\quad = \sum_{\text{sym.}} a^7b + a^6bc - a^5b^3 + a^5b^2c + a^4b^3c + 4a^4b^2c^2 + 7a^3b^3c^2\end{aligned}$$

und erhält ein symmetrisches Polynom vom Grad 8 in a, b, c mit genau 6 negativen Summanden. Nun gilt aber

$$\sum_{\text{sym.}} a^7b - a^5b^3 = \sum_{\text{sym.}} ab(a^2-b^2)^2(a^2+b^2),$$

sodass der oben erwähnte Ausdruck grösser Null ist.

Für den zweiten Teil verarbeitet man den Ausdruck

$$(3Q - 2MP)(a+b)(b+c)(c+a)$$

und erhält nach subtiler Umformung

$$(3Q - 2MP)(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)\Big(\sum_{\text{sym.}}(a-b)^2(a+b)c\Big) \geq 0,$$

wegen der vorkommenden Quadrate.

Bemerkung. Weil nur positive Zahlen a, b, c zugelassen sind, gilt links auch die strengere Ungleichung mit $<$, wie auch einige Leser anmerkten.

Aufgabe 1429. In der xy-Ebene seien die „Brennpunkte" $F_1(-1,0)$ und $F_2(1,0)$ gegeben. Für einen Punkt P seien d_1 und d_2 die Abstände von P zu F_1 und F_2. Betrachtet man den geometrische Ort der Punkte P mit ${d_1}^{d_2} = k$ ($k > 1$ konstant), so entsteht für grosses k (etwa $k = 3$) ein Oval um die beiden Punkte F_1, F_2. Für kleiner werdendes k (etwas $k = 1.5$) erscheint ein birnenförmiges Gebilde, das sich bei weiterer Senkung von k so einschnürt, dass der betrachtete geometrische Ort in je ein Oval um F_1 und eines um F_2 zerfällt. Man gebe für $k = k^*$, wo sich die beiden Kurven gerade noch berühren, eine Gleichung an, aus der k^* numerisch ermittelt werden kann.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 13 Leser haben Zuschriften eingesandt: Ulrich Abel (Friedberg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Die meisten Löser bestimmen zuerst eine Gleichung für den x-Wert des Berührungspunktes im kritischen Fall k^* und bestimmen daraus den Wert von k^*. *Bernhard Ruh*, dessen Lösung wir folgen, wie auch andere Löser geben dann noch eine explizite Gleichung für k^* an.

Auf Grund des in der Aufgabe beschriebenen Verhaltens der Kurve ist k^* der grösste Wert, für den genau drei Kurvenpunkte auf der x-Achse liegen. Da für $y = 0$ aber

$$d_{1,2} = \sqrt{(x \pm 1)^2} = |x \pm 1|$$

ist, ist k^* der grösste Wert, für den der Graph der Funktion $f(x) = |x+1|^{|x-1|}$ genau drei gemeinsame Punkte mit der Horizontalen $y = k^*$ besitzt. Eine kurze Analyse dieses Graphen zeigt, dass die Horizontale durch das lokale Maximum gezogen werden muss, welches für $0 \leq x \leq 1$ erreicht wird. Da also nur x-Werte zwischen 0 und 1 relevant sind, kann $f(x)$ durch das einfachere $g(x) = (x+1)^{1-x}$ ersetzt werden. Wegen

$$g'(x) = g(x)\Big(-\ln(x+1) + \frac{1-x}{1+x}\Big) = 0$$

folgen nun die Gleichungen

$$\frac{1-x}{1+x} = \ln(1+x), \quad k = (x+1)^{1-x},$$

aus denen sich k^* relativ bequem numerisch berechnen lässt:

$$x \approx 0.45473, \quad k^* \approx 1.22676.$$

Da eine Gleichung in k gesucht ist, eliminieren wir aus obigen beiden Gleichungen die Variable x. Wegen $\ln(k) = (1-x)\ln(1+x) = \frac{(1-x)^2}{1+x}$ gelingt dies durch Lösen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - (2+\ln(k))x + 1 - \ln(k) = 0,$$

wobei das Wurzelvorzeichen durch $x < 1$ bestimmt wird. Man erhält

$$x = \frac{2+\ln(k) - \sqrt{\ln^2(k) + 8\ln(k)}}{2}.$$

Das Rückeinsetzen liefert die verlangte Gleichung in k, welche aber in jedem Fall sehr unhandlich ausfällt. In der Praxis ist wohl die obige Berechnung über den Zwischenwert x vorteilhafter.

Bemerkung. *Ulrich Abel* gibt die obigen Werte mithilfe der Lambertschen W-Funktion $W(x)$ an und erhält $x = \frac{2}{W(2e)} - 1$ und

$$k^* = \left(\frac{2}{W(2e)}\right)^{2-\frac{2}{W(2e)}} = e^{2W(2e)+\frac{2}{W(2e)}-4}.$$

Aufgabe 1430 (Die einfache dritte Aufgabe). Eine n-stellige natürliche Zahl $z = ab$ entstehe durch Aneinanderfügen zweier natürlichen Zahlen a und b. Wir nennen z eine Swapzahl, wenn durch Vertauschen von a und b ein echtes Vielfaches von z entsteht, wenn also $ba = k \cdot ab$ für ein natürliches $k \geq 2$.

(a) Bestimme alle Swapzahlen mit einstelligem a.

(b) Bestimme die kleinste Swapzahl mit $a = 12$.

Bernhard Ruh, Zuchwil, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 8 Lesern sind Lösungen eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Schreibt man sich die Bedingung für eine Swapzahl mit naheliegenden Methoden auf, kommt man sehr systematisch zu den Lösungen. Daher unterscheiden sich die eingereichten Beiträge nur in Details. Wir folgen der Lösung von *Frieder Grupp*.

Zu (a). Es sei $1 \leq a \leq 9$ und b eine n-stellige Zahl ($10^{n-1} \leq b < 10^n$). Die Zahl z kann dann in der Form $z = a \cdot 10^n + b$ dargestellt werden, die Zahl nach Vertauschen von

a und b ist dann $\tilde{z} = 10b + a$ und dies ist ebenfalls eine $(n+1)$-stellige Zahl. Notwendig dafür, dass z eine Swapzahl ist, ist dann

$$k \cdot z = \tilde{z} \iff a(k \cdot 10^n - 1) = b(10 - k).$$

Für $k \geq 6$ gibt es keine Lösung, da $b < 10^n$ ist. Für $k = 2$ resp. $k = 4$ resp. $k = 5$ gibt es ebenfalls keine Lösung, da dann a den Teiler 8 resp. den Teiler 2 resp. den Teiler 5 haben muss und dies wiederum $b < 10^n$ widerspricht.

Im Fall $k = 3$ lautet die Gleichung $a(3 \cdot 10^n - 1) = 7b$. Der Wert $a = 7$ ist wiederum wegen $b < 10^n$ nicht möglich, es muss also

$$3 \cdot 10^n \equiv 1 \bmod (7)$$

sein und dies ist der Fall, wenn $n \equiv -1 \bmod 6$ ist. Wiederum wegen $b < 10^n$ muss dann $a = 1$ oder $a = 2$ sein. Alle Swapzahlen sind daher gegeben durch die Wertepaare

$$(a,b) = \left(1, \frac{3 \cdot 10^{6m-1} - 1}{7}\right) \quad \text{und} \quad (a,b) = \left(2, 2 \cdot \frac{3 \cdot 10^{6m-1} - 1}{7}\right)$$

mit $m \in \mathbb{N}$.

Explizit ist dann $b = 42857\overline{142857}_r$ für $a = 1$ und $b = 85714\overline{285714}_r$ für $a = 2$ ($r \in \mathbb{N}_0$), wobei das Symbol mit dem Index r eine r-malige Wiederholung der Ziffernfolge bedeutet, im Fall $r = 0$ entfällt diese Ergänzung.

Zu (b). Es sei b wiederum eine n-stellige Zahl. Die Zahl z kann dann in der Form $z = 12 \cdot 10^n + b$ dargestellt werden, die Zahl nach Vertauschen von a und b ist dann $\tilde{z} = 100b + 12$ und diese ebenfalls eine $(n+2)$-stellige Zahl. Notwendig dafür, dass z eine Swapzahl ist, ist dann

$$k \cdot z = \tilde{z} \iff 12(k \cdot 10^n - 1) = b(100 - k).$$

Für $k \geq 8$ kann diese Gleichung wegen $b < 10^n$ nicht gelöst werden. Für $k = 4$ resp. $k = 5$ gibt es ebenfalls keine Lösung wegen der Teilbarkeit durch 8 resp. durch 5 der rechten Seite.

In den verbleibenden Fällen gibt es Lösungen.

- Für $k = 2$ muss $6(2 \cdot 10^n - 1) = 49b$ erfüllt sein, also $2 \cdot 10^n \equiv 1 \bmod (49)$ mit der kleinsten Lösung $n = 40$.
- Für $k = 3$ muss $12(3 \cdot 10^n - 1) = 97b$ erfüllt sein, also $3 \cdot 10^n \equiv 1 \bmod (97)$ mit der kleinsten Lösung $n = 94$.
- Für $k = 6$ muss $6(6 \cdot 10^n - 1) = 47b$ erfüllt sein, also $6 \cdot 10^n \equiv 1 \bmod (47)$ mit der kleinsten Lösung $n = 44$.
- Für $k = 7$ muss $4(7 \cdot 10^n - 1) = 31b$ erfüllt sein, also $7 \cdot 10^n \equiv 1 \bmod (31)$ mit der kleinsten Lösung $n = 13$.

Unter all diesen Lösungen ist $b = \frac{4}{31}(7 \cdot 10^{13} - 1)$ die kleinste, also

$$129\,032\,258\,064\,516$$

die kleinste Swapzahl mit $a = 12$.