Elemente der Mathematik 79 (2024), 38–44
DOI 10.4171/EM/524



# Aufgaben

## Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2024 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

**Aufgabe 1443:** Man zeige, dass der Wert des Integrals

$$I = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\log(\frac{x+1}{x-1})}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$$

mit der Catalanschen Konstante $C$ übereinstimmt.

Raymond Mortini, Metz, F

**Aufgabe 1444:** Sei $A_1A_2A_3$ ein Dreieck und $B_1B_2B_3$ ein gleichseitiges Dreieck mit $B_i \in [A_{i+1}A_{i+2}]$ (alle Indizes modulo 3). Weiter seien die Winkel $\varepsilon_i = \sphericalangle(A_iB_{i+1}B_{i+2})$ und $\hat{\varepsilon}_i = \sphericalangle(A_iB_{i+2}B_{i+1})$. Man zeige, dass für das Dreieck $B_1B_2B_3$ mit kleinstem Flächeninhalt gilt:

(a) $\prod_{i=1}^{3}\cos(\varepsilon_i) = \prod_{i=1}^{3}\cos(\hat{\varepsilon}_i)$,

(b) $\sum_{i=1}^{3}\frac{\sin(\varepsilon_i-\hat{\varepsilon}_i)}{\sin(\varepsilon_i+\hat{\varepsilon}_i)} = 0$.

Hans Brandstetter, Wien, A

**Aufgabe 1445 (Die einfache dritte Aufgabe):** Sei $P$ ein vom Scheitelpunkt verschiedener Punkt auf einer Parabel und $P'$ der dazu symmetrische Punkt bezüglich der Parabelachse. Man betrachte alle Ellipsen $E$, die die Parabel in $P$ und $P'$ berühren und deren Hauptachse senkrecht zur Parabelachse ist. Man bestimme den geometrischen Ort aller Brennpunkte von $E$.

Lajos László, Budapest, H

## Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2023

**Aufgabe 1431.** Man bestimme den Wert der Doppelreihe

$$\sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(2n+1)(2k+1)(2n+2k+3)^2} \binom{-1/2}{n}.$$

Raymond Mortini, Metz, F und Rudolf Rupp, Nürnberg, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Folgende 4 Lesern haben Beiträge zugesandt: Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Allen Lesern gelang es die Doppelreihe in ein bestimmtes Integral umzuwandeln, dessen Wert im Prinzip bekannt ist. Wir folgen den Ausführungen von *Albert Stadler*, dem es als Einzigem gelang, das Integral explizit auszuwerten.

Der Wert der Doppelreihe beträgt

$$\begin{aligned}\pi\Bigg(1-\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}\Big(1+\frac{11\pi}{12}\Big)-\frac{\log(2)}{4}\Big(1+\frac{5\log(2)}{4}\Big)\\ +\log(1+\sqrt{2})\Big(1-\frac{\sqrt{2}+\log(2)}{2}+\frac{5\log(1+\sqrt{2})}{8}\Big)\\ +\frac{5}{2}\operatorname{Li}_2\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)-\frac{3}{4}\operatorname{Li}_2\Big(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\Big)-\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2(1-\sqrt{2})\Bigg) \approx 0.10879\ldots,\end{aligned}$$

wobei $\operatorname{Li}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ den Dilogarithmus bezeichnet.

Mit der Formel

$$\int_0^1 x^{2n+2k+2} \log(x)\, dx = -\frac{1}{(2n+2k+3)^2}$$

sowie den bekannten Taylorentwicklungen für die arcsin- und arctan-Funktion lässt sich die Doppelreihe in ein einfaches Integral umformen:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(2n+1)(2k+1)(2n+2k+3)^2} \binom{-1/2}{n} \\ &= -\int_0^1 \Bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}\Bigg)\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-1/2}{n} x^{2n+1}\Bigg) \log(x)\, dx \\ &= -\int_0^1 \arctan(x) \arcsin(x) \log(x)\, dx. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &\int_0^1 x^{2k+1} \arcsin(x) \log(x)\, dx \\ &\quad = \frac{\pi}{(k+1)(k+1)!^2}\Big(-\frac{k!(k+1)!}{8}+\frac{(2k+1)!}{4^{k+2}} \\ &\qquad\qquad +\frac{(k+1)(2k+1)!}{4^{k+2}}(\mathrm{H}_{k+1}-\mathrm{H}_{k+\frac{1}{2}})\Big). \end{aligned}$$

Mathematica berechnet das Integral in wenigen Augenblicken. Damit ist

$$\begin{aligned}
S &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \int_0^1 x^{2k+1} \arcsin(x)\log(x)\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi(-1)^k}{(2k+1)(k+1)(k+1)!^2}\Big(\frac{k!(k+1)!}{8} - \frac{(2k+1)!}{4^{k+2}} \\
&\qquad\qquad - \frac{(k+1)(2k+1)!}{4^{k+2}}(\mathrm{H}_{k+1} - \mathrm{H}_{k+\frac{1}{2}})\Big) \\
&= s_1 + s_2 + s_3,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{\pi}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(k+1)^2} \\
s_2 &= -\frac{\pi}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(k+1)(k+1)!^2 4^k} = -\frac{\pi}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}\binom{-1/2}{k} \\
s_3 &= -\frac{\pi}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(k+1)!^2 4^k}(\mathrm{H}_{k+1} - \mathrm{H}_{k+\frac{1}{2}}) \\
&= -\frac{\pi}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}\binom{-1/2}{k}(\mathrm{H}_{k+1} - \mathrm{H}_{k+\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

Dabei wurde in $s_2$ und $s_3$ die Identität $\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k}$ verwendet.

Es werden jetzt $s_1$, $s_2$ und $s_3$ ausgewertet.

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{\pi}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(k+1)^2} = \frac{\pi}{8} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Big(-\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{4}{2k+1} - \frac{2}{k+1}\Big) \\
&= \frac{\pi}{8}\Big(-\frac{\pi^2}{12} + 4\arctan(1) - 2\log(2)\Big) = \frac{\pi}{8}\Big(-\frac{\pi^2}{12} + \pi - 2\log(2)\Big).
\end{aligned}$$

Durch fortgesetzte Integration der Binomialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ findet man

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\binom{-1/2}{k} x^k &= \frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+1}, \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}\binom{-1/2}{k} x^k &= \frac{4(\sqrt{1+x}-1) - 4\log\big(\frac{1+\sqrt{1+x}}{2}\big)}{x} \quad \text{und} \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}\binom{-1/2}{k} x^k &= \frac{1}{x}\Big(8(\sqrt{1+x}-1) - 2\log^2(2) + 8\log(2) \\
&\qquad + \big(-8 + 4\log(2) - 2\log(1+\sqrt{1+x})\big) \\
&\qquad \times \log(1+\sqrt{1+x}) \\
&\qquad + 4\,\mathrm{Li}_2\Big(\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+x})\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$
\begin{aligned}
s_2 &= -\frac{\pi}{16}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^3}\binom{-1/2}{k} \\
&= -\frac{\pi}{16}\Big(8(\sqrt{2}-1) - 2\log(2)^2 + 8\log(2) \\
&\qquad + \big(-8 + 4\log(2) - 2\log(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})\big)\log(1+\sqrt{2}) \\
&\qquad + 4\,\mathrm{Li}_2\Big(\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_{k+1} - \mathrm{H}_{k+\frac{1}{2}} &= \int_0^1 \frac{1-t^{k+1}}{1-t}\,dt - \int_0^1 \frac{1-t^{k+\frac{1}{2}}}{1-t}\,dt = \int_0^1 t^k\frac{t^{1/2}-t}{1-t}\,dt \\
&= 2\int_0^1 t^{2k}\frac{t-t^2}{1-t^2}t\,dt = 2\int_0^1 t^{2k+2}\frac{1}{1+t}\,dt.
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$
\begin{aligned}
s_3 &= -\frac{\pi}{16}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}\binom{-1/2}{k}(\mathrm{H}_{k+1}-\mathrm{H}_{k+\frac{1}{2}}) \\
&= -\frac{\pi}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}\binom{-1/2}{k}\int_0^1 t^{2k}\frac{t^2}{1+t}\,dt \\
&= -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{(\sqrt{1+t^2}-1) - \log\big(\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{2}\big)}{1+t}\,dt.
\end{aligned}
$$

Durch die Substitution $t = \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u})$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}\,dt &= \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{(u^2+1)^2}{2u^2(u^2+2u-1)}du \\
&= \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2u^2} - \frac{1}{u} + \frac{4}{u^2+2u-1}\,du = (\sqrt{2}-1)\big(1+\log(1+\sqrt{2})\big).
\end{aligned}
$$

Weiter ist $\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \log(2)$ und wiederum durch die Substitution $t = \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u})$ erhält man

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\log\big(\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{2}\big)}{1+t}\,dt &= \int_1^{1+\sqrt{2}} \log\Big(\frac{(u+1)^2}{4u}\Big)\frac{u^2+1}{u(u^2+2u-1)}\,du \\
&= \int_1^{1+\sqrt{2}} \log\Big(\frac{(u+1)^2}{4u}\Big)\Big(\frac{1}{u+1-\sqrt{2}} + \frac{1}{u+1+\sqrt{2}} - \frac{1}{u}\Big) \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \frac{7}{8}\log^2(2) - \frac{1}{2}\log(2)\log(1+\sqrt{2}) + \log^2(1+\sqrt{2}) \\
&\qquad + 5\,\mathrm{Li}_2\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) - \mathrm{Li}_2\Big(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\Big) - \mathrm{Li}_2(1-\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

Daher ist

$$
\begin{aligned}
s_3 = -\frac{\pi}{2}\Big(&\sqrt{2}-1-\frac{\pi^2}{4}-\log(2)+\frac{7}{8}\log^2(2)+(\sqrt{2}-1)\log(1+\sqrt{2})\\
&+\frac{1}{2}\log(2)\log(1+\sqrt{2})-\log^2(1+\sqrt{2})\\
&-5\,\mathrm{Li}_2\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)+\mathrm{Li}_2\Big(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\Big)+\mathrm{Li}_2(1-\sqrt{2})\Big)
\end{aligned}
$$

und die Behauptung folgt.

**Bemerkung.** Der Wert des bestimmten Integrals erscheint in der Arbeit von J. M. Campbell und A. Soho, An integral transform related to series involving alternating harmonic numbers, *Integral Transforms and Special Functions* **28** (2017), 547–559. Der Wert wird mit

$$
\begin{aligned}
-\pi\Big(1-\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}\Big(1-\frac{\pi}{12}\Big)-\frac{\log(2)}{4}(1+\log(2))\\
+\log(1+\sqrt{2})\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\log(1+\sqrt{2})}{4}\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

angegeben.

**Aufgabe 1432.** In einem Dreieck $ABC$ mit Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sei $N$ der Nagel-Punkt. Weiter seien die Winkel $\varphi_A = \sphericalangle NAB$, $\varphi_B = \sphericalangle NBC$ und $\varphi_C = \sphericalangle NCA$. Man beweise die Ungleichung

$$
\cot\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\cot(\varphi_A)+\cot\Big(\frac{\beta}{2}\Big)\cot(\varphi_B)+\cot\Big(\frac{\gamma}{2}\Big)\cot(\varphi_C)\geq 9.
$$

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von folgenden 8 Lesern sind Beiträge eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Die meisten Leser führen die Ungleichung auf bekannte Ungleichungen im Dreieck zurück. Wir folgen den Ausführungen von *Bernhard Ruh*, der mit elementaren Mitteln auskommt.

Ist $N_a \in BC$ und $n_a = N_aA$ die Nagellinie von $A$ aus, so ist gemäss Definition $BN_a = s-c$ und $CN_a = s-b$. Die Anwendung des Sinussatzes in den Dreiecken $ABN_a$ und $AN_ac$ ergibt dann

$$
n_a = \frac{(s-c)\sin(\beta)}{\sin(\varphi_A)} = \frac{(s-b)\sin(\gamma)}{\sin(\alpha-\varphi_A)}.
$$

Nach Multiplizieren beider Seiten mit $\sin(\alpha-\varphi_A)$ und der Anwendung des Additionstheorems ergibt sich eine Gleichung in $\cot(\varphi_A)$ mit der Lösung

$$
\cot(\varphi_A) = \frac{1}{\sin(\alpha)}\bigg(\frac{(s-b)\sin(\gamma)}{(s-c)\sin(\beta)}+\cos(\alpha)\bigg) = \frac{1}{\sin(\alpha)}\bigg(\frac{1-\cos(\gamma)}{1-\cos(\beta)}+\cos(\alpha)\bigg).
$$

Letzteres folgt wegen
$$s-b=r\cot\Big(\frac{\beta}{2}\Big)=r\,\frac{\sin(\beta)}{1-\cos(\beta)}$$
und zyklisch. Nun multipliziert man mit $\cot(\frac{\alpha}{2})=\frac{\sin(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}$ und erhält
$$\cot\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\cot(\varphi_A)=\frac{1-\cos(\gamma)}{(1-\cos(\alpha))(1-\cos(\beta))}+\frac{\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}.$$
Setzt man zur Abkürzung $x=1-\cos(\alpha)$ (und analog $y$ und $z$), so erhält die Ungleichung in der Aufgabe die Form
$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\geq 12xyz.$$
Da wegen der QM-AM Ungleichung für alle positiven Zahlen $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ ist, bleibt noch
$$xy+yz+zx\geq 6xyz$$
zu zeigen. Wegen $x=1-\cos(\alpha)=2\sin^2(\frac{\alpha}{2})=\frac{2}{1+\cot^2(\frac{\alpha}{2})}$ ist dies äquivalent zu
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1+\cot^2(\frac{\alpha}{2})}{2}+\frac{1+\cot^2(\frac{\beta}{2})}{2}+\frac{1+\cot^2(\frac{\gamma}{2})}{2}\geq 6,$$
also
$$\cot^2\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)+\cot^2\Big(\frac{\beta}{2}\Big)+\cot^2\Big(\frac{\gamma}{2}\Big)\geq 9.$$
Diese Ungleichung ist aber wohlbekannt: Aus den elementaren
$$\sum_{\text{cycl.}}\tan\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\tan\Big(\frac{\beta}{2}\Big)=1\quad\text{und}\quad(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big)\geq 9$$
folgt zunächst
$$\sum_{\text{cycl.}}\cot\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\cot\Big(\frac{\beta}{2}\Big)\geq 9$$
und wiederum wegen $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ folgt die Ungleichung sofort.

**Bemerkung.** *Walter Burgherr* vermutet, dass die angegebene Ungleichung für alle Punkte $P$ im Innern des Dreiecks gilt.

**Aufgabe 1433 (Die einfache dritte Aufgabe).** Sei $ABCD$ ein Quadrat und $P$ ein Punkt auf der Seite $BC$. Beweise, dass der Punkt $P$ die Seite $BC$ genau dann im Goldenen Schnitt teilt ($PC:PB=(1+\sqrt{5})/2$), wenn die Steiner-Ellipse des Dreiecks $PAD$ durch die Mitte der Seite $CD$ geht.

Tran Quang Hung, Hanoi, VN

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind von folgenden 12 Lesern Lösungen eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-

Benken, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Hauptsächlich kamen zwei Methoden zur Anwendung. Entweder wurde mit einem Einheitsquadrat in einem geeigneten Koordinatensystem gearbeitet, oder die Ellipse wurde durch eine geeignete affine Abbildung in einen Kreis verwandelt. Wir folgen den Ausführungen von *Bernhard Ruh*, der die letztere Methode besonders geschickt handhabte.

Wegen der Verhältnistreue von Affinitäten dürfen wir die angegebenen Konstellation vereinfachen, indem wir die Ellipse affin in einen Kreis abbilden. Das Dreieck $APB$ wird dann gleichseitig und das Quadrat $ABCD$ ein Parallelogramm, dessen Seite $BC$ den Kreis in $P$ berührt. Wir dürfen zudem annehmen, dass das Dreieck die Seitenlänge 1 hat (siehe Abbildung 1).

Der Schnittpunkt $Q$ der Seite $CD$ mit dem Kreis teile die Seite in die Stücke $u = CQ$ und $v = QD$. Ferner sei $p = PC$. Der Kosinussatz im Dreieck $CDP$ liefert nun

$$(u + v)^2 = p^2 - p + 1$$

(man beachte $\sphericalangle DPC = 60°$). Ferner folgt aus dem Sekanten-Tangenten-Satz

$$u(u + v) = p^2.$$

Teilt man die letzte Gleichung durch die Differenz der beiden Gleichungen, so erhält man

$$\frac{u}{v} = \frac{p^2}{1 - p}.$$

Somit ist $u = v$ äquivalent zu $p^2 + p - 1 = 0$, was die Aussage der Aufgabe beweist.

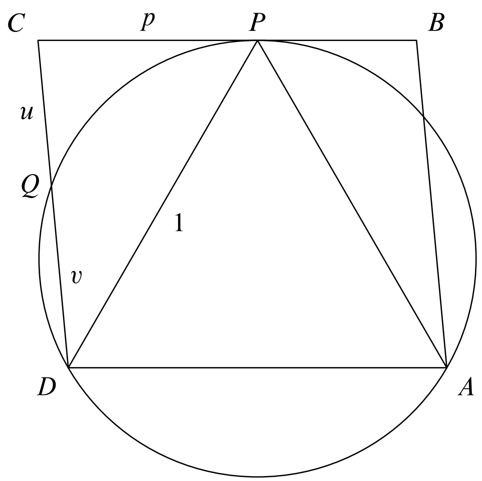


Abbildung 1