J. Eur. Math. Soc. 26, 1365–1422 (2024) DOI 10.4171/JEMS/1310

Linyuan Liu

Cohomologie des fibrés en droites sur SL_3/B en caractéristique positive : deux filtrations et conséquences

Reçu le 23 octobre 2020; révisé le 18 décembre 2021

Résumé. Dans cet article, je prouverai l'existence de deux filtrations de la cohomologie des fibrés en droites sur SL_3/B. La première est une filtration en deux étapes qui existe pour $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$ si μ est dans la région de Griffith. La deuxième existe pour tous $H^i(\mu)$, et est similaire à la p-filtration qui a été envisagée par Jens Carsten Jantzen.

Mots-clés. Théorie de représentations modulaires, variétés des drapeaux, cohomologie de fibrés en droites, groupes algébriques

Abstract. In this paper, I will prove the existence of two filtrations of the cohomology of line bundles on SL_3/B. The first one is a two-step filtration that exists for $H^1(\mu)$ and $H^2(\mu)$ if μ is in the Griffith region. The second one exists for all $H^i(\mu)$, and is similar to the p-filtration that has been considered by Jens Carsten Jantzen.

Keywords. Modular representation theory, flag varieties, line bundle cohomology, algebraic groups

1. Introduction

1.1. Histoire et motivations du problème

Soient G un schéma en groupes semi-simple déployé sur un corps k de caractéristique positive, B un sous-groupe de Borel et $T \subset B$ un tore maximal déployé. Soit $X(T)$ le groupe des caractères de T. Pour tout $\mu \in X(T)$, considéré comme caractère de B, on note $\mathcal{L}(\mu)$ le fibré en droites G-équivariant induit par μ et l'on pose $H^i(\mu) := H^i(G/B, \mathcal{L}(\mu))$.

Non seulement ces groupes de cohomologie sont des objets intéressants et fondamentaux dans la géométrie algébrique, mais ils sont également munis d'une structure de G-modules, ce qui en fait une classe d'objets importante dans la théorie des représentations de G. Par exemple, les G-modules simples sont paramétrés par les poids dominants, et

Linyuan Liu: Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche, Sorbonne Université, 75252 Paris, France; linyuan.liu@imj-prg.fr

Classification Mathématique (2020): 20G15

pour tout λ dominant, le G-module simple $L(\lambda)$ correspondant est isomorphe à l'unique sous-module simple de $H^0(\lambda)$, dont le caractère est donné par la formule de caractère de Weyl. Donc si on comprend bien les structures de ces groupes de cohomologie, on pourra comprendre les caractères des modules simples, qui est l'une des questions les plus importantes dans la théorie des représentations modulaires.

En caractéristique 0, ce problème est complètement résolu, et la structure de $H^i(\mu)$ est simplement donnée par le Théorème de Borel–Weil–Bott (cf. [15, II.5.5]). Mais en caractéristique positive, le Théorème de Borel–Weil–Bott n'est plus vrai, parce que s'il était vrai, alors pour tout μ, il existerait au plus un i tel que $H^i(\mu) \neq 0$. En 1978, Griffith [9] a étudié le cas de $G = \mathrm{SL}_3$ et déterminé la région de $X(T)$, que l'on appellera « la région de Griffith », où H^1 et H^2 sont tous les deux non nuls. Presque simultanément en 1979, Andersen [2] a découvert, pour tout G, une condition nécessaire et suffisante pour que $H^1(\mu) \neq 0$. Il a aussi montré que chaque $H^1(\mu)$ non nul admet un socle simple. Ensuite, des résultats concernant la structure de G-module de $H^i(\mu)$ sous certaines hypothèses de généricité ont été obtenus par différents auteurs : [3, 4, 8, 12, 14, 16–18]. En 2002, Donkin a découvert une nouvelle approche, qui a donné dans [7] des formules récursives pour les caractères de tous les $H^i(\mu)$ dans le cas de $G = \mathrm{SL}_3$.

À ce stade, presque rien n'est connu pour la structure de G-module de $H^i(\mu)$ si $i \neq 0$ ou $\dim G/B$ en dehors du cas générique dans la p^2-alcôve du bas sauf le socle de $H^1(\mu)$.

1.2. Résultats principaux

Dans cet article, on étudiera le cas de $G = \mathrm{SL}_3$, qui est le premier cas non trivial, et on donnera une description complète récursive de la structure de $H^i(\mu)$ pour tout i et tout μ. Le théorème le plus important de cet article est le suivant (voir le paragraphe 4.6) :

Théorème. *Soit $\mu \in X(T)$. Soit $0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_\ell = \widehat{Z}(\mu)$ une D-filtration de $\widehat{Z}(\mu)$ (cf. le paragraphe 4.1) telle que $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ où $\delta_i \in \{0, \alpha, \beta\}$. Alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe une filtration $0 = \widetilde{N}_0 \subset \widetilde{N}_1 \subset \cdots \subset \widetilde{N}_\ell = H^j(\mu)$ où*

$$\widetilde{N}_i \cong H^j(G/BG_1, N_i) \quad \textit{et} \quad \widetilde{N}_i/\widetilde{N}_{i-1} \cong L(\nu_i^0) \otimes H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}.$$

Ce théorème généralise la p-filtration introduite par Jantzen, pour tout μ et tout i. De plus, il n'est pas difficile de voir que les formules de récurrence de Donkin correspondent à ces filtrations de $H^i(\mu)$. On obtiendra aussi comme corollaire une autre démonstration de l'existence de la p-filtration de $H^0(\mu)$ découverte par Jantzen [14].

On montrera aussi l'existence d'une filtration à deux étages de $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$ lorsque μ est dans la région de Griffith (Théorème 3.1). Cela fournira aussi des formules de récurrence de ch $H^i(\mu)$ pour tout i et μ, qui sont complètement différentes de celles de Donkin. Les formules de Donkin ont été utilisées par quelques travaux récents (cf. [1, 10]). Donc les nouvelles formules de récurrence obtenues par des résultats de cet article, qui sont plus simples que celles de Donkin, seront utiles pour les autres chercheurs dans la théorie des représentations géométriques.

2. Notations et préliminaires

Dans cet article, k désigne un corps de caractéristique $p > 0$, G désigne le k-schéma en groupes SL_3 sur k, $B \subset G$ est le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires inférieures, et $T \subset B$ est le tore maximal des matrices diagonales.

On note $X(T)$ le groupe des caractères de T et $Y(T)$ celui des cocaractères. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle : X(T) \times Y(T) \to \mathbb{Z}$ le couplage naturel. Pour $i \in \{1,2,3\}$, notons ϵ_i l'élément de $X(T)$ tel que $\epsilon_i(\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_3)) = a_i$.

Posons $\alpha = \epsilon_1 - \epsilon_2$, $\beta = \epsilon_2 - \epsilon_3$, $\gamma = \alpha + \beta$, $R^+ = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, et $R^- = -R^+$. Alors $R = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma\}$ est le système de racines de G par rapport à T et le sous-groupe de Borel B correspond à R^-. Notons $\Delta = \{\alpha,\beta\}$ l'ensemble des racines simples. Définissons l'ordre partiel $\le$ sur $X(T)$ par $\mu \le \lambda$ si et seulement si $\lambda - \mu \in \mathbb{N}\alpha + \mathbb{N}\beta$.

Pour tout $\delta \in R$, notons $\delta^\vee \in Y(T)$ la coracine correspondante. On désigne par $\omega_1, \omega_2 \in X(T)$ les poids fondamentaux correspondant à $\alpha^\vee$ et $\beta^\vee$. Alors on a $X(T) = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$. Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, notons (a,b) le poids $a\omega_1 + b\omega_2$. Posons

$$\rho = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = \gamma = (1,1).$$

Notons $X(T)^+$ l'ensemble des poids dominants. Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, notons

$$\begin{aligned} X_d(T) &= \{\mu \in X(T) \mid 0 \le \langle \mu, \delta^\vee\rangle < p^d,\ \forall \delta \in \Delta\} \\ &= \{(a,b) \in X(T) \mid 0 \le a, b < p^d\} \end{aligned}$$

l'ensemble des poids dominants et p^d-restreints.

Pour $\delta \in R$, notons s_δ la réflexion par rapport à δ, c'est-à-dire, pour tout $\mu \in X(T)$, $s_\delta(\mu) = \mu - \langle \mu, \delta^\vee\rangle\delta$.

Soit W le groupe de Weyl de R ; il est engendré par l'ensemble S des réflexions simples. La *longueur* $\ell(w)$ d'un $w \in W$ est le plus petit entier m tel que w s'écrive $s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_m}$ avec $\alpha_i \in S$. Soit $w_0 = s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_\beta s_\alpha s_\beta$ l'unique élément de W de plus grande longueur.

Pour $\delta \in R$ et $r \in \mathbb{Z}$, notons $s_{\delta,r}$ la réflexion affine de $X(T)$ définie par $s_{\delta,r}(\mu) = \mu - (\langle\mu,\delta^\vee\rangle - r)\delta$ pour tout $\mu \in X(T)$. Désignons par W_p le groupe engendré par tous les $s_{\delta,np}$ avec $\delta \in R$ et $n \in \mathbb{Z}$. Pour $w \in W_p$, définissons l'action décalée par $w \cdot \mu = w(\mu+\rho) - \rho$ pour tout $\mu \in X(T)$. On note

$$C = -\rho + X(T)^+.$$

Tout G-module V est aussi un T-module de façon naturelle. Pour tout $\mu \in X(T)$, on note V_μ l'espace de poids μ de V, où μ est un *poids* de V si $V_\mu \neq 0$. On dit que μ est un *plus haut poids* de V si μ est un poids de V qui est maximal par rapport à l'ordre $\le$ sur $X(T)$. On définit le *caractère* de V par

$$\mathrm{ch}\, V = \sum_{\mu \in X(T)} \dim(V_\mu) e_\mu \in \mathbb{Z}[X(T)].$$

Soit $H \subset G$ un sous-groupe fermé. Si V est un G-module, alors il admet naturellement une structure de H-module. On note $\mathrm{res}^G_H(V)$ le H-module ainsi obtenu.

Pour tout H-module N, on note $\mathrm{Ind}_H^G(N)$ le G-module induit par N. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $H^i(G/H, N) = H^i(G/H, \mathcal{L}_{G/H}(N))$ où $\mathcal{L}_{G/H}(N)$ est le fibré vectoriel G-équivariant sur G/H associé à N (cf. [15, I.5]). Alors on a $H^i(G/H, N) \cong R^i \mathrm{Ind}_H^G(N)$. Pour un B-module N, on note $H^i(N) = H^i(G/B, N)$. Si $\mu \in X(T)$, alors μ est aussi un caractère de B par la composition $B \twoheadrightarrow T \xrightarrow{\mu} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, et on désigne encore par μ le B-module de dimension 1 tel que $g \in B$ agit comme le scalaire $\mu(g)$. Donc $H^i(\mu)$ est défini comme ci-dessus.

Pour $\mu \in X(T)^+$, notons $L(\mu)$ le G-module simple de plus haut poids μ. Si $\lambda = p^d\lambda_d + \cdots + p\lambda_1 + \lambda_0$ avec $\lambda_i \in X_1(T)$, alors il existe un isomorphisme de G-modules par le théorème du produit tensoriel de Steinberg (cf. [15, II.3.17])

$$L(\lambda) \cong L(\lambda_d)^{(d)} \otimes \cdots \otimes L(\lambda_1)^{(1)} \otimes L(\lambda_0),$$

où l'exposant $^{(i)}$ désigne la i-ième torsion par le morphisme de Frobenius. Notons aussi $V(\mu) = H^3(w_0 \cdot \mu)$ le module de Weyl de plus haut poids μ.

Pour un G-module V de dimension finie, on note $\mathrm{FC}(V)$ l'ensemble des facteurs de composition de V.

Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on appelle H^i*-chambre* tout sous-ensemble de $X(T)$ de la forme $w \cdot C$ avec $\ell(w) = i$.[1] Pour $d \in \mathbb{N}^*$, une p^d*-alcôve* est un ensemble de la forme

$$\{\mu \in X(T) \mid ap^d < \langle \mu + \rho, \alpha^\vee \rangle < (a+1)p^d,\ bp^d < \langle \mu + \rho, \beta^\vee \rangle < (b+1)p^d,$$
$$cp^d < \langle \mu + \rho, \gamma^\vee \rangle < (c+1)p^d\}$$

pour certains $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Pour tout G-module V, l'espace dual $\mathrm{Hom}_k(V, k)$ est naturellement muni de la structure de G-module définie par $(g \cdot \phi)(v) = \phi(g^{-1}v)$. On le note V^* et on l'appelle le *dual* de V. La dualité de Serre sur G/B est compatible avec l'action de G, et donne $H^i(\mu) \cong H^{3-i}(-2\rho - \mu)^*$.

D'autre part, l'application $g \mapsto {}^t g$ est un anti-automorphisme de $G = \mathrm{SL}_3$ qui est l'identité sur T. On peut aussi munir l'espace dual $\mathrm{Hom}_k(V, k)$ de la structure de G-module définie par $(g \cdot \phi)(v) = \phi({}^t g v)$. On le note V^t et on l'appelle le *dual contravariant* de V. Alors, *la dualité de Serre contravariante* s'écrit (cf. [8, 2.1]) $H^i(\mu) \cong H^{3-i}(w_0 \cdot \mu)^t$.

Soit $F : G \to G$ le morphisme de Frobenius de G. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, notons $G_r = \ker(F^r)$ le r-ième noyau de Frobenius. Pour tout $\mu \in X(T)$, notons $\widehat{L}(\mu)$ l'unique BG_1-module simple de plus haut poids μ, où $BG_1 = F^{-1}(B)$. Si on écrit $\mu = \mu^0 + p\mu^1$ avec $\mu^0 \in X_1(T)$ et $\mu^1 \in X(T)$, alors on a un isomorphisme de BG_1-modules $\widehat{L}(\mu) \cong \widehat{L}(\mu^0) \otimes p\mu^1$. De plus, si $\mu \in X_1(T)$, alors on a un isomorphisme de BG_1-modules $\widehat{L}(\mu) \cong \mathrm{res}_{BG_1}^G(L(\mu))$.

[1] Pour un poids dans une H^0- (resp. H^3-) chambre, la cohomologie est non-nulle uniquement en degré 0 (resp. 3), et pour un poids dans une H^1- ou H^2-chambre, on ne peut avoir de la cohomologie qu'en degré 1 et 2 ; cf. [15, II.2.6, II.4.2.(9), II.4.5, et II.5.4.a].

3. Une filtration à deux étages

3.1. *Énoncé du théorème pricipal*

Définition 3.1 (degré). Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n \geq 1$, on appelle *degré* de n l'unique $d \in \mathbb{N}$ tel que $p^d \leq n < p^{d+1}$. Si $n = 0$, on dit que n est de *degré* $-\infty$.

Soit $\mu \in X(T)$ tel que $\mu \neq (-1,-1)$. Il existe un unique $\lambda = (a,b) \in C \cap W \cdot \mu$. Le degré de μ est défini comme le degré de $a+b+1 \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.1. Si $\mu = (m, -n-2)$ avec $m, n \in \mathbb{N}$, alors $\mu = s_\beta \cdot (m-n-1, n) = s_\beta s_\alpha \cdot (n-m-1, m)$. Donc dans ce cas, le degré de μ est celui de $\max(m,n)$.

Définition 3.2 (Condition de Griffith). (1) On dit qu'un poids μ vérifie la *condition de Griffith* s'il existe $m, n, d \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ tels que

- $ap^d \leq m, n \leq (a+1)p^d - 2$;
- $\mu = (m, -n-2)$ ou $\mu = (-n-2, m)$.

On appelle *région de Griffith*, et l'on note Gr, l'ensemble des poids vérifiant la condition de Griffith.

(2) On note $\overline{\mathrm{Gr}}$ l'ensemble des poids μ tels qu'il existe $m, n, d \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ tels que

- $ap^d - 1 \leq m, n \leq (a+1)p^d - 1$;
- $\mu = (m, -n-2)$ ou $\mu = (-n-2, m)$.

(3) On note $\widehat{\mathrm{Gr}}$ l'ensemble des poids μ tels qu'il existe $m, n, d \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ tels que

- $ap^d \leq m, n \leq (a+1)p^d - 1$;
- $\mu = (m, -n-2)$ ou $\mu = (-n-2, m)$.

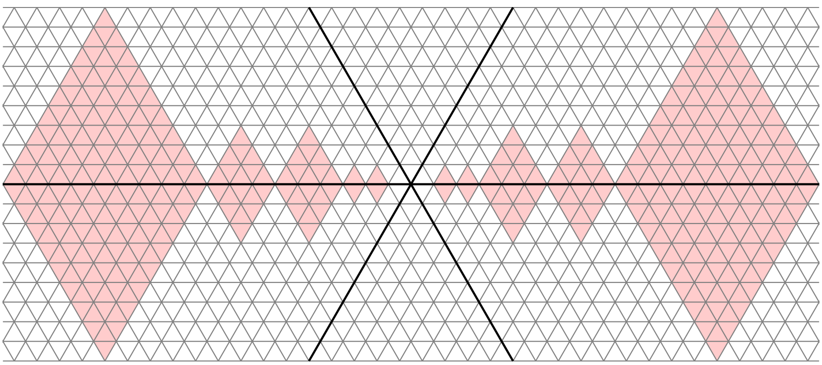


Fig. 1. Région de Griffith pour $p = 3$.

Remarque 3.2. Dans la Définition 3.2, le degré de μ est d, sauf le cas dans (2) avec $m = n = p^d - 1$ où le degré est $d - 1$.

Remarque 3.3. D'après [9, Theorem 1.3] ou [2, Theorem 3.6], on sait que $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$ sont tous les deux non nuls si et seulement si $\mu \in \mathrm{Gr}$. Si μ est dans une H^1-chambre (resp. H^2-chambre) et $\mu \notin \mathrm{Gr}$, alors $H^2(\mu) = 0$ (resp. $H^1(\mu) = 0$).

Convention 3.1. Si η n'est pas dominant, on pose $L(\eta) = V(\eta) = 0$.

Le théorème principal de §3 est le suivant.

Théorème 3.1. *Soit $\mu = (m, -n-2) \in \overline{\mathrm{Gr}}$, où $m = ap^d + r$ et $n = ap^d + s$ avec $d \geq 1$, $1 \leq a \leq p-1$ et $-1 \leq r, s \leq p^d - 1$. Posons $\mu' = (r, -s-2)$, $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$, $\lambda = (s, p^d - r - 2)$ et ${}^t\lambda = (r, p^d - s - 2)$. Alors :*

(1) *Il existe une suite exacte courte de G-modules*

$$0 \to M \to H^2(\mu) \to L(0, a-1)^{(d)} \otimes V(\lambda) \to 0$$

telle que

$$M \cong L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(\mu') \bigoplus L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu'').$$

De plus, le quotient de $H^2(\mu)$ par $L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(\mu')$ est un quotient du module de Weyl $V(s, ap^d - r - 2)$.

(2) *Il existe une suite exacte courte de G-modules*

$$0 \to L(0, a-1)^{(d)} \otimes H^0({}^t\lambda) \to H^1(\mu) \to Q \to 0$$

telle que

$$Q \cong L(0, a)^{(d)} \otimes H^1(\mu') \bigoplus L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'').$$

De plus, le noyau de la projection $H^1(\mu) \to L(0, a)^{(d)} \otimes H^1(\mu')$ est un sous-module de $H^0(r, ap^d - s - 2)$.

Remarque 3.4. L'énoncé du théorème reste vrai si on permet à la valeur de a d'être 0. En effet, dans ce cas, on a $\mu' = \mu$ et l'énoncé est trivial avec la Convention 3.1.

Exemple 3.1. Décrivons maintenant partiellement et explicitement le cas où $d = 1$.

(1) Si $a = 0$, on a $\mu = (r, -s-2)$ avec $-1 \leq r, s \leq p-1$. Dans ce cas, on peut appliquer [15, II.5.5] pour calculer $H^i(\mu)$. Plus précisément, si $r \geq s$, alors on a $\mu = s_\beta \cdot (r-s-1, s)$ avec $-1 \leq r-s-1, s \leq p-1$, donc on a $H^1(\mu) \cong H^0(r-s-1, s)$ et $H^i(\mu) = 0$ si $i \neq 1$. Si $r < s$, alors $\mu = s_\beta s_\alpha \cdot (s-r-1, r)$, et on a $H^2(\mu) \cong H^0(s-r-1, r)$ et $H^i(\mu) = 0$ si $i \neq 2$.

(2) Si $1 \leq a \leq p-1$ et $r \geq s$, alors par (1), on a $H^2(\mu') = H^2(\mu'') = 0$, donc le théorème nous donne

$$H^2(\mu) \cong L(0, a-1)^{(1)} \otimes V(s, p-r-2).$$

(3) Si $1 \leq a \leq p-1$ et $r < s$, alors par (1), on a $H^1(\mu) = H^1(\mu'') = 0$, donc le théorème nous donne

$$H^1(\mu) \cong L(0, a-1)^{(1)} \otimes H^0(r, p-s-2).$$

Afin de démontrer le Théorème 3.1 on a besoin de quelques lemmes.

Lemme 3.1. *Soit $d \geq 0$. Si $L(\eta)$ est un facteur de composition de l'un des trois modules suivants :*

(1) $H^i(\mu')$ *où* $\mu' = (r, -s-2)$ *avec* $-1 \leq r, s \leq p^d$,

(2) $H^i(\mu'')$ *où* $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$ *avec* $-2 \leq r, s \leq p^d - 1$,

(3) $V(\lambda)$ *où* $\lambda = (s, p^d - r - 2)$ *avec* $-1 \leq s \leq r + 1 \leq p^d$,

alors η est p^d-restreint.

Démonstration. Soit $\zeta \in -\rho + X(T)^+$. On sait, d'après le « Strong Linkage Principle » [15, II.6.13], que pour tout facteur de composition $L(\eta)$ d'un $H^i(w \cdot \zeta)$ on a $\eta \leq \zeta$. Comme γ est dominant, on a donc

$$\langle \eta, \alpha^\vee \rangle \leq \langle \eta, \gamma^\vee \rangle \leq \langle \zeta, \gamma^\vee \rangle,$$

et de même pour $\langle \eta, \beta^\vee \rangle$.

Pour $\mu' = (r, -s-2)$ dans (1), le ζ correspondant est $(r-s-1, s)$ si $r \geq s$ et $(s-r-1, r)$ si $s \geq r$. Dans les deux cas on a $\langle \zeta, \gamma^\vee \rangle = \max(r, s) - 1 < p^d$.

De même, pour $\mu'' = (r - p^d, p^d - s - 2)$ dans (2), le poids ζ correspondant est $(p^d - r - 2, r - s - 1)$ si $r \geq s$ et $(p^d - s - 2, s - r - 1)$ si $s \geq r$. Dans les deux cas on a $\langle \zeta, \gamma^\vee \rangle = p^d - \min(r, s) - 3 < p^d$.

Dans (3), si $-1 \leq s \leq r + 1 \leq p^d$ et $L(\eta)$ est un facteur de composition de $V(\lambda) = V(s, p^d - r - 2) \cong H^3(w_0 \cdot \lambda)$, alors dans ce cas $\langle \zeta, \gamma^\vee \rangle = p^d + s - r - 2 \leq p^d - 1$. ∎

Lemme 3.2. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et soient $\lambda, \mu \in X_d(T)$. Alors pour $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ on a*

$$\mathrm{Ext}^1_G(L(0,a)^{(d)} \otimes L(\lambda), L(0, a-2)^{(d)} \otimes L(\mu)) = 0.$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur d.

Si $d = 1$, alors $\lambda, \mu \in X_1(T)$. Si $\lambda = \mu$, alors d'après [15, II.10.17 (2)],

$$\mathrm{Ext}^1_G\big(L(0,a)^{(1)} \otimes L(\lambda), L(0,a-2)^{(1)} \otimes L(\lambda)\big) \cong \mathrm{Ext}^1_G\big(L(0,a), L(0,a-2)\big) = 0$$

car $(0, a-2) \notin W_p \cdot (0, a)$ (ici on a utilisé le principe de linkage [15, II.6.17]. Si $\lambda \neq \mu$, d'après [20, Proposition 4.1.1], on sait que si

$$\mathrm{Ext}^1_G(L(0,a)^{(1)} \otimes L(\lambda), L(0,a-2)^{(1)} \otimes L(\mu))$$

est non nul, alors si $p \neq 3$ il est parmi les trois possibilités suivantes (et est leur somme directe si $p = 3$) :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_G(L(0,a), L(0,a-2)),\\
&\mathrm{Hom}_G(L(0,a), L(0,1) \otimes L(0,a-2)),\\
&\mathrm{Hom}_G(L(0,a), L(1,0) \otimes L(0,a-2)).
\end{aligned}$$

Or ceux-ci sont tous nuls car $(0, a) \not\leq \nu_0 + (0, a-2)$ pour $\nu_0 \in \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$.

Supposons que l'énoncé est vrai pour $d \geq 1$. Soient $\lambda, \mu \in X_{d+1}(T)$. Écrivons $\lambda = p\lambda^1 + \lambda^0$ et $\mu = p\mu^1 + \mu^0$ avec $\lambda^0, \mu^0 \in X_1(T)$. Si $\lambda_0 = \mu_0$, alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^1_G\big(L(0,a)^{(d+1)} \otimes L(\lambda), L(0,a-2)^{(d+1)} \otimes L(\mu)\big)\\ &\qquad\cong \mathrm{Ext}^1_G\big(L(0,a)^{(d)} \otimes L(\lambda^1), L(0,a-2)^{(d)} \otimes L(\mu^1)\big) = 0\end{aligned}$$

d'après [15, II.10.17 (2)] et l'hypothèse de récurrence.

Si $\lambda_0 \neq \mu_0$, alors d'après [20, Proposition 4.1.1] on sait que si

$$\mathrm{Ext}^1_G(L(0,a)^{(d+1)} \otimes L(\lambda), L(0,a-2)^{(d+1)} \otimes L(\mu))$$

est non nul, alors si $p \neq 3$ il est parmi les trois possibilités suivantes (et est leur somme directe si $p = 3$) :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_G\big(L((0,a)p^d + \lambda^1), L((0,a-2)p^d + \mu^1)\big),\\ &\mathrm{Hom}_G\big(L((0,a)p^d + \lambda^1), L((0,a-2)p^d + \mu^1) \otimes L(0,1)\big),\\ &\mathrm{Hom}_G\big(L((0,a)p^d + \lambda^1), L((0,a-2)p^d + \mu^1) \otimes L(1,0)\big).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Soit $L(\eta)$ un facteur de composition de

$$L((0,a-2)p^d + \mu^1) \otimes L(\nu_0)$$

où $\nu_0 \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$. Alors on a

$$\eta \leq (0,a-2)p^d + \mu^1 + \nu_0.$$

Donc, comme μ^1 est p^d-restreint,

$$\langle \eta, \gamma^\vee \rangle \leq \langle (0,a-2)p^d + \mu^1 + \nu_0, \gamma^\vee \rangle \leq (a-2)p^d + 2(p^d-1) + 1 = ap^d - 1.$$

Donc comme λ^1 est dominant, on ne peut pas avoir $\eta = (0,a)p^d + \lambda^1$. Par conséquent, tous les Hom de (3.1) sont nuls, d'où le résultat. ∎

3.2. *Démonstration du Théorème 3.1 : réduction au Théorème 3.2*

Dans ce paragraphe, on va montrer que le Théorème 3.1 découle du théorème un peu plus faible suivant :

Théorème 3.2. *Soit $\mu = (m, -n-2)$, où $m = ap^d + r$ et $n = ap^d + s$ avec $d \geq 1$, $1 \leq a \leq p-1$ et $-1 \leq r, s \leq p^d - 1$ (c'est-à-dire, $\mu \in \overline{\mathrm{Gr}}$ de degré d). Posons $\mu' = (r, -s-2)$, $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$, $\lambda = (s, p^d - r - 2)$ et ${}^t\lambda = (r, p^d - s - 2)$. Alors :*

(1) *Il existe des suites exactes courtes de G-modules*

$$\begin{aligned}&0 \to M \to H^1(\mu) \to L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'') \to 0,\\ &0 \to L(0,a-1)^{(d)} \otimes H^0({}^t\lambda) \to M \to L(0,a)^{(d)} \otimes H^1(\mu') \to 0.\end{aligned}$$

(2) *Il existe des suites exactes courtes de G-modules*

$$0 \to L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(\mu') \to H^2(\mu) \to Q \to 0,$$
$$0 \to L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu'') \to Q \to L(0,a-1)^{(d)} \otimes V(\lambda) \to 0.$$

De plus, Q est un quotient du module de Weyl $V(s, ap^d - r - 2)$.

Remarque 3.5. Comme la Remarque 3.4, l'énoncé du Théorème 3.2 reste vrai lorsque $a = 0$.

Montrons que le Théorème 3.1 découle du Théorème 3.2. On pose $w = s_\gamma s_\beta = s_\beta s_\alpha$. Notons $\overline{\mathrm{Gr}}_\alpha = \overline{\mathrm{Gr}} \cap s_\alpha \cdot C$, $\overline{\mathrm{Gr}}_\beta = \overline{\mathrm{Gr}} \cap s_\beta \cdot C$ et $\overline{\mathrm{Gr}}_w = \overline{\mathrm{Gr}} \cap w \cdot C$. Posons

$$\widetilde{\mu} = w_0 \cdot \mu = (ap^d + s, -ap^d - r - 2).$$

Alors $\widetilde{\mu}$ appartient à $\overline{\mathrm{Gr}}_w$ (resp. à $\overline{\mathrm{Gr}}_\beta$) si et seulement si μ appartient à $\overline{\mathrm{Gr}}_\beta$ (resp. à $\overline{\mathrm{Gr}}_w$). D'autre part, comme $\widetilde{\mu}$ se déduit de μ en échangeant r et s, alors le poids $(\widetilde{\mu})'$ associé à $\widetilde{\mu}$ est $(s, -r-2) = s_\gamma \cdot \mu'$; on le notera $\widetilde{\mu}'$. De même, le poids $\widetilde{\mu}''$ associé à $\widetilde{\mu}$ est

$$(-p^d + s, p^d - r - 2) = s_\gamma \cdot \mu''.$$

Par dualité de Serre contravariante, on a

$$H^1(\mu) \simeq H^2(\widetilde{\mu})^t \quad \text{et} \quad H^2(\mu) \simeq H^1(\widetilde{\mu})^t$$

et de même

$$H^i(\mu') \simeq H^{3-i}(\widetilde{\mu}')^t \quad \text{et} \quad H^i(\mu'') \simeq H^{3-i}(\widetilde{\mu}'')^t \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Comme les modules simples $L(0,i)$ sont auto-duaux pour la dualité contravariante, on obtient par le Théorème 3.2 que $H^1(\mu)$ a aussi la filtration à trois étages suivante :

$$H^1(\mu) \simeq H^2(\widetilde{\mu})^t = \begin{array}{|c|} \hline L(0,a)^{(d)} \otimes H^1(\mu') \\ \hline L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'') \\ \hline L(0,a-1)^{(d)} \otimes H^0({}^t\lambda) \\ \hline \end{array}$$

où les deux étages inférieurs sont un sous-module de $H^0(r, ap^d - s - 2)$, et $H^2(\mu)$ a aussi la filtration à trois étages suivante :

$$H^2(\mu) = H^1(\widetilde{\mu})^t = \begin{array}{|c|} \hline L(0,a-1)^{(d)} \otimes V(\lambda) \\ \hline L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(\mu') \\ \hline L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu'') \\ \hline \end{array}$$

Donc pour montrer le Théorème 3.1, il suffit de montrer que pour $i \in \{1, 2\}$, on a

$$\mathrm{Ext}^1_G(L(0,a)^{(d)} \otimes H^i(\mu'), L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^i(\mu'')) = 0.$$

Or ceci résulte des lemmes 3.1 et 3.2. Ceci montre que le Théorème 3.1 découle du Théorème 3.2. On va montrer le Théorème 3.2 dans le paragraphe 3.3.

3.3. Preuve du Théorème 3.2

Commençons par le lemme suivant.

Lemme 3.3. *Soit $\lambda = (0, a) \in X(T)^+$ tel que $1 \le a \le p-1$. Soit K le sous-B-module de $L(\lambda)$ engendré par le vecteur de poids $(a, -a)$. Alors $L(\lambda)/K$ est isomorphe comme B-module à $L(0, a-1) \otimes (0, 1)$.*

Demonstration.[2] On sait que $L(0, a) \cong k[x, y, z]_a$ l'espace des polynômes homogènes de degré a avec l'action naturelle de SL_3. Alors, on a un morphisme surjectif de B-modules

$$\begin{aligned} L(0, a) &\to L(0, a-1) \otimes (0, 1), \\ x^i y^j z^{a-i-j} &\mapsto \frac{a-i-j}{a} x^i y^j z^{a-i-j-1}, \end{aligned}$$

dont le noyau est K. ∎

3.3.1. Trois suites exactes de B-modules. Appliquons le Lemme 3.3 à $L(0, a)$ et notons K_a le sous-module engendré par le vecteur de poids $(a, -a)$; il est isomorphe comme B-module au P_α-module $L_\alpha(a, -a)$, où P_α est le sous-groupe parabolique correspondant à la racine simple α (voir [15, II.1.5] pour la définition de cette notation) et $L_\alpha(a, -a)$ est le P_α-module simple de plus haut poids $(a, -a)$. De plus, $L(0, a)/K_a$ est isomorphe à $L(0, a-1) \otimes (0, 1)$. On a donc une suite exacte

$$0 \to K_a \to L(0, a) \to L(0, a-1) \otimes (0, 1) \to 0. \tag{3.2}$$

Notons M_a le sous-module de K_a tel qu'on ait une suite exacte

$$0 \to M_a \to K_a \to (a, -a) \to 0. \tag{3.3}$$

Comme $a < p$ on voit que $M_a \simeq K_{a-1} \otimes (-1, 0)$ et donc on a une suite exacte

$$0 \to M_a \to L(0, a-1) \otimes (-1, 0) \to L(0, a-2) \otimes (-1, 1) \to 0. \tag{3.4}$$

3.3.2. Suites exactes longues induites par le foncteur d'induction. Appliquons la d-ième puissance du Frobenius aux suites exactes courtes du paragraphe précédent et tensorisons par le poids $\mu' = (r, -s-2)$. Posons aussi $\lambda_0 = (s, ap^d - r - 2)$ et $\nu = (-p^d + r, -s-2)$ et remarquons que $w_0 \cdot \lambda_0 = w_0\lambda_0 - 2\rho = (r - ap^d, -s-2)$. On obtient alors des suites exactes

$$0 \to \widetilde{K}_a \to L(0, a)^{(d)} \otimes (r, -s-2) \to L(0, a-1)^{(d)} \otimes (r, p^d - s - 2) \to 0, \tag{3.5}$$

$$0 \to \widetilde{M}_a \to \widetilde{K}_a \to (m, -n-2) \to 0, \tag{3.6}$$

$$0 \to \widetilde{M}_a \to L(0, a-1)^{(d)} \otimes \nu \to L(0, a-2)^{(d)} \otimes (-p^d + r, p^d - s - 2) \to 0. \tag{3.7}$$

[2] L'auteur remercie Simon Riche d'avoir suggéré cette preuve simple.

Appliquons le foncteur H^0 à ces suites exactes. Comme $\nu \in w_0 \cdot C$, on a $H^i(\nu) = 0$ pour $i < 3$. Par conséquent, en utilisant l'identité tensorielle [15, I.4.8], (3.7) donne l'égalité $H^1(\widetilde{M}_a) = 0$, l'isomorphisme

$$L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'') \simeq H^2(\widetilde{M}_a) \tag{3.8}$$

et la suite exacte

$$0 \to L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu'') \to H^3(\widetilde{M}_a) \to L(0, a-1)^{(d)} \otimes V(s, p^d - r - 2) \to 0 \tag{3.9}$$

où l'on a posé, comme dans le Théorème 3.2, $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$.

Comme ${}^t\lambda = (r, p^d - s - 2)$ appartient à C et comme $(r, -s-2)$ n'a de la cohomologie qu'en degré 1 et 2, alors (3.5) donne, en utilisant l'identité tensorielle, l'égalité $H^0(\widetilde{K}_a) = 0$, la suite exacte

$$0 \to L(0, a-1)^{(d)} \otimes H^0({}^t\lambda) \to H^1(\widetilde{K}_a) \to L(0, a)^{(d)} \otimes H^1(r, -s-2) \to 0, \tag{3.10}$$

l'isomorphisme

$$H^2(\widetilde{K}_a) \simeq L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(r, -s-2) \tag{3.11}$$

et l'égalité $H^3(\widetilde{K}_a) = 0$.

Considérons maintenant la suite exacte (3.6). Comme on a vu que $H^1(\widetilde{M}_a) = 0$, on obtient la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(\widetilde{K}_a) \to H^1(m, -n-2) \to H^2(\widetilde{M}_a) &\xrightarrow{f} H^2(\widetilde{K}_a) \\ &\to H^2(m, -n-2) \to H^3(\widetilde{M}_a) \to 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.3.3. Annulation de f.

Lemme 3.4. *Le morphisme f dans la suite exacte* (3.12) *est nul.*

Démonstration. Par (3.11), on sait que $H^2(\widetilde{K}_a) \cong L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(\mu')$. Donc par le Lemme 3.1, si $L(\eta)$ est un facteur de composition de $H^2(\widetilde{K}_a)$, alors $\eta = (0, ap^d) + \eta_0$ où η_0 est un poids dominant p^d-restreint. De même, comme $H^2(\widetilde{M}_a) \cong L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'')$ par (3.8), si $L(\eta)$ est un facteur de composition de $H^2(\widetilde{M}_a)$, alors on a $\eta = (0, (a-2)p^d) + \eta_0$ où η_0 est dominant et p^d-restreint.

Par conséquent, $H^2(\widetilde{K}_a)$ et $H^2(\widetilde{M}_a)$ n'ont pas de facteur de composition commun. Donc le morphisme f de $H^2(\widetilde{M}_a)$ vers $H^2(\widetilde{K}_a)$ dans (3.12) est nul. ∎

Par conséquent, la suite exacte (3.12) se coupe en deux suites exactes courtes

$$0 \to L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(\mu') \to H^2(m, -n-2) \to H^3(\widetilde{M}_a) \to 0, \tag{3.13}$$

$$0 \to H^1(\widetilde{K}_a) \to H^1(m, -n-2) \to L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'') \to 0. \tag{3.14}$$

Celles-ci, avec la suite exacte (3.9) et la suite exacte (3.10), terminent la preuve des suites exactes dans Théorème 3.2. Il reste à montrer que $H^3(\widetilde{M}_a)$ est un quotient du module de Weyl $V(s, ap^d - r - 2)$. En effet, d'après (3.3) et la construction du B-module K_a, les poids de M_a sont les poids $(a, -a) - i\alpha$ pour $i = 1, \dots, a$. Donc les poids de $\widetilde{M}_a$ sont les poids

$$\begin{aligned}\chi_i &= ((a, -a) - i\alpha)p^d + (r, -s-2) = ((a-2i)p^d + r, -(a-i)p^d - s - 2)\\ &= w_0 \cdot ((a-i)p^d + s, 2(i-a)p^d + ap^d - r - 2)\\ &= w_0 \cdot ((s, ap^d - r - 2) - (a-i)p^d\beta)\end{aligned}$$

pour $i = 1, \dots, a$. Donc les χ_i qui contribuent au $H^3(\widetilde{M}_a)$ donnent des modules de Weyl $V((s, ap^d - r - 2) - (a-i)p^d\beta)$ dont le plus haut poids est $\leq (s, ap^d - r - 2)$. D'autre part, d'après [15, II.5.15.b] et la dualité entre H^1 et H^2, on sait que $H^2(m, -n-2)$ est engendré par son espace de poids $(s, ap^d - r - 2)$. Par conséquent, le quotient $H^3(\widetilde{M}_a)$, engendré par son plus haut poids $(s, ap^d - r - 2)$, est un quotient du module de Weyl $V(s, ap^d - r - 2)$. Ceci termine la preuve du Théorème 3.2.

3.4. Description de $H^2(\mu)$ et $H^1(\mu)$ pour μ sur le mur

Lorsque μ se situe sur le mur entre une H^1-chambre et une H^2-chambre, c'est-à-dire, $\mu = (n, -n-2)$ ou $(-n-2, n)$ pour un $n \in \mathbb{N}$, on peut donner une version plus précise du Théorème 3.1. Par la symétrie entre α et β, il suffit de considérer le cas où $\mu = (n, -n-2)$.

Remarquons d'abord que si $0 \leq n \leq p-1$, on peut appliquer le théorème de Borel–Weil–Bott [15, II.5.5] à $\mu = (n, -n-2) = s_\beta \cdot (-1, n)$, qui se situe sur un mur. Donc on a $H^i(\mu) = 0$ pour tout i dans ce cas.

Si $n \geq p$, on a le théorème suivant :

Théorème 3.3. *Soit $\mu = (n, -n-2)$ de degré $d \geq 1$ (c'est-à-dire, $n \geq p$). Alors il existe une filtration $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{\ell-1} \subset V_\ell = H^2(\mu)$ avec $\ell \leq d$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, on ait*

$$V_i / V_{i-1} \cong \bigoplus_{j=1}^{q_i} L(\nu_{ij})^{(d_{ij})} \otimes V(\lambda_{ij})$$

avec $q_i \leq 2^{\ell-i}$. De plus, $p^{d_{ij}}\nu_{ij}$ est p^{d+1}-restreint et λ_{ij} est $p^{d_{ij}}$-restreint pour tous i, j.

Comme $H^1(\mu) \cong H^2(\mu)^t$, on obtient aussi une filtration duale de $H^1(\mu)$.

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur d. Si $d = 1$, alors $n = ap + r$ avec $1 \leq a \leq p-1$ et $0 \leq r \leq p-1$. D'après le Théorème 3.1, il existe une filtration à deux étages

$$H^2(\mu) = \begin{array}{|c|}\hline L(0, a-1)^{(1)} \otimes V(\lambda) \\ \hline L(0, a)^{(1)} \otimes H^2(\mu') \bigoplus L(0, a-2)^{(1)} \otimes H^2(\mu'') \\ \hline\end{array}$$

où $\lambda = (r, p-r-2)$, $\mu' = (r, -r-2)$ et $\mu'' = (-p+r, p-r-2)$. Comme r et $p-r-2$ sont $\leq p-1$, on a $H^2(\mu') = H^2(\mu'') = 0$, d'où

$$H^2(\mu) \cong L(0, a-1)^{(1)} \otimes V(\lambda).$$

Donc l'énoncé est vrai dans ce cas.

Supposons l'énoncé vrai pour tout n de degré $\leq d$, et soit $n = ap^{d+1} + r$ avec $1 \leq a \leq p-1$ et $0 \leq r \leq p^d - 1$. D'après le Théorème 3.1, on a une filtration à deux étages

$$H^2(\mu) = \begin{array}{|c|}\hline L(0, a-1)^{(d+1)} \otimes V(\lambda) \\ \hline L(0, a)^{(d+1)} \otimes H^2(\mu') \bigoplus L(0, a-2)^{(d+1)} \otimes H^2(\mu'') \\ \hline \end{array}$$

où $\lambda = (r, p^{d+1} - r - 2)$, $\mu' = (r, -r-2)$ et $\mu'' = (-p^{d+1} + r, p^{d+1} - r - 2) = (-m-2, m)$, où $m = p^{d+1} - r - 2$. Donc μ' et μ'' sont tous les deux encore sur le mur et de degré $\leq d$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une filtration de $H^2(\mu')$

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{\ell'} = H^2(\mu')$$

avec $\ell' \leq d$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell'\}$, on ait

$$M_i / M_{i-1} \cong \bigoplus_{j=1}^{q'_i} L(\nu'_{ij})^{(d'_{ij})} \otimes V(\lambda'_{ij})$$

avec $q'_i \leq 2^{\ell' - i}$. De plus, $p^{d'_{ij}} \nu'_{ij}$ est p^{d+1}-restreint et λ'_{ij} est $p^{d'_{ij}}$-restreint pour tous i, j. Pour $i > \ell'$, posons $M_i = M_{\ell'} = H^2(\mu')$ et $q'_i = 0$.

De même, on a une filtration de $H^2(\mu'')$

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{\ell''} = H^2(\mu'')$$

avec $\ell'' \leq d$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell''\}$, on ait

$$N_i / N_{i-1} \cong \bigoplus_{j=1}^{q''_i} L(\nu''_{ij})^{(d''_{ij})} \otimes V(\lambda''_{ij})$$

avec $q''_i \leq 2^{\ell'' - i}$. De plus, $p^{d''_{ij}} \nu''_{ij}$ est p^{d+1}-restreint et λ''_{ij} est $p^{d''_{ij}}$-restreint pour tous i, j. Pour $i > \ell''$, posons $N_i = N_{\ell''} = H^2(\mu'')$ et $q''_i = 0$.

Posons maintenant $\ell = \max(\ell', \ell'') + 1 \leq d + 1$. Pour $0 \leq i \leq \ell - 1$, posons

$$\begin{aligned} V_i &= L(0, a)^{(d+1)} \otimes M_i \bigoplus L(0, a-2)^{(d+1)} \otimes N_i \\ &\subset L(0, a)^{(d+1)} \otimes H^2(\mu') \bigoplus L(0, a-2)^{(d+1)} \otimes H^2(\mu'') \subset H^2(\mu). \end{aligned}$$

Posons aussi $V_\ell = H^2(\mu)$.

Alors pour $1 \leq i \leq \ell - 1$, on a

$$
\begin{aligned}
V_i/V_{i-1} &\cong L(0,a)^{(d+1)} \otimes \bigoplus_{j=1}^{q'_i} L(\nu'_{ij})^{(d'_{ij})} \otimes V(\lambda'_{ij}) \\
&\quad \oplus L(0,a-2)^{(d+1)} \otimes \bigoplus_{j=1}^{q''_i} L(\nu''_{ij})^{(d''_{ij})} \otimes V(\lambda''_{ij}) \\
&\cong \bigoplus_{j=1}^{q'_i} L(\nu'_{ij} + (0,a)p^{d+1-d'_{ij}})^{(d'_{ij})} \otimes V(\lambda'_{ij}) \\
&\quad \oplus \bigoplus_{j=1}^{q''_i} L(\nu''_{ij} + (0,a-2)p^{d+1-d''_{ij}})^{(d''_{ij})} \otimes V(\lambda''_{ij}).
\end{aligned}
$$

Pour $1 \leq i \leq \ell - 1$, posons $q_i = q'_i + q''_i$. Pour $1 \leq j \leq q'_i$, posons $\nu_{ij} = \nu'_{ij} + (0,a)p^{d+1-d'_{ij}}$, $d_{ij} = d'_{ij}$ et $\lambda_{ij} = \lambda'_{ij}$. Pour $q'_i < j \leq q_i$, posons $\nu_{ij} = \nu''_{i,j-q'_i} + (0,a-2)p^{d+1-d''_{i,j-q'_i}}$, $d_{ij} = d''_{i,j-q_i}$ et $\lambda_{ij} = \lambda''_{i,j-q_i}$. Alors l'isomorphisme précédent se réécrit

$$
V_i/V_{i-1} \cong \bigoplus_{j=1}^{q_i} L(\nu_{ij})^{(d_{ij})} \otimes V(\lambda_{ij}).
$$

De plus, on a $q_i = q'_i + q''_i \leq 2^{\ell'-i} + 2^{\ell''-i} \leq 2 \cdot 2^{\max(\ell',\ell'')-i} = 2^{\ell-i}$ et λ_{ij} est $p^{d_{ij}}$-restreint par définition. D'après le Lemme 3.1, $p^{d_{ij}}\nu_{ij}$ est p^{d+2}-restreint puisque $L(p^{d_{ij}}\nu_{ij} + \lambda_{ij})$ est un facteur de composition de $H^2(n, -n-2)$ avec $n = ap^{d+1} + r$.

Enfin, si $i = \ell$, on a $V_i/V_{i-1} \cong L(0, a-1)^{(d+1)} \otimes V(r, p^{d+1} - r - 2)$.

Donc l'énoncé est vrai pour μ. Ceci termine la preuve du Théorème 3.3. ■

D'autre part, si $\mu = (n, -n-2)$ avec $n = ap^d + r$, où $0 \leq a \leq p-1$ et $0 \leq r \leq p^d - 1$, alors d'après le Théorème 3.2 et la Remarque 3.5, il existe une suite exacte courte de G-modules

$$
0 \to L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(r, -r-2) \to H^2(\mu) \to W(r, n-2r-2) \to 0, \tag{3.15}
$$

où $W(r, n-2r-2)$ est un quotient du module de Weyl $V(r, n-2r-2)$. On a le corollaire suivant :

Corollaire 3.1. *Soit $n = a_d p^d + a_{d-1}p^{d-1} + \cdots + a_0$ avec $0 \leq a_i \leq p-1$. Pour $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$, notons $r_k = \sum_{i=0}^{k} a_i p^i$ (donc $n = r_d$). Alors $H^2(n, -n-2)$ admet une filtration*

$$
0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{d-1} \subset M_d = H^2(n, -n-2)
$$

telle que

$$
M_i/M_{i-1} \cong L(0, n - r_i) \otimes W(r_{i-1}, r_i - 2r_{i-1} - 2)
$$

où $W(r_{i-1}, r_i - 2r_{i-1} - 2)$ est un quotient du module de Weyl $V(r_{i-1}, r_i - 2r_{i-1} - 2)$ défini par (3.15).

Remarque 3.6. On utilise toujours la convention que $V(a,b)=0$ si (a,b) n'est pas dominant. Donc si $a_i=0$ pour un $i\in\{1,\dots,d\}$, alors $r_{i-1}=r_i$ et $W(r_{i-1},r_i-2r_{i-1}-2)=0$. Donc $M_i=M_{i-1}$ dans ce cas.

Démonstration du Corollaire 3.1. Raisonnons par récurrence sur d. Si $d=1$, alors $n=ap+r$ avec $0\le a,r\le p-1$. Avec les notations ci-dessus, on a $r_0=r$ et $r_1=n$. Comme $H^2(r,-r-2)=0$, d'après le Théorème 3.2, $H^2(n,-n-2)\cong W(r,n-2r-2)\cong L(0,n-r_1)\otimes W(r_0,r_1-2r_0-2)$ où $W(r,n-2r-2)=W(r_0,r_1-2r_0-2)$ est un quotient du module de Weyl $V(r_0,r_1-2r_0-2)$. Donc l'énoncé est vrai dans ce cas.

Supposons l'énoncé vrai pour tout n de degré $\le d$ pour un $d\ge 1$. Soit $n=a_{d+1}p^{d+1}+a_dp^d+\cdots+a_0$. Alors d'après le Théorème 3.2, on a une suite exacte courte de G-modules

$$0\to L(0,a_{d+1})^{(d+1)}\otimes H^2(r_d,-r_d-2)\to H^2(n,-n-2)\to W(r_d,n-2r_d-2)\to 0$$

où $W(r_d,n-2r_d-2)$ est un quotient de $V(r_d,n-2r_d-2)$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $r_d=a_dp^d+\cdots+a_0$, on obtient une filtration

$$0=M'_0\subset M'_1\subset\cdots\subset M'_{d-1}\subset M'_d=H^2(r_d,-r_d-2)$$

telle que pour $i=1,\dots,d$,

$$M'_i/M'_{i-1}\cong L(0,r_d-r_i)\otimes W(r_{i-1},r_i-2r_{i-1}-2)$$

où $W(r_{i-1},r_i-2r_{i-1}-2)$ est un quotient de $V(r_{i-1},r_i-2r_{i-1}-2)$. Posons $M_i=L(0,a_{d+1})^{(d+1)}\otimes M'_i$ pour $i=0,1,\dots,d$ et $M_{d+1}=H^2(n,-n-2)$, alors on obtient une filtration de $H^2(n,-n-2)$

$$0=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_d\subset M_{d+1}=H^2(n,-n-2)$$

telle que

$$\begin{aligned}
M_{d+1}/M_d&\cong W(r_d,n-2r_d-2)\cong L(0,n-r_{d+1})\otimes W(r_d,r_{d+1}-2r_d-2),\\
M_i/M_{i-1}&\cong L(0,a_{d+1})^{(d+1)}\otimes(M'_i/M'_{i-1})\\
&\cong L(0,a_{d+1}p^{d+1})\otimes L(0,r_d-r_i)\otimes W(r_{i-1},r_i-2r_{i-1}-2)\\
&\cong L(0,n-r_i)\otimes W(r_{i-1},r_i-2r_{i-1}-2)\quad \text{si } i\le d.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du Corollaire 3.1. ∎

4. Une p-H^i-D-filtration

La filtration obtenue dans le chapitre 3 ne donne pas d'informations sur la structure de $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$ si μ n'est pas dans la région de Griffith. Mais Jantzen [14] a montré que pour $G=\mathrm{SL}_3$, tout module de Weyl $V(\lambda)$ possède une p-Weyl filtration, c'est-à-dire, une filtration dont les quotients sont de la forme $V(\nu^1)^{(1)}\otimes L(\nu^0)$, où ν^0 est p-restreint.

Dualement, pour $G = \mathrm{SL}_3$ tout module induit $H^0(\lambda)$ possède une p-H^0-filtration. Il est naturel de se demander si $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$ possèdent aussi une filtration analogue. Pour cela, comme dans [14], on commence par étudier la structure du BG_1-module $\widehat{Z}(\mu) = \mathrm{Ind}_B^{BG_1}(\mu)$.

Tandis que Jantzen utilise une suite de composition arbitraire de $\widehat{Z}(\mu)$ pour induire une p-filtration de $H^0(\mu)$ (et de $H^3(\mu)$ par dualité), j'utiliserai la notion de « D-filtration » (en l'honneur de Donkin [7]) de $\widehat{Z}(\mu)$, qui sera définie dans le paragraphe 4.1. On va voir que cette filtration non seulement redonne la p-filtration de Jantzen pour $H^0(\mu)$ et $H^3(\mu)$ (Proposition 4.3) si μ est dominant ou anti-dominant, mais donne aussi une filtration analogue pour $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$ si $\mu \notin C \cup w_0 \cdot C$.

4.1. *"D-filtration" de* $\widehat{Z}(\mu) = \mathrm{Ind}_B^{BG_1}(\mu)$

Pour tout $\mu \in X(T)$, notons $\widehat{Z}(\mu) = \mathrm{Ind}_B^{BG_1}(\mu)$.

Dans ce paragraphe, je vais considérer une filtration de $\widehat{Z}(\mu)$ qui se comportera bien pour le foncteur $H^0(G/BG_1, \bullet)$. Ce n'est pas une suite de composition comme BG_1-module car certains facteurs font apparaître des B-extensions de dimension 2, tordues par le Frobenius. Ces extensions apparaissent, au moins au niveau des formules de caractère, dans l'article [7] de Donkin. Pour cette raison, j'appelle cette filtration de $\widehat{Z}(\mu)$ la D-filtration.

Remarque 4.1. Notre $\widehat{Z}(\mu)$ est noté $\widehat{Z}'_1(\mu)$ dans [15, II.9].

Notons $E_\alpha(\mu)$ l'unique sous-B-module de dimension 2 de $L(0,1) \otimes (\mu + (-1,1))$. Donc il existe une suite exacte non scindée de B-modules

$$0 \to \mu - \alpha \to E_\alpha(\mu) \to \mu \to 0.$$

De même, notons $E_\beta(\mu)$ l'unique sous-B-module de dimension 2 de $L(1,0) \otimes (\mu + (1,-1))$. Donc il existe une suite exacte non scindée de B-modules

$$0 \to \mu - \beta \to E_\beta(\mu) \to \mu \to 0.$$

Posons aussi $E_0(\mu) = \mu$.

On sait que $\widehat{Z}(\mu + p\mu') \cong \widehat{Z}(\mu) \otimes p\mu'$ comme BG_1-modules (cf. [15, II.9.2]), donc il suffit de considérer six cas pour $\mu \in X_1(T)$; cf. la figure et la définition ci-dessous.

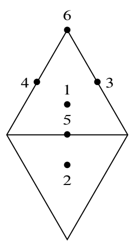


Fig. 2. Six cas dans $X_1(T)$.

Définition 4.1. Soit $\mu = (x, y) \in X(T)$. Écrivons $x = x^1 p + r$ et $y = y^1 p + s$ avec $r, s \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. On rappelle la terminologie suivante (voir par exemple [16, 1.1]).

(1) On dit que μ est *de type* Δ si $r < p-1$, $s < p-1$ et $r+s > p-2$.

(2) On dit que μ est *de type* ∇ si $r+s < p-2$.

(3) On dit que μ est *α-singulier* si $r = p-1$ et $s < p-1$.

(4) On dit que μ est *β-singulier* si $s = p-1$ et $r < p-1$.

(5) On dit que μ est *γ-singulier* si $r < p-1$, $s < p-1$ et $r+s = p-2$.

(6) On dit que μ est *α-β-singulier* si $r = s = p-1$.

Pour $0 \le r, s \le p-2$, on pose $\overline{r} = p-r-2$ et $\overline{s} = p-s-2$.

D'abord, si $\mu = (p-1)\rho$ (correspondant au cas 6 dans la figure 2) alors $\widehat{Z}(\mu) = L((p-1)\rho)$ (cf. [15, II.3.18 (6)]). Dans ce cas, la D-filtration est juste la filtration triviale.

Comme $\hat{Z}(\mu)$ est un BG_1-module de longueur finie, dont la multiplicité de chaque facteur simple est 1, la structure des sous-modules de $\hat{Z}(\mu)$ peut se décrire par un graphe [12, 2.5].

4.1.1. Cas singulier pour une seule racine. Si μ est γ-singulier (correspondant au cas 5 dans la figure 2) alors $\mu = (r, p-2-r)$ avec $0 \le r \le p-2$. Alors $s_\alpha \cdot \mu = \mu - (r+1)\alpha = (-r-2, p-1)$ et $s_\beta \cdot \mu = \mu - (p-1-r)\beta = (p-1, -p+r)$. Et $s_\gamma \cdot \mu = \mu - p\gamma = (-p+r, -r-2)$. Alors d'après [12, 3.3], le graphe de $\widehat{Z}(r, p-2-r)$ comme TG_1-module est donné par

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \widehat{L}(r,\overline{r}) \otimes (-1,-1)^{(1)} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\widehat{L}(\overline{r}, p-1) \otimes (-1,0)^{(1)} \arrow[dr] & & \widehat{L}(p-1, r) \otimes (0,-1)^{(1)} \arrow[dl] \\
 & \widehat{L}(r,\overline{r}) &
\end{tikzcd}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}^1_{BG_1}(\widehat{L}(\overline{r}, p-1) \otimes (-1,0)^{(1)}, \widehat{L}(p-1, r) \otimes (0,-1)^{(1)}) = 0,\\
&\mathrm{Ext}^1_{BG_1}(\widehat{L}(p-1, r) \otimes (0,-1)^{(1)}, \widehat{L}(\overline{r}, p-1) \otimes (-1,0)^{(1)}) = 0,
\end{aligned}$$

d'après [15, II.9.21]. Donc le graphe ci-dessus est aussi le graphe de $\widehat{Z}(r, p-2-r)$ comme BG_1-module.

Dans ce cas, une D-filtration est n'importe quelle suite de composition de $\widehat{Z}(\mu)$.

Si μ est α-singulier (correspondant au cas 3 dans la figure 2) alors $\mu = (p-1, s)$ avec $0 \le s \le p-2$. On a

$$\begin{cases}
\mu_3 = s_\beta \cdot \mu = \mu - (s+1)\beta = (p+s, -s-2),\\
\mu_4 = s_{\alpha,p} \cdot \mu_3 = \mu_3 - (s+1)\alpha = (p-2-s, -1),\\
\mu_2 = s_\alpha \cdot \mu_4 = \mu_4 - (p-1-s)\alpha = \mu_3 - p\alpha = (-p+s, p-s-2).
\end{cases}$$

Alors d'après [12, 5.2], le graphe de $\widehat{Z}(p-1,s)$ comme BG_1-module est donné par

$$\begin{array}{c}
\widehat{L}(\overline{s},p-1)\otimes(0,-1)^{(1)}\\
\big\downarrow\\
\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(1,-1)^{(1)}\\
\Big\Downarrow{\scriptstyle -p\alpha}\\
\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(-1,0)^{(1)}\\
\big\downarrow\\
\widehat{L}(p-1,s)
\end{array}$$

où la flèche $\Rightarrow$ indique une extension non scindée de $\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(1,-1)^{(1)}$ par $\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(-1,0)^{(1)}$. Or on a

$$\mathrm{Ext}^1_{BG_1}(\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(1,-1)^{(1)},\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(-1,0)^{(1)})\cong k$$

d'après [15, II.9.21] et on sait qu'il existe une extension non scindée

$$0\to\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(-1,0)^{(1)}\to\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes E_\alpha(1,-1)^{(1)}\to\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(1,-1)^{(1)}\to 0,$$

donc la flèche $\Rightarrow$ indique l'extension non scindée isomorphe à $\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes E_\alpha(1,-1)^{(1)}$.

Dans ce cas, la D-filtration est la suivante :

$$\begin{aligned}
0=N_0\subset N_1\subset N_2\subset N_3&=\widehat{Z}(p-1,s),\\
N_1&\cong\widehat{L}(p-1,s),\\
N_2/N_1&\cong\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes E_\alpha(1,-1)^{(1)},\\
N_3/N_2&\cong\widehat{L}(\overline{s},p-1)\otimes(0,-1)^{(1)}.
\end{aligned}\tag{4.1}$$

De même, si μ est β-singulier (correspondant au cas 4 dans la figure 2) alors $\mu=(r,p-1)$ avec $0\leq r\leq p-2$. On a

$$\begin{cases}
\mu_3=s_\alpha\cdot\mu=\mu-(r+1)\alpha=(-r-2,p+r),\\
\mu_4=s_{\beta,p}\cdot\mu_3=\mu_3-(r+1)\beta=(-1,p-2-r),\\
\mu_2=s_\beta\cdot\mu_4=\mu_4-(p-1-r)\beta=\mu_3-p\beta=(p-2-r,-p+r).
\end{cases}$$

Alors le graphe de $\widehat{Z}(r,p-1)$ comme BG_1-module est donné par

$$\begin{array}{c}
\widehat{L}(p-1,p-2-r)\otimes(-1,0)^{(1)}\\
\big\downarrow\\
\widehat{L}(p-2-r,r)\otimes(-1,1)^{(1)}\\
\Big\Downarrow{\scriptstyle -p\beta}\\
\widehat{L}(p-2-r,r)\otimes(0,-1)^{(1)}\\
\big\downarrow\\
\widehat{L}(r,p-1)
\end{array}$$

où la flèche $\Rightarrow$ indique l'extension non scindée isomorphe à $\widehat{L}(p-2-r,r)\otimes E_\beta(-1,1)^{(1)}$.

Dans ce cas, la D-filtration est la suivante :

$$\begin{aligned} 0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3 &= \widehat{Z}(r,p-1),\\ N_1 &\cong \widehat{L}(r,p-1),\\ N_2/N_1 &\cong \widehat{L}(\overline{r},r)\otimes E_\beta(-1,1)^{(1)},\\ N_3/N_2 &\cong \widehat{L}(p-1,\overline{r})\otimes(-1,0)^{(1)}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.1.2. Cas de l'alcôve supérieure Δ. Soient $r,s\geq 0$ tels que $r+s\leq p-3$ et soit $\mu=(\overline{r},\overline{s})$.

Alors d'après [12, 5.3], le graphe de $\widehat{Z}(\overline{r},\overline{s})$ (correspondant au cas 1 dans la figure 2) comme BG_1-module est donné par

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \widehat{L}(s,r)\otimes(-1,-1)^{(1)} \arrow[dll] \arrow[drr] & & \\
\widehat{L}(\overline{s},r+s+1)\otimes(-1,0)^{(1)} \arrow[d] \arrow[ddrr] \arrow[ddrrrr] & & & & \widehat{L}(r+s+1,\overline{r})\otimes(0,-1)^{(1)} \arrow[d] \arrow[ddll] \arrow[ddllll] \\
\widehat{L}(r,p-3-r-s)\otimes(-1,1)^{(1)} \arrow[d, Rightarrow, "-p\beta"] & & & & \widehat{L}(p-3-r-s,s)\otimes(1,-1)^{(1)} \arrow[d, Rightarrow, "-p\alpha"] \\
\widehat{L}(r,p-3-r-s)\otimes(0,-1)^{(1)} \arrow[drr] & & \widehat{L}(s,r) \arrow[d] & & \widehat{L}(p-3-r-s,s)\otimes(-1,0)^{(1)} \arrow[dll] \\
 & & \widehat{L}(\overline{r},\overline{s}) & &
\end{tikzcd}$$

où la flèche $\Rightarrow$ à gauche indique une extension non scindée de $\widehat{L}(r,p-3-r-s)\otimes(-1,1)^{(1)}$ par $\widehat{L}(r,p-3-r-s)\otimes(0,-1)^{(1)}$. Or d'après [15, II.9.21], il existe une unique telle extension à isomorphisme près, donc cette flèche $\Rightarrow$ indique l'extension isomorphe à $\widehat{L}(r,p-3-r-s)\otimes E_\beta(-1,1)^{(1)}$. De même, la flèche $\Rightarrow$ à droite indique une extension isomorphe à $\widehat{L}(p-3-r-s,s)\otimes E_\alpha(1,-1)^{(1)}$.

Dans ce cas, une D-filtration est une filtration induite par le graphe suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \widehat{L}(s,r)\otimes(-1,-1)^{(1)} \arrow[dll] \arrow[drr] & & \\
\widehat{L}(\overline{s},r+s+1)\otimes(-1,0)^{(1)} \arrow[d] \arrow[drr] \arrow[drrrr] & & & & \widehat{L}(r+s+1,\overline{r})\otimes(0,-1)^{(1)} \arrow[d] \arrow[dll] \arrow[dllll] \\
\widehat{L}(r,p-3-r-s)\otimes E_\beta(-1,1)^{(1)} \arrow[drr] & & \widehat{L}(s,r) \arrow[d] & & \widehat{L}(p-3-r-s,s)\otimes E_\alpha(1,-1)^{(1)} \arrow[dll] \\
 & & \widehat{L}(\overline{r},\overline{s}) & &
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Par exemple, la filtration suivante est une D-filtration :

$$
\begin{aligned}
0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_6 \subset N_7 &= \widehat{Z}(\overline{r}, \overline{s}),\\
N_1 &\cong \widehat{L}(\overline{r}, \overline{s}),\\
N_2/N_1 &\cong \widehat{L}(s, r),\\
N_3/N_2 &\cong \widehat{L}(p-3-r-s, s) \otimes E_\alpha(1,-1)^{(1)},\\
N_4/N_3 &\cong \widehat{L}(r, p-3-r-s) \otimes E_\beta(-1,1)^{(1)},\\
N_5/N_4 &\cong \widehat{L}(r+s+1, \overline{r}) \otimes (0,-1)^{(1)},\\
N_6/N_5 &\cong \widehat{L}(\overline{s}, r+s+1) \otimes (-1,0)^{(1)},\\
N_7/N_6 &\cong \widehat{L}(s, r) \otimes (-1,-1)^{(1)}.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

4.1.3. Cas de l'alcôve inférieure ∇. Soit $\mu = (r, s)$ avec $r, s \geq 0$ et $r + s \leq p - 3$ (correspondant au cas 2 dans la figure 2).

Alors d'après [12, 5.3], le graphe de $\widehat{Z}(r, s)$ comme BG_1-module est donné par

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & \widehat{L}(\overline{s},\overline{r})\otimes(-1,-1)^{(1)} \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
\widehat{L}(s,p-3-r-s)\otimes(0,-1)^{(1)} \arrow[d, Rightarrow, "-p\alpha"] \arrow[ddrrrr] & & \widehat{L}(r,s)\otimes(-1,-1)^{(1)} \arrow[ddll] \arrow[ddrr] & & \widehat{L}(p-3-r-s,r)\otimes(-1,0)^{(1)} \arrow[d, Rightarrow, "-p\beta"] \arrow[ddllll] \\
\widehat{L}(s,p-3-r-s)\otimes(-2,0)^{(1)} \arrow[d] & & & & \widehat{L}(p-3-r-s,r)\otimes(0,-2)^{(1)} \arrow[d] \\
\widehat{L}(\overline{r},r+s+1)\otimes(-1,0)^{(1)} \arrow[drr] & & & & \widehat{L}(r+s+1,\overline{s})\otimes(0,-1)^{(1)} \arrow[dll] \\
 & & \widehat{L}(r,s) & &
\end{tikzcd}
$$

où à nouveau la flèche $\Rightarrow$ à gauche indique l'extension non scindée $\widehat{L}(s, p-3-r-s) \otimes E_\alpha(0,-1)^{(1)}$ et la flèche $\Rightarrow$ à droite indique l'extension non scindée $\widehat{L}(p-3-r-s, r) \otimes E_\beta(-1,0)^{(1)}$ comme dans le cas de l'alcôve Δ.

Dans ce cas, une D-filtration est une filtration induite par le graphe suivant :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & \widehat{L}(\overline{s},\overline{r})\otimes(-1,-1)^{(1)} \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
\widehat{L}(s,p-3-r-s)\otimes E_\alpha(0,-1)^{(1)} \arrow[d] \arrow[drrrr] & & \widehat{L}(r,s)\otimes(-1,-1)^{(1)} \arrow[dll] \arrow[drr] & & \widehat{L}(p-3-r-s,r)\otimes E_\beta(-1,0)^{(1)} \arrow[d] \arrow[dllll] \\
\widehat{L}(\overline{r},r+s+1)\otimes(-1,0)^{(1)} \arrow[drr] & & & & \widehat{L}(r+s+1,\overline{s})\otimes(0,-1)^{(1)} \arrow[dll] \\
 & & \widehat{L}(r,s) & &
\end{tikzcd}
\tag{4.5}
$$

Par exemple, la filtration suivante est une D-filtration :

$$\begin{aligned} 0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_6 \subset N_7 &= \widehat{Z}(r,s), \\ N_1 &\cong \widehat{L}(r,s), \\ N_2/N_1 &\cong \widehat{L}(\overline{r}, r+s+1) \otimes (-1,0)^{(1)}, \\ N_3/N_2 &\cong \widehat{L}(r+s+1, \overline{s}) \otimes (0,-1)^{(1)}, \\ N_4/N_3 &\cong \widehat{L}(s, p-3-r-s) \otimes E_\alpha(0,-1)^{(1)}, \\ N_5/N_4 &\cong \widehat{L}(p-3-r-s, r) \otimes E_\beta(-1,0)^{(1)}, \\ N_6/N_5 &\cong \widehat{L}(r,s) \otimes (-1,-1)^{(1)}, \\ N_7/N_6 &\cong \widehat{L}(\overline{s}, \overline{r}) \otimes (-1,-1)^{(1)}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

4.2. Sur la cohomologie des B-modules $E_\alpha(\mu)$ et $E_\beta(\mu)$

Pour montrer les résultats principaux, il faut d'abord établir quelques propriétés des modules $H^i(E_\alpha(\mu))$ et $H^i(E_\beta(\mu))$.

Lemme 4.1. *On a $H^i(E_\alpha(0,y)) = H^i(E_\beta(x,0)) = 0$ pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. On a $E_\alpha(0,y) \cong L_\alpha(1,0) \otimes (-1,y)$, donc d'après l'identité tensorielle (cf. [15, I.3.6])

$$H^i(P_\alpha/B, E_\alpha(0,y)) \cong L_\alpha(1,0) \otimes H^i(P_\alpha/B, (-1,y)) = 0$$

pour tout i. D'autre part, on a une suite spectrale avec

$$E_2^{j,i} = R^j \operatorname{Ind}_{P_\alpha}^G (H^i(P_\alpha/B, E_\alpha(0,y))) \Rightarrow H^{j+i}(E_\alpha(0,y)) \tag{4.7}$$

par [15, I.4.5.c], d'où $H^i(E_\alpha(0,y)) = 0$ pour tout i.

Et de même pour $E_\beta(x,0)$. ∎

Proposition 4.1. *Supposons que $\mu_1 = (ap^d + r, -ap^d)$ et $\mu_2 = ((a+1)p^d, -ap^d - s - 2)$ avec $d \geq 0$, $a \in \{1, \ldots, p-1\}$, $r \geq -1$ et $s \leq p^d - 1$. Alors*

$$H^2(E_\beta(\mu_1)) = H^2(E_\alpha(\mu_2)) = 0.$$

Remarque 4.2. Dans cette proposition, les valeurs permises pour μ_2 sont les $(m, -n-2)$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \leq m-1$ et $m = 2, 3, \ldots, p-1, p, 2p, 3p, \ldots, (p-1)p, p^2, 2p^2, 3p^2, \ldots$. D'autre part, on peut vérifier directement que $H^2(E_\alpha(1, -n-2)) = 0$ si $n \leq 0$, puisque $H^2(1, -n-2) = 0$ par la Remarque 3.3 et $H^2((1, -n-2) - \alpha) = 0$. Donc d'après la proposition, on a $H^2(E_\alpha(\mu_2)) = 0$ pour tout μ_2 de la forme $(m, -n-2)$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \leq m-1$ et $m = 1, 2, 3, \ldots, p, 2p, \ldots, p^2, 2p^2, \ldots$, c'est-à-dire, de la forme $\mu_2 = (ap^d, -n-2)$ avec $d \geq 0$, $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ et $n \leq ap^d - 1$. On a décalé les valeurs de a dans l'énoncé de la proposition juste pour simplifier les raisonnements par récurrence dans la preuve.

Démonstration de la Proposition 4.1. Raisonnons par récurrence sur d. Lorsque $d = 0$, on a $\mu_1 = (a + r, -a)$ et $\mu_2 = (a + 1, -a - s - 2)$ avec $r \geq -1$ et $s \leq 0$. Donc μ_1, $\mu_1 - \beta$, μ_2 et $\mu_2 - \alpha$ sont tous de la forme $(m, -n - 2)$ avec $m \geq n$, $m \geq 0$ (donc ils sont dans une H^0- ou une H^1-chambre) et $n \leq p - 1$ (donc ils ne sont pas dans Gr), d'où $H^2(\mu_1) = H^2(\mu_1 - \beta) = H^2(\mu_2) = H^2(\mu_2 - \alpha) = 0$ d'après la Remarque 3.3. Par conséquent, $H^2(E_\beta(\mu_1)) = H^2(E_\alpha(\mu_2)) = 0$.

Supposons le résultat établi au cran d et soient $\mu_1 = (ap^{d+1} + r, -ap^{d+1})$ et $\mu_2 = ((a + 1)p^{d+1}, -ap^{d+1} - s - 2)$ avec $r \geq -1$ et $s \leq p^{d+1} - 1$.

1) Montrons d'abord que $H^2(E_\beta(\mu_1)) = 0$. Notons $\mu_1' = (r, 0)$ et $\mu_1'' = (-p^{d+1} + r, p^{d+1})$. Comme $\mu_1'' = (-(p - 1)p^d - (p^d - r - 2) - 2, p \cdot p^d)$, alors, en échangeant les rôles de α et β et en appliquant l'hypothèse de récurrence à α, on a $H^2(E_\beta(\mu_1'')) = 0$.

Rappelons les trois suites exactes du paragraphe 3.3.1 :

$$0 \to K_a \to L(0, a) \to L(0, a - 1) \otimes (0, 1) \to 0, \tag{4.8}$$

$$0 \to M_a \to K_a \to (a, -a) \to 0, \tag{4.9}$$

$$0 \to M_a \to L(0, a - 1) \otimes (-1, 0) \to L(0, a - 2) \otimes (-1, 1) \to 0. \tag{4.10}$$

Appliquons la $(d + 1)$-ième puissance de la torsion de Frobenius à (4.8)–(4.10) et tensorisons par $E_\beta(r, 0)$. Désignons encore les modules ainsi obtenus par $\widetilde{K}_a$ et $\widetilde{M}_a$. On obtient les suites exactes

$$0 \to \widetilde{K}_a \to L(0, a)^{(d+1)} \otimes E_\beta(\mu_1') \to L(0, a - 1)^{(d+1)} \otimes E_\beta(r, p^{d+1}) \to 0, \tag{4.11}$$

$$0 \to \widetilde{M}_a \to \widetilde{K}_a \to E_\beta(\mu_1) \to 0, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} 0 \to \widetilde{M}_a &\to L(0, a - 1)^{(d+1)} \otimes E_\beta(r - p^{d+1}, 0) \\ &\to L(0, a - 2)^{(d+1)} \otimes E_\beta(\mu_1'') \to 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Comme $H^2(E_\beta(\mu_1'')) = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence et $H^3(E_\beta(r - p^{d+1}, 0)) = 0$ d'après le Lemme 4.1, la suite (4.13) donne $H^3(\widetilde{M}_a) = 0$.

Comme (r, p^{d+1}) et $(r, p^{d+1}) - \beta = (r + 1, p^{d+1} - 2)$ sont dans C, donc n'ont pas de H^1, on a $H^1(E_\beta(r, p^{d+1})) = 0$. Par ailleurs $H^2(E_\beta(\mu_1')) = 0$ d'après le Lemme 4.1, donc (4.11) donne $H^2(\widetilde{K}_a) = 0$.

D'après (4.12), on a une suite exacte $H^2(\widetilde{K}_a) \to H^2(E_\beta(\mu_1)) \to H^3(\widetilde{M}_a)$, d'où $H^2(E_\beta(\mu_1)) = 0$.

2) Montrons maintenant que $H^2(E_\alpha(\mu_2)) = 0$. Notons $\mu_2' = (p^{d+1}, -s - 2)$ et $\mu_2'' = (0, p^{d+1} - s - 2)$.

Comme $\mu_2' = (p \cdot p^d, -(p - 1)p^d - (s - p^{d+1} + p^d) - 2)$ avec $s - p^{d+1} + p^d \leq p^d - 1$, d'après l'hypothèse de récurrence on obtient $H^2(E_\alpha(\mu_2')) = 0$.

Appliquons la $(d + 1)$-ième puissance de la torsion de Frobenius à (4.8)–(4.10) et tensorisons par $E_\alpha(\mu_2')$. On obtient les suites exactes suivantes :

$$0 \to \widetilde{K}_a \to L(0,a)^{(d+1)} \otimes E_\alpha(\mu_2') \\ \to L(0,a-1)^{(d+1)} \otimes E_\alpha(p^{d+1}, p^{d+1}-s-2) \to 0, \tag{4.14}$$

$$0 \to \widetilde{M}_a \to \widetilde{K}_a \to E_\alpha(\mu_2) \to 0, \tag{4.15}$$

$$0 \to \widetilde{M}_a \to L(0,a-1)^{(d+1)} \otimes E_\alpha(0,-s-2) \\ \to L(0,a-2)^{(d+1)} \otimes E_\alpha(\mu_2'') \to 0. \tag{4.16}$$

Comme $H^2(E_\alpha(\mu_2'')) = H^2(E_\alpha(0, p^{d+1}-s-2)) = 0$ et $H^3(E_\alpha(0,-s-2)) = 0$ d'après le Lemme 4.1, on déduit de (4.16) que $H^3(\widetilde{M}_a) = 0$.

Comme $(p^{d+1}, p^{d+1}-s-2)$ et

$$(p^{d+1}, p^{d+1}-s-2) - \alpha = (p^{d+1}-2, p^{d+1}-s-1)$$

sont dans C, donc n'ont pas de H^1, on a $H^1(E_\alpha(p^{d+1}, p^{d+1}-s-2)) = 0$. Par ailleurs $H^2(E_\alpha(\mu_2')) = 0$, donc d'après (4.14) on a $H^2(\widetilde{K}_a) = 0$.

Enfin, par (4.15) on a une suite exacte $H^2(\widetilde{K}_a) \to H^2(E_\alpha(\mu_2)) \to H^3(\widetilde{M}_a)$, ce qui donne $H^2(E_\alpha(\mu_2)) = 0$. Ceci termine la preuve de la Proposition 4.1. ∎

À l'aide de la Remarque 4.2, on déduit de la symétrie entre α et β le corollaire suivant :

Corollaire 4.1. *Soient $a \in \{1, \dots, p-1\}$, $d \geq 0$, $m \geq ap^d - 1$ et $n \leq ap^d - 1$. Alors*

$$H^2(E_\beta(-n-2, ap^d)) = 0, \quad H^2(E_\alpha(-ap^d, m)) = 0.$$

Proposition 4.2. *Soit $\mu = (ap^d + r, -ap^d - s - 2)$ avec $a \in \{1, \dots, p-1\}$ et $d \geq 0$.*

(i) *Si $1 \leq r \leq p^d$ et $0 \leq s \leq p^d - 1$, alors $H^2(E_\alpha(\mu))$ admet la filtration à trois étages suivante :*

$$H^2(E_\alpha(\mu)) = \begin{array}{|c|} \hline L(0,a-1)^{(d)} \otimes H^3(E_\alpha(\mu + (-a-1,a)p^d)) \\ \hline L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^2(E_\alpha(\mu + (-a-1,a+1)p^d)) \\ \hline L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(E_\alpha(\mu + (-a,a)p^d)) \\ \hline \end{array}. \tag{4.17}$$

(ii) *Si $-1 \leq r \leq p^d - 2$ et $-2 \leq s \leq p^d - 3$, alors $H^2(E_\beta(\mu))$ admet la filtration à trois étages suivante :*

$$H^2(E_\beta(\mu)) = \begin{array}{|c|} \hline L(0,a-1)^{(d)} \otimes H^3(E_\beta(\mu + (-a-1,a)p^d)) \\ \hline L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^2(E_\beta(\mu + (-a-1,a+1)p^d)) \\ \hline L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(E_\beta(\mu + (-a,a)p^d)) \\ \hline \end{array}. \tag{4.18}$$

Démonstration. Montrons d'abord (i). Écrivons $E_\alpha(\mu) = E(\mu)$ pour abréger.

Soit $\mu = (ap^d + r, -ap^d - s - 2)$ avec $1 \leq r \leq p^d$ et $0 \leq s \leq p^d - 1$.

Notons $\mu' = (r, -s-2) = \mu \otimes (-a,a)p^d$ et $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2) = \mu \otimes (-a-1, a+1)p^d$. Alors $E(\mu') \cong E(\mu) \otimes (-a,a)p^d$ et $E(\mu'') \cong E(\mu) \otimes$

$(-a-1, a+1)p^d$. Appliquons la d-ième puissance de la torsion de Frobenius à (4.8)–(4.10) et tensorisons par $E(\mu')$. Désignons les modules ainsi obtenus par $\widetilde{K}_a$ et $\widetilde{M}_a$. On obtient des suites exactes

$$0 \to \widetilde{K}_a \to L(0,a)^{(d)} \otimes E(\mu') \to L(0,a-1)^{(d)} \otimes E(r, p^d - s - 2) \to 0, \tag{4.19}$$

$$0 \to \widetilde{M}_a \to \widetilde{K}_a \to E(\mu) \to 0, \tag{4.20}$$

$$0 \to \widetilde{M}_a \to L(0,a-1)^{(d)} \otimes E(r - p^d, -s-2) \to L(0,a-2)^{(d)} \otimes E(\mu'') \to 0. \tag{4.21}$$

Si $r \leq p^d - 1$, alors $(r-p^d, -s-2)$ et $(r-p^d, -s-2) - \alpha = (r-2-p^d, -s-1)$ sont dans $w_0 \cdot C$, donc n'ont de la cohomologie qu'en degré 3. Si $r = p^d$, alors $H^i(E(r-p^d, -s-2)) = 0$ pour tout i d'après le Lemme 4.1. Donc dans tous les cas, on a $H^i(E(r-p^d, -s-2)) = 0$ si $i \neq 3$. De plus, comme $s \leq p^d - 1$, alors $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$ et $\mu'' - \alpha = (-p^d + r - 2, p^d - s - 1)$ n'ont pas de cohomologie en degré 3, donc $H^3(E(\mu'')) = 0$. Donc d'après (4.21) on obtient l'isomorphisme

$$H^2(\widetilde{M}_a) \cong L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^1(E(\mu''))$$

et la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\to L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu'')) \\ &\to H^3(\widetilde{M}_a) \to L(0,a-1)^{(d)} \otimes H^3(E(r-p^d, -s-2)) \to 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Comme $(r, p^d - s - 2)$ et $(r, p^d - s - 2) - \alpha = (r-2, p^d - s - 1)$ n'ont de la cohomologie qu'en degré 0 car $r \geq 1$ et $s \leq p^d - 1$, on a $H^i(E(r, p^d - s - 2)) = 0$ si $i \neq 0$. De plus, comme $\mu' = (r, -s-2)$ et $\mu' - \alpha = (r-2, -s)$ n'ont pas de cohomologie en degré 3, on a $H^3(E(\mu')) = 0$. Donc d'après (4.19) on a $H^2(\widetilde{K}_a) \cong L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu'))$ et $H^3(\widetilde{K}_a) \cong L(0,a)^{(d)} \otimes H^3(E(\mu')) = 0$. D'après (4.20), on a

$$H^2(\widetilde{M}_a) \xrightarrow{f} H^2(\widetilde{K}_a) \to H^2(E(\mu)) \to H^3(\widetilde{M}_a) \to 0 \tag{4.23}$$

car $H^3(\widetilde{K}_a) = 0$.

Par ailleurs, si $r = p^d$, alors $H^i(E(\mu'')) = H^i(E(0, p^d - s - 2)) = 0$ pour tout i d'après le Lemme 4.1. Si $r \leq p^d - 1$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{FC}(H^1(E(\mu''))) &\subset \mathrm{FC}(H^1(\mu'')) \cup \mathrm{FC}(H^1(\mu'' - \alpha)) \\ &= \mathrm{FC}(H^1(-p^d + r, p^d - s - 2)) \cup \mathrm{FC}(H^1(-p^d + r - 2, p^d - s - 1)), \end{aligned}$$

donc tout plus haut poids d'un facteur de composition de $H^1(E(\mu''))$ est p^d-restreint d'après le Lemme 3.1. De même,

$$\begin{aligned} \mathrm{FC}(H^2(E(\mu'))) &\subset \mathrm{FC}(H^2(\mu')) \cup \mathrm{FC}(H^2(\mu' - \alpha)) \\ &= \mathrm{FC}(H^2(r, -s-2)) \cup \mathrm{FC}(H^2(r-2, -s-1)), \end{aligned}$$

donc tout plus haut poids d'un facteur de composition de $H^2(E(\mu'))$ est p^d-restreint d'après le Lemme 3.1. Donc

$$\mathrm{FC}(H^2(\widetilde{M}_a)) \cap \mathrm{FC}(H^2(\widetilde{K}_a)) = \emptyset$$

car $H^2(\widetilde{M}_a) \cong L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(E(\mu''))$ et $H^2(\widetilde{K}_a) \cong L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu'))$. Donc $f = 0$ dans (4.23).

En conclusion, si $\mu = (ap^d + r, -ap^d - s - 2)$ avec $1 \le r \le p^d$ et $0 \le s \le p^d - 1$, alors on a une filtration à trois étages de $H^2(E(\mu))$, donnée par (4.22) et par

$$0 \to L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu')) \to H^2(E(\mu)) \to H^3(\widetilde{M}_a) \to 0. \tag{4.24}$$

Ceci prouve (i).

Montrons maintenant (ii). Écrivons $E_\beta(\mu) = E(\mu)$ pour abréger. Supposons que $\mu = (ap^d + r, -ap^d - s - 2)$ avec $-1 \le r \le p^d - 2$ et $-1 \le s \le p^d - 3$ (on traitera le cas $s = -2$ à la fin).

Notons $\mu' = (r, -s-2) = \mu \otimes (-a, a)p^d$ et $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2) = \mu \otimes (-a-1, a+1)p^d$. Alors $E(\mu') \cong E(\mu) \otimes (-a, a)p^d$ et $E(\mu'') \cong E(\mu) \otimes (-a-1, a+1)p^d$. Appliquons la d-ième puissance de la torsion de Frobenius à (4.8)–(4.10) et tensorisons par $E(\mu')$. Désignons les modules ainsi obtenus par $\widetilde{K}_a$ et $\widetilde{M}_a$. On obtient les suites exactes

$$0 \to \widetilde{K}_a \to L(0, a)^{(d)} \otimes E(\mu') \to L(0, a-1)^{(d)} \otimes E(r, p^d - s - 2) \to 0, \tag{4.25}$$

$$0 \to \widetilde{M}_a \to \widetilde{K}_a \to E(\mu) \to 0, \tag{4.26}$$

$$0 \to \widetilde{M}_a \to L(0, a-1)^{(d)} \otimes E(r - p^d, -s-2) \to L(0, a-2)^{(d)} \otimes E(\mu'') \to 0. \tag{4.27}$$

Comme $(r - p^d, -s-2)$ et $(r - p^d, -s-2) - \beta = (r + 1 - p^d, -s-4)$ sont dans $w_0 \cdot C$, donc n'ont de la cohomologie qu'en degré 3, on a $H^i(E(r - p^d, -s-2)) = 0$ si $i \neq 3$ et la suite exacte

$$0 \to V(s+2, p^d - r - 3) \to H^3(E(r - p^d, -s-2)) \to V(s, p^d - r - 2) \to 0. \tag{4.28}$$

Comme $p^d - s - 2 \ge -1$ et $p^d - s - 4 \ge -1$ parce que $s \le p^d - 3$, on a $H^3(\mu'') = H^3(-p^d + r, p^d - s - 2) = 0$ et $H^3(\mu'' - \beta) = (-p^d + r + 1, p^d - s - 4)$, d'où $H^3(E(\mu'')) = 0$. Donc par (4.27) on obtient

$$H^2(\widetilde{M}_a) \cong L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(E(\mu''))$$

et la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu'')) &\to H^3(\widetilde{M}_a) \\ &\to L(0, a-1)^{(d)} \otimes H^3(E(r - p^d, -s-2)) \to 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Comme $(r, p^d - s - 2)$ et $(r, p^d - s - 2) - \beta = (r + 1, p^d - s - 4)$ n'ont de la cohomologie qu'en degré 0 car $r \geq -1$ et $s \leq p^d - 3$, alors $H^i(E(r, p^d - s - 2)) = 0$ si $i \neq 0$. Donc par (4.25) on a $H^2(\widetilde{K}_a) \cong L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu'))$ et $H^3(\widetilde{K}_a) \cong L(0, a)^{(d)} \otimes H^3(E(\mu')) = 0$ car μ' et $\mu' - \beta$ n'ont pas de cohomologie en degré 3.

Comme μ et $\mu - \beta$ n'ont pas de H^0 ni de H^3, on a $H^0(E(\mu)) = H^3(E(\mu)) = 0$. Donc par (4.26) et le fait que $H^3(\widetilde{K}_a) = 0$, on a une suite exacte

$$H^2(\widetilde{M}_a) \xrightarrow{f} H^2(\widetilde{K}_a) \to H^2(E(\mu)) \to H^3(\widetilde{M}_a) \to 0. \tag{4.30}$$

Par ailleurs, $\mathrm{FC}(H^1(E(\mu''))) \subset \mathrm{FC}(H^1(\mu'')) \cup \mathrm{FC}(H^1(\mu'' - \beta))$, donc tout plus haut poids d'un facteur de composition de $H^1(E(\mu''))$ est p^d-restreint d'après le Lemme 3.1. De même, tout plus haut poids d'un facteur de composition de $H^2(E(\mu'))$ est p^d-restreint. Donc

$$\mathrm{FC}(H^2(\widetilde{M}_a)) \cap \mathrm{FC}(H^2(\widetilde{K}_a)) = \emptyset$$

car $H^2(\widetilde{M}_a) \cong L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(E(\mu''))$ et $H^2(\widetilde{K}_a) \cong L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu'))$. Donc $f = 0$ dans (4.30).

En conclusion, si $\mu = (ap^d + r, -ap^d - s - 2)$ avec $-1 \leq r \leq p^d - 2$ et $-1 \leq s \leq p^d - 3$, alors on a une filtration à trois étages pour $H^2(E(\mu))$ donnée par (4.29) et par

$$0 \to L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu')) \to H^2(E(\mu)) \to H^3(\widetilde{M}_a) \to 0. \tag{4.31}$$

Cette filtration implique (4.18) pour $-1 \leq r \leq p^d - 2$ et $-1 \leq s \leq p^d - 3$.

Il reste à montrer (4.18) pour $s = -2$ et $-1 \leq r \leq p^d - 2$. Dans ce cas, $\mu = (ap^d + r, -ap^d)$, donc d'après la Proposition 4.1, on a $H^2(E_\beta(\mu)) = 0$. Comme $\mu + (-a-1, a)p^d = (r - p^d, 0)$ et $\mu + (-a, a)p^d = (r, 0)$, on a

$$H^3(E_\beta(\mu + (-a-1, a)p^d)) = H^2(E_\beta(\mu + (-a, a)p^d)) = 0$$

d'après le Lemme 4.1. En outre, posons

$$\mu'' = (\mu + (-a-1, a+1)p^d) = (r - p^d, p^d);$$

alors $H^2(E_\beta(\mu'')) = 0$ d'après le Corollaire 4.1 car $r \geq -1$. Donc les deux membres de (4.18) sont nuls. Ceci termine la preuve de (ii) et donc de la Proposition 4.2. ■

4.3. *La p-filtration de Jantzen*

Tandis que Jantzen utilise une suite de composition arbitraire de $\widehat{Z}(\mu)$ pour induire une p-filtration de $H^0(\mu)$ (et de $H^3(w_0 \cdot \mu)$ par dualité) pour μ dominant, je vais utiliser une D-filtration de $\widehat{Z}(\mu)$.

Lemme 4.2. *Soient G un schéma en groupes réductif déployé sur un corps k et H un sous-groupe fermé. Soit N un H-module qui admet une filtration $0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_\ell = N$. Posons $L_i = N_i/N_{i-1}$ pour $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Si pour un $n \in \mathbb{N}$ on a*

$\operatorname{ch} R^n \operatorname{Ind}_H^G(N) = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} R^n \operatorname{Ind}_H^G(L_i)$, *alors pour* $i = 1, \ldots, \ell$, $R^n \operatorname{Ind}_H^G(N_{i-1})$ *est un sous-module de* $R^n \operatorname{Ind}_H^G(N_i)$ *et l'on a*

$$R^n \operatorname{Ind}_H^G(N_i)/R^n \operatorname{Ind}_H^G(N_{i-1}) \cong R^n \operatorname{Ind}_H^G(L_i).$$

La preuve est standard et laissée au lecteur.

Proposition 4.3. *Soit* $\lambda = (x, y)$ *un poids tel que* $x, y \geq -1$. *D'après le paragraphe* 4.1, *il existe une D-filtration* $0 = N_0 \subset N_1 \cdots \subset N_\ell = \widehat{Z}(w_0 \cdot \lambda) = \widehat{Z}(-y-2, -x-2)$ *telle que* $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ *où* $\delta_i \in \{0, \alpha, \beta\}$ *(donc* $\ell = 1, 3, 4$, *ou* 7*).*

Alors il existe une filtration $0 = \widetilde{N}_0 \subset \widetilde{N}_1 \subset \cdots \subset \widetilde{N}_\ell = V(\lambda)$ *de* $H^3(-y-2, -x-2) \cong V(\lambda)$ *telle que*

$$\widetilde{N}_i/\widetilde{N}_{i-1} \cong L(\nu_i^0) \otimes H^3(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)} \quad \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, \ell\}.$$

De plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ *et tout* $j \neq 3$, *on a* $H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1)) = 0$.

Démonstration. Posons $\widetilde{N}_i = H^3(G/BG_1, N_i)$. Comme le foncteur $\operatorname{Ind}_B^{BG_1}$ est exact d'après la preuve de [15, II.9.12], la suite spectrale dans [15, I.4.5.c] nous donne

$$H^i(G/BG_1, -) \circ \operatorname{Ind}_B^{BG_1} = H^i(G/B, -). \tag{4.32}$$

Donc en appliquant le Lemme 4.2 à $H = BG_1$ et $i = 3$, il suffit de montrer l'égalité suivante :

$$\operatorname{ch} H^3(-y-2, -x-2) = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^3(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}. \tag{4.33}$$

La caractéristique d'Euler–Poincaré $\chi(\cdot) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{ch} H^i(\cdot)$ est additive, donc

$$\chi(-y-2, -x-2) = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \chi(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}.$$

Comme $x, y \geq -1$, on a $\chi(-y-2, -x-2) = -\operatorname{ch} H^3(-y-2, -x-2)$. Si $-y-2 = ap + r$ et $-x-2 = bp + s$ avec $r, s \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, alors $a, b \leq -1$. D'après le paragraphe 4.1, les $E_{\delta_i}(\nu_i^1)$ possibles sont

- $(a, b), (a-1, b), (a, b-1), (a-1, b-1)$,
- $E_\alpha(a+1, b-1), E_\alpha(a, b-1), E_\beta(a-1, b+1), E_\beta(a-1, b)$.

Tout poids de la première ligne n'a de la cohomologie qu'en degré 3. Pour la deuxième ligne : $E_\alpha(a, b-1)$ et $E_\beta(a-1, b)$ n'ont de la cohomologie qu'en degré 3. Et $E_\alpha(a+1, b-1)$ n'a de la cohomologie qu'en degré 3 si $a \leq -2$; si $a = -1$, alors le poids $(a+1, b-1) = (0, b-1)$ n'a de la cohomologie qu'en degré 2 et le poids $(a+1, b-1) - \alpha = (-2, b)$ n'a de la cohomologie qu'en degré 3, et $H^2(E_\alpha(a+1, b-1)) = 0$ par le Lemme 4.1. Donc $E_\alpha(a+1, b-1)$ n'a de la cohomologie qu'en degré 3. De même pour $E_\beta(a-1, b+1)$.

Donc on a toujours $H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1)) = 0$ si $j \neq 3$. Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$ on a, pour $j \neq 3$,

$$H^j(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) \cong L(\nu_i^0) \otimes H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)} = 0$$

(cf. [15, II.9.13]) et $\chi(E_{\delta_i}(\nu_i^1)) = -\operatorname{ch} H^3(E_{\delta_i}(\nu_i^1))$, d'où l'égalité (4.33). ■

En utilisant la dualité de Serre contravariante, on obtient la proposition suivante. En fait, on peut aussi la montrer directement par une preuve analogue.

Proposition 4.4. *Soit $\lambda = (x, y)$ un poids tel que $x, y \geq -1$. D'après le paragraphe 4.1, il existe une D-filtration $0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_\ell = \widehat{Z}(\lambda)$ telle que $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ où $\delta_i \in \{0, \alpha, \beta\}$ (donc $\ell = 1, 3, 4$, ou 7).*

Alors il existe une filtration $0 = \widetilde{N}_0 \subset \widetilde{N}_1 \subset \cdots \subset \widetilde{N}_\ell = H^0(\lambda)$ de $H^0(\lambda)$ telle que $\widetilde{N}_i/\widetilde{N}_{i-1} \cong L(\nu_i^0) \otimes H^0(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}$ pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$.

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$ et tout $j \neq 0$, on a $H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1)) = 0$.

Avec cette filtration, on peut redémontrer l'existence d'une p-Weyl filtration pour tout $\lambda \in X(T)^+$ si $G = \mathrm{SL}_3$ (cf. [14, 3.13]).

Plus précisément, supposons $\lambda = (a, b) \in X(T)^+$ et écrivons $a = a^1 p + r$, $b = b^1 p + s$ avec $0 \leq r, s \leq p - 1$. Pour $\mu = p\mu^1 + \mu^0$ avec $\mu^0 \in X_1(T)$ et $\mu^1 \in X(T)$, notons $\nabla_p(\mu) = L(\mu^0) \otimes H^0(\mu^1)^{(1)}$. Distinguons les cas suivants.

1) Si λ est de type Δ, alors les plus hauts poids des facteurs de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$ sont donnés par la figure suivante, où $\lambda_1 = \lambda$ et les triangles équilatéraux sont des p-alcôves :

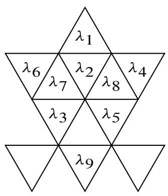


Fig. 3. Type Δ.

Remarque 4.3. Si $\widehat{L}(\lambda')$ est un facteur de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$, alors $\lambda' \in W_p \cdot \lambda$, donc il suffit d'indiquer la p-alcôve contenant λ'.

Écrivons $\lambda_i = p\lambda_i^1 + \lambda_i^0$ avec $\lambda_i^0 \in X_1(T)$. On sait que $\lambda_5^0 = \lambda_6^0$ et $\widehat{L}(\lambda_5)$ et $\widehat{L}(\lambda_6)$ forment le facteur $\widehat{L}(\lambda_6^0) \otimes E_\beta(\lambda_6^1)^{(1)}$. De même, $\lambda_3^0 = \lambda_4^0$ et $\widehat{L}(\lambda_3)$ et $\widehat{L}(\lambda_4)$ forment le facteur $\widehat{L}(\lambda_4^0) \otimes E_\beta(\lambda_4^1)^{(1)}$. Appliquons le foncteur $\mathrm{Ind}_{BG_1}^G(\bullet)$ aux suites exactes suivantes :

$$0 \to \widehat{L}(\lambda_3) \to \widehat{L}(\lambda_4^0) \otimes E_\alpha(\lambda_4^1)^{(1)} \to \widehat{L}(\lambda_4) \to 0,$$

$$0 \to \widehat{L}(\lambda_5) \to \widehat{L}(\lambda_6^0) \otimes E_\beta(\lambda_6^1)^{(1)} \to \widehat{L}(\lambda_6) \to 0.$$

On obtient

$$0 \to \nabla_p(\lambda_3) \to L(\lambda_4^0) \otimes H^0(E_\alpha(\lambda_4^1))^{(1)} \to \nabla_p(\lambda_4) \xrightarrow{\partial_\alpha} L(\lambda_3^0) \otimes H^1(\lambda_3^1)^{(1)} \to \cdots, \tag{4.34}$$

$$0 \to \nabla_p(\lambda_5) \to L(\lambda_6^0) \otimes H^0(E_\beta(\lambda_6^1))^{(1)} \to \nabla_p(\lambda_6) \xrightarrow{\partial_\beta} L(\lambda_5^0) \otimes H^1(\lambda_5^1)^{(1)} \to \cdots. \tag{4.35}$$

Mais on a $\lambda_3^1 = (a^1 - 1, b^1)$ et $\lambda_5^1 = (a^1, b^1 - 1)$, donc $\lambda_3^1, \lambda_5^1 \in C$. Par conséquent, on a $H^1(\lambda_3^1) = H^1(\lambda_5^1) = 0$, d'où $\partial_\alpha = \partial_\beta = 0$. C'est-à-dire, $L(\lambda_3^0) \otimes H^0(E_\alpha(\lambda_4^1))^{(1)}$ est juste une extension de $L(\lambda_4^0) \otimes H^0(\lambda_4^1)^{(1)}$ par $L(\lambda_3^0) \otimes H^0(\lambda_3^1)^{(1)}$, et $L(\lambda_5^0) \otimes H^0(E_\beta(\lambda_6^1))^{(1)}$ est juste une extension de $L(\lambda_6^0) \otimes H^0(\lambda_6^1)^{(1)}$ par $L(\lambda_5^0) \otimes H^0(\lambda_5^1)^{(1)}$.

Donc d'après la Proposition 4.4, il existe dans ce cas une filtration de $H^0(\lambda)$ dont les quotients sont les $L(\lambda_i^0) \otimes H^0(\lambda_i^1)^{(1)}$ pour $i \in \{1, \ldots, 9\}$. Certains d'entre eux peuvent être nuls si l'alcôve en question n'est pas dans C, mais à part cela il n'y a pas d'effacement.

2) Si λ est de type ∇, alors les plus hauts poids des facteurs de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$ sont donnés par la figure suivante, où $\lambda_1 = \lambda$:

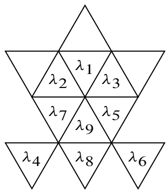


Fig. 4. Type ∇.

Écrivons

$$\lambda_i = p\lambda_i^1 + \lambda_i^0 \quad \text{avec } \lambda_i^0 \in X_1(T).$$

On sait que $\lambda_6^0 = \lambda_7^0$ et $\widehat{L}(\lambda_6)$ et $\widehat{L}(\lambda_7)$ forment le facteur $\widehat{L}(\lambda_7^0) \otimes E_\beta(\lambda_7^1)^{(1)}$. De même, $\lambda_4^0 = \lambda_5^0$ et $\widehat{L}(\lambda_4)$ et $\widehat{L}(\lambda_5)$ forment le facteur $\widehat{L}(\lambda_5^0) \otimes E_\beta(\lambda_5^1)^{(1)}$. Appliquons le foncteur $\mathrm{Ind}_{BG_1}^G(\bullet)$ aux suites exactes suivantes :

$$0 \to \widehat{L}(\lambda_4) \to \widehat{L}(\lambda_5^0) \otimes E_\alpha(\lambda_5^1)^{(1)} \to \widehat{L}(\lambda_5) \to 0,$$
$$0 \to \widehat{L}(\lambda_6) \to \widehat{L}(\lambda_7^0) \otimes E_\beta(\lambda_7^1)^{(1)} \to \widehat{L}(\lambda_7) \to 0.$$

On obtient

$$0 \to \nabla_p(\lambda_4) \to L(\lambda_5^0) \otimes H^0(E_\alpha(\lambda_5^1))^{(1)} \to \nabla_p(\lambda_5) \xrightarrow{\partial_\alpha} L(\lambda_4^0) \otimes H^1(\lambda_4^1)^{(1)} \to \cdots, \tag{4.36}$$

$$0 \to \nabla_p(\lambda_6) \to L(\lambda_7^0) \otimes H^0(E_\beta(\lambda_7^1))^{(1)} \to \nabla_p(\lambda_7) \xrightarrow{\partial_\beta} L(\lambda_6^0) \otimes H^1(\lambda_6^1)^{(1)} \to \cdots. \tag{4.37}$$

De plus, on a $\lambda_4^1 = (a^1 - 2, b^1)$ et $\lambda_6^1 = (a^1, b^1 - 2)$.

Si $a^1 \geq 1$ et $b^1 \geq 1$, on a $\lambda_4^1, \lambda_6^1 \in C$ et $H^1(\lambda_4^1) = H^1(\lambda_6^1) = 0$, d'où $\partial_\alpha = \partial_\beta = 0$. C'est-à-dire, $L(\lambda_4^0) \otimes H^0(E_\alpha(\lambda_5^1))^{(1)}$ est juste une extension de $L(\lambda_5^0) \otimes H^0(\lambda_5^1)^{(1)}$ par $L(\lambda_4^0) \otimes H^0(\lambda_4^1)^{(1)}$, et $L(\lambda_6^0) \otimes H^0(E_\beta(\lambda_7^1))^{(1)}$ est juste une extension de $L(\lambda_7^0) \otimes H^0(\lambda_7^1)^{(1)}$ par $L(\lambda_6^0) \otimes H^0(\lambda_6^1)^{(1)}$.

Donc d'après la Proposition 4.4, il existe dans ce cas une filtration de $H^0(\lambda)$ dont les quotients sont $L(\lambda_i^0) \otimes H^0(\lambda_i^1)^{(1)}$ pour $i \in \{1, \ldots, 9\}$ (certains peuvent être nuls).

Si $a^1 = 0$, alors $\lambda_5^1 = (a^1, b^1 - 1) = (0, b^1 - 1)$, d'où $H^i(E_\alpha(\lambda_5^1)) = 0$ pour tout i d'après le Lemme 4.1. Donc le morphisme de bord ∂_α dans (4.36) est un isomorphisme de $L(\lambda_5^0) \otimes H^0(\lambda_5^1)^{(1)}$ sur $L(\lambda_4^0) \otimes H^1(\lambda_4^1)^{(1)}$. Donc dans ce cas, non seulement le facteur correspondant à λ_4 n'apparaît pas, mais le facteur correspondant à λ_5 est « effacé » dans $H^0(\lambda)$.

De même, si $b^1 = 0$, alors le facteur λ_7 est « effacé » dans $H^0(\lambda)$.

3) Si λ est α-singulier, alors les plus hauts poids des facteurs de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$ sont donnés par la figure suivante, où $\lambda_1 = \lambda$:

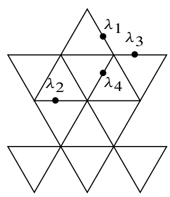


Fig. 5. α-singulier.

Écrivons $\lambda_i = p\lambda_i^1 + \lambda_i^0$ avec $\lambda_i^0 \in X_1(T)$. On sait que $\lambda_2^0 = \lambda_3^0 = (s, \bar{s})$ et $\widehat{L}(\lambda_2)$ et $\widehat{L}(\lambda_3)$ forment le facteur $\widehat{L}(\lambda_3^0) \otimes E_\alpha(\lambda_3^1)^{(1)}$. Appliquons le foncteur $\mathrm{Ind}_{BG_1}^G(\bullet)$ à la suite exacte suivante :

$$0 \to \widehat{L}(\lambda_2) \to \widehat{L}(\lambda_3^0) \otimes E_\alpha(\lambda_3^1)^{(1)} \to \widehat{L}(\lambda_3) \to 0.$$

On obtient

$$0 \to \nabla_p(\lambda_2) \to L(\lambda_3^0) \otimes H^0(E_\alpha(\lambda_3^1))^{(1)} \to \nabla_p(\lambda_3) \xrightarrow{\partial_\alpha} L(\lambda_2^0) \otimes H^1(\lambda_2^1)^{(1)} \to \cdots . \tag{4.38}$$

De plus, on a $\lambda_2^1 = (a^1 - 1, b^1) \in C$ car $a^1, b^1 \geq 0$, d'où $H^1(\lambda_2^1) = 0$. C'est-à-dire, $L(\lambda_2^0) \otimes H^0(E_\alpha(\lambda_3^1))^{(1)}$ est juste une extension de $L(\lambda_3^0) \otimes H^0(\lambda_3^1)^{(1)}$ par $L(\lambda_2^0) \otimes H^0(\lambda_2^1)^{(1)}$.

Donc d'après la Proposition 4.4, il existe dans ce cas une filtration de $H^0(\lambda)$ dont les quotients sont les $L(\lambda_i^0) \otimes H^0(\lambda_i^1)^{(1)}$ pour $i \in \{1, \ldots, 4\}$.

4) Si λ est β-singulier, alors les plus hauts poids des facteurs de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$ sont donnés par la figure suivante, où $\lambda_1 = \lambda$:

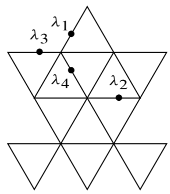


Fig. 6. β-singulier.

Comme dans le cas α-singulier, il existe dans ce cas une filtration de $H^0(\lambda)$ dont les quotients sont les $L(\lambda_i^0) \otimes H^0(\lambda_i^1)^{(1)}$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

5) Si λ est γ-singulier, alors les plus hauts poids des facteurs de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$ sont donnés par la figure suivante, où $\lambda_1 = \lambda$:

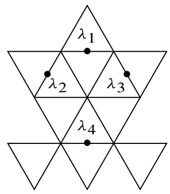


Fig. 7. γ-singulier.

Comme il n'y a pas de facteur $E_\alpha(\nu)$ ou $E_\beta(\nu)$ dans ce cas, alors d'après la Proposition 4.4 il existe une filtration de $H^0(\lambda)$ dont les quotients sont les $L(\lambda_i^0) \otimes H^0(\lambda_i^1)^{(1)}$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

6) Si λ est α-β-singulier, alors

$$\widehat{Z}(\lambda) = \widehat{L}(p-1, p-1) \otimes (a^1, b^1)^{(1)} = \widehat{L}(\lambda^0) \otimes p\lambda^1.$$

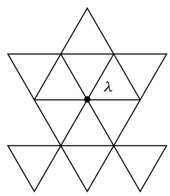


Fig. 8. α-β-singulier.

Dans ce cas, on a

$$H^0(\lambda) \cong L(\lambda^0) \otimes H^0(\lambda^1)^{(1)}.$$

En conclusion, on obtient comme corollaire une autre démonstration du résultat suivant de Jantzen ([14, 3.13], voir aussi [16, 2.4]) :

Corollaire 4.2 (Jantzen). *Soit $\lambda = (a, b) \in X(T)^+$. Écrivons $a = a^1 p + r$ et $b = b^1 p + s$ avec $0 \le r, s \le p-1$. Soit $0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{\ell-1} \subset N_\ell = \widehat{Z}(\lambda)$ une suite de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$ induite par une D-filtration. Notons $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes p\nu_i^1$ pour*

$i \in \{1, \dots, \ell\}$ et $\nu_i = \nu_i^0 + p\nu_i^1$. Posons $\widetilde{N}_i = \mathrm{Ind}_{BG_1}^G(N_i) \cong H^0(G/BG_1, N_i)$. Alors $H^0(\lambda)$ possède une filtration $0 = \widetilde{N}_0 \subset \widetilde{N}_1 \subset \cdots \subset \widetilde{N}_{\ell-1} \subset \widetilde{N}_\ell = H^0(\lambda)$ telle que $\widetilde{N}_i/\widetilde{N}_{i-1} \cong L(\nu_i^0) \otimes M_i^{(1)}$ où

$$M_i = \begin{cases} 0 & \textit{si } \nu_i^1 \notin X(T)^+, \\ 0 & \textit{si } \lambda \textit{ est de type } \nabla,\ a^1 = 0 \textit{ et } \nu_i = \lambda' \textit{ dans la figure } 9, \\ 0 & \textit{si } \lambda \textit{ est de type } \nabla,\ b^1 = 0 \textit{ et } \nu_i = \lambda' \textit{ dans la figure } 10, \\ H^0(\nu_i^1) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

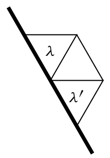


Fig. 9. Alcôve ∇ touchant le mur pour α.

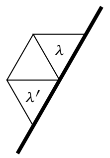


Fig. 10. Alcôve ∇ touchant le mur pour β.

Par dualité, on obtient aussi une p-Weyl filtration pour le module de Weyl $V(\lambda)$.

4.4. *Existence d'une p-H^i-D-filtration*

Supposons maintenant que $\mu \notin C \cup w_0 \cdot C$. Alors $\mu = (m, -n-2)$ ou $(-n-2, m)$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. D'après la symétrie entre α et β, on peut supposer que $\mu = (m, -n-2)$ sans perte de généralité.

Écrivons $m = m^1 p + r$ et $n = n^1 p + s$ avec $0 \leq s, r < p$. D'après le paragraphe 4.1, il existe une D-filtration $0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_\ell = \widehat{Z}(\mu)$ telle que $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ où $\delta_i \in \{0, \alpha, \beta\}$. Listons tous les $\widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)$ possibles :

(I) si μ est de type Δ, il y a les sept facteurs suivants :

$$\begin{gathered} \widehat{L}(r, \bar{s}) \otimes (m^1, -n^1-1)^{(1)}, \quad \widehat{L}(s, \bar{r}) \otimes (m^1, -n^1-1)^{(1)}, \\ \widehat{L}(s, \bar{r}) \otimes (m^1-1, -n^1-2)^{(1)}, \quad \widehat{L}(r-s-1, s) \otimes E_\alpha(m^1+1, -n^1-2)^{(1)}, \\ \widehat{L}(\bar{r}, r-s-1) \otimes E_\beta(m^1-1, -n^1)^{(1)}, \quad \widehat{L}(\bar{r}+s+1, r) \otimes (m^1, -n^1-2)^{(1)}, \\ \widehat{L}(\bar{s}, \bar{r}+s+1) \otimes (m^1-1, -n^1-1)^{(1)}; \end{gathered} \tag{4.39}$$

(II) si μ est de type ∇, il y a les sept facteurs suivants :

$$\widehat{L}(r, \bar{s}) \otimes (m^1, -n^1-1)^{(1)}, \quad \widehat{L}(\bar{r}, r+\bar{s}+1) \otimes (m^1-1, -n^1-1)^{(1)},$$

$$\begin{aligned}&\widehat{L}(r+\overline{s}+1,s)\otimes(m^1,-n^1-2)^{(1)},\quad \widehat{L}(\overline{s},s-r-1)\otimes E_\alpha(m^1,-n^1-2)^{(1)},\\&\widehat{L}(s-r-1,r)\otimes E_\beta(m^1-1,-n^1-1)^{(1)},\quad \widehat{L}(r,\overline{s})\otimes(m^1-1,-n^1-2)^{(1)},\\&\widehat{L}(s,\overline{r})\otimes(m^1-1,-n^1-2)^{(1)};\end{aligned}\tag{4.40}$$

(III) si μ est α-singulier, il y a les trois facteurs suivants :

$$\begin{aligned}&\widehat{L}(p-1,\overline{s})\otimes(m^1,-n^1-1)^{(1)},\quad \widehat{L}(\overline{s},s)\otimes E_\alpha(m^1+1,-n^1-2)^{(1)},\\&\widehat{L}(s,p-1)\otimes(m^1,-n^1-2)^{(1)};\end{aligned}\tag{4.41}$$

(IV) si μ est β-singulier, il y a les trois facteurs suivants :

$$\begin{aligned}&\widehat{L}(r,p-1)\otimes(m^1,-n^1-2)^{(1)},\quad \widehat{L}(\overline{r},r)\otimes E_\beta(m^1-1,-n^1-1)^{(1)},\\&\widehat{L}(p-1,\overline{r})\otimes(m^1-1,-n^1-2)^{(1)};\end{aligned}\tag{4.42}$$

(V) si μ est γ-singulier, il y a les quatre facteurs suivants :

$$\begin{aligned}&\widehat{L}(r,\overline{r})\otimes(m^1,-n^1-1)^{(1)},\quad \widehat{L}(p-1,r)\otimes(m^1,-n^1-2)^{(1)},\\&\widehat{L}(\overline{r},p-1)\otimes(m^1-1,-n^1-1)^{(1)},\quad \widehat{L}(r,\overline{r})\otimes(m^1-1,-n^1-2)^{(1)};\end{aligned}\tag{4.43}$$

(VI) si μ est α-β-singulier, il n'y a que le facteur

$$\widehat{L}(p-1,p-1)\otimes(m^1,-n^1-2)^{(1)}.\tag{4.44}$$

Donc pour la partie à tordre par le Frobenius, il n'y a que les huit possibilités suivantes :

$$\begin{aligned}&(m^1,-n^1-1),(m^1-1,-n^1-1),(m^1,-n^1-2),(m^1-1,-n^1-2)\\&E_\alpha(m^1+1,-n^1-2),E_\alpha(m^1,-n^1-2),E_\beta(m^1-1,-n^1),E_\beta(m^1-1,-n^1-1).\end{aligned}\tag{4.45}$$

Énonçons maintenant le théorème principal de cette partie :

Théorème 4.1 (Existence d'une p-H^i-D-filtration). *Supposons que $\mu\notin C\cup w_0\cdot C$. Soit $0=N_0\subset N_1\subset\cdots\subset N_\ell=\widehat{Z}(\mu)$ une D-filtration de $\widehat{Z}(\mu)$ (cf. le paragraphe 4.1) telle que $N_i/N_{i-1}\cong\widehat{L}(\nu_i^0)\otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ où $\delta_i\in\{0,\alpha,\beta\}$. Alors $H^1(\mu)$ possède une filtration $0=\widetilde{N}_0\subset\widetilde{N}_1\subset\cdots\subset\widetilde{N}_\ell=H^1(\mu)$ où $\widetilde{N}_i\cong H^1(G/BG_1,N_i)$ et $\widetilde{N}_i/\widetilde{N}_{i-1}\cong L(\nu_i^0)\otimes H^1(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}$.*

De même, $H^2(\mu)$ possède une filtration $0=\widetilde{N}_0\subset\widetilde{N}_1\subset\cdots\subset\widetilde{N}_\ell=H^2(\mu)$ où $\widetilde{N}_i\cong H^2(G/BG_1,N_i)$ et $\widetilde{N}_i/\widetilde{N}_{i-1}\cong L(\nu_i^0)\otimes H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}$.

De plus, si $\mu=(m,-n-2)$ avec $m=m^1p+r$, $n=n^1p+s$ et $0\le r,s\le p-1$, alors la liste des ν_i^0,ν_i^1 se trouve dans (4.39)–(4.45).

On appelle cette filtration de $H^i(\mu)$ une p-H^i-D-filtration.

Avant de démontrer ce théorème, prouvons d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.3. *Soit $\mu=(m,-n-2)$ avec $m,n\in\mathbb{N}$. Utilisons les notations du Théorème 4.1. Alors $H^0(G/BG_1,N_i/N_{i-1})=H^3(G/BG_1,N_i/N_{i-1})=0$ pour $1\le i\le\ell$ et $H^0(G/BG_1,N_i)=H^3(G/BG_1,N_i)=0$ pour $0\le i\le\ell$.*

Démonstration. Écrivons $m = m^1 p + r$ et $n = n^1 p + s$ avec $0 \le s, r < p$.

Comme $H^j(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) \cong L(\nu_i^0) \otimes H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}$ pour tous i, j (cf. [15, II.9.13]), pour montrer la première assertion il suffit de montrer que $H^0(E) = H^3(E) = 0$ pour tout E dans (4.45).

Comme $m^1, n^1 \ge 0$, on a $m^1 - 1 \ge -1$, $-n^1 - 1 \le -1$ et $-n^1 - 2 \le -2$. Donc aucun poids dans la première ligne de (4.45) n'a de H^0 ou H^3. Les deux poids de $E_\alpha(m^1 + 1, -n^1 - 2)$ sont $(m^1 + 1, -n^1 - 2)$ et $(m^1 - 1, -n^1 - 1)$, qui n'ont pas de H^0 ou H^3, d'où l'assertion pour $E_\alpha(m^1 + 1, -n^1 - 2)$.

Les deux poids de $E_\alpha(m^1, -n^1 - 2)$ sont $(m^1, -n^1 - 2)$ et $(m^1 - 2, -n^1 - 1)$, qui n'ont jamais de H^0 car $-n^1 - 1 \le -1$. Si $m^1 \ge 1$, ils n'ont pas de H^3 non plus. Si $m^1 = 0$, le poids $(m^1 - 2, -n^1 - 1)$ peut avoir un H^3 non nul. Mais dans ce cas, on a encore $H^3(E_\alpha(m^1, -n^1 - 2) = H^3(E_\alpha(0, -n^1 - 2)) = 0$ par le Lemme 4.1.

Les deux poids de $E_\beta(m^1 - 1, -n^1)$ sont $(m^1 - 1, -n^1)$ et $(m^1, -n^1 - 2)$, qui n'ont jamais de H^3 car $m^1 - 1 \ge -1$. Si $n^1 \ge 1$, ils n'ont pas de H^0 non plus. Si $n^1 = 0$, on a encore $H^0(E_\beta(m^1 - 1, -n^1)) = H^0(E_\beta(m^1 - 1, 0)) = 0$ par le Lemme 4.1.

Enfin, les deux poids de $E_\beta(m^1 - 1, -n^1 - 1)$ sont $(m^1 - 1, -n^1 - 1)$ et $(m^1, -n^1 - 3)$, qui n'ont jamais de H^0 ou H^3 car $m^1 > m^1 - 1 \ge -1$ et $-n^1 - 3 < -n^1 - 1 \le -1$.

En conclusion, $H^0(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) = H^3(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) = 0$ pour tout $1 \le i \le \ell$. La deuxième assertion s'en déduit par récurrence sur i. ∎

Démonstration du Théorème 4.1. Par dualité de Serre contravariante, on a $H^i(m, -n-2) \cong H^{3-i}(-m - 2, n)$, donc il suffit de traiter le cas où $m \ge n$.

Pour tout BG_1-module M, notons

$$\chi_1(M) = \sum_{i \ge 0} (-1)^i \operatorname{ch} H^i(G/BG_1, M).$$

D'après (4.32), pour tout B-module M, on a $\chi(M) = \chi_1(\operatorname{Ind}_B^{BG_1}(M))$. Comme la caractéristique d'Euler–Poincaré $\chi_1(\cdot)$ est additive sur les suites exactes, on a

$$\chi(\mu) = \chi_1(\widehat{Z}(\mu)) = \sum_{i=1}^{\ell} \chi_1(N_i/N_{i-1}). \tag{4.46}$$

Comme $\mu \notin C \cup w_0 \cdot C$, on a

$$\chi(\mu) = -\operatorname{ch} H^1(\mu) + \operatorname{ch} H^2(\mu). \tag{4.47}$$

En outre, d'après le Lemme 4.3, on a

$$\chi_1(N_i/N_{i-1}) = -\operatorname{ch} H^1(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) + \operatorname{ch} H^2(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) \tag{4.48}$$

pour tout i.

Donc d'après (4.46)–(4.48), on a

$$\operatorname{ch} H^1(\mu) - \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} H^1(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) = \operatorname{ch} H^2(\mu) - \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} H^2(G/BG_1, N_i/N_{i-1}). \tag{4.49}$$

Comme on a

$$\begin{aligned} H^j(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) &\cong H^j(G/BG_1, \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}) \\ &\cong L(\nu_i^0) \otimes H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}, \end{aligned}$$

alors le Théorème 4.1 découle du Lemme 4.2 du paragraphe 4.3 et de la proposition suivante. ∎

Proposition 4.5. *Soit $\mu = (m, -n-2)$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Soit $0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_\ell = \widehat{Z}(\mu)$ une D-filtration de $\widehat{Z}(\mu)$ (cf. le paragraphe 4.1) telle que $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ où $\delta_i \in \{0, \alpha, \beta\}$. Si $m \geq n$, alors on a*

$$\operatorname{ch} H^2(\mu) = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}. \tag{4.50}$$

4.5. Preuve de la Proposition 4.5

Écrivons $m = m^1 p + r$ et $n = n^1 p + s$ avec $0 \leq r, s \leq p-1$.

Supposons d'abord que $n = 0$. Alors $H^2(\mu) = H^2(m, -2) = 0$ d'après la Remarque 3.3. Dans ce cas, on a $n^1 = s = 0$ et μ ne peut pas être de type ∇ ou β-singulier, donc les $E_{\delta_i}(\nu_i^1)$ possibles sont

$$(m^1, -1), (m^1-1, -1), (m^1, -2), (m^1-1, -2), E_\alpha(m^1+1, -2), E_\beta(m^1-1, 0). \tag{4.51}$$

On sait que $H^2(m^1, -1) = H^2(m^1-1, -1) = 0$ pour tout m^1 (cf. [15, II.5.4.a)]). Comme $m^1 \geq 0$, on a $H^2(m^1, -2) = H^2(m^1-1, -2) = 0$. De même, $H^2(m^1+1, -2) = 0$, et $H^2((m^1+1, -2) - \alpha) = H^2(m^1-1, -1) = 0$, d'où $H^2(E_\alpha(m^1+1, -2)) = 0$. Enfin, on a $H^2(E_\beta(m^1-1, 0)) = 0$ d'après le Lemme 4.1. Donc l'égalité (4.50) est vraie si $n = 0$.

Si $n \geq 1$ et $\mu \notin \widehat{\mathrm{Gr}}$, alors $H^2(\mu) = 0$. Montrons dans ce cas que $H^2(E)$ est aussi nul pour tout E dans la liste (4.45).

Comme $n \geq 1$, il existe $d \geq 0$ et $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ tels que $ap^d \leq n < (a+1)p^d$. On a $m \geq (a+1)p^d$ car $\mu \notin \widehat{\mathrm{Gr}}$.

Si $d = 0$, alors $n^1 = 0$ et $m^1 \geq 0$. Alors on a déjà montré que tout E dans la liste (4.51) n'a pas de cohomologie en degré 2. Dans (4.45), il reste encore les deux termes $E_\alpha(m^1, -2)$ et $E_\beta(m^1-1, -1)$. Mais ces deux termes n'apparaissent que si μ est de type ∇ ou β-singulier, avec $r < s$. Comme $m \geq n$, il faut que $m^1 \geq 1$ pour que $E_\alpha(m^1, -2)$ ou $E_\beta(m^1-1, -1)$ apparaissent. On sait que $H^2(m^1, -2) = H^2(m^1-1, -1) = 0$. Comme $(m^1, -2) - \alpha = (m^1-2, -1)$ et $(m^1-1, -1) - \beta = (m^1, -3)$ n'ont pas de cohomologie en degré 2 non plus si $m^1 \geq 1$ d'après la Remarque 3.3, on a $H^2(E_\alpha(m^1, -2)) = H^2(E_\beta(m^1-1, -1)) = 0$. Donc l'égalité (4.50) est vraie dans ce cas.

Si $d \geq 1$, alors $ap^{d-1} \leq n^1 < (a+1)p^{d-1}$ et $m^1 \geq (a+1)p^{d-1}$. Dans ce cas, les poids suivants :

$$(m^1, -n^1 - 1), (m^1 - 1, -n^1 - 1), (m^1, -n^1 - 2), (m^1 - 1, -n^1 - 2)$$
$$(m^1 + 1, -n^1 - 2), (m^1 + 1, -n^1 - 2) - \alpha, (m^1 - 1, -n^1), (m^1 - 1, -n^1) - \beta$$

sont tous dans la chambre $s_\beta \cdot C$ et hors de la région de Griffith, donc n'ont pas de cohomologie en degré 2. Donc il reste à traiter $E_\alpha(m^1, -n^1 - 2)$ et $E_\beta(m^1 - 1, -n^1 - 1)$ dans la liste (4.45).

Si $m^1 \geq (a+1)p^{d-1} + 1$, alors $(m^1, -n^1 - 2) - \alpha = (m^1 - 2, -n^1 - 1)$ qui n'a pas de cohomologie en degré 2 car il est dans la chambre $s_\beta \cdot C$ et hors de la région de Griffith. Donc $H^2(E_\alpha(m^1, -n^1 - 2)) = 0$ dans ce cas. Si $m^1 = (a+1)p^{d-1}$, alors on a aussi $H^2(E_\alpha(m^1, -n^1 - 2)) = 0$ d'après la Proposition 4.1.

Si $n^1 \leq (a+1)p^{d-1} - 2$, alors le poids $(m^1 - 1, -n^1 - 1) - \beta = (m^1, -n^1 - 3)$ n'est pas dans la région de Griffith, donc il n'a pas de cohomologie en degré 2 et $H^2(E_\beta(m^1 - 1, -n^1 - 1)) = 0$ dans ce cas. Si $n^1 = (a+1)p^{d-1} - 1$, alors

$$H^2(E_\beta(m^1 - 1, -n^1 - 1)) = H^2(E_\beta(m^1 - 1, -(a+1)p^{d-1})) = 0$$

d'après la Proposition 4.1 (il faut faire un peu plus attention lorsque $a = p - 1$: en effet, dans ce cas on a $(m^1 - 1, -(a+1)p^{d-1}) = (m^1 - 1, -p^d)$ avec $m^1 \geq p^d$, où l'on peut appliquer la Proposition 4.1 pour $a = 1$).

Par conséquent, (4.50) est toujours vraie si $\mu \notin \widehat{\mathrm{Gr}}$.

Si $\mu \in \widehat{\mathrm{Gr}}$, raisonnons par récurrence sur le degré d de μ.

Si $d = 1$, alors on a $m^1 = n^1 = a \in \{1, \ldots, p-1\}$ et $\mu = (ap + r, -ap - s - 2)$ d'après la définition de $\widehat{\mathrm{Gr}}$. Donc $r \geq s$ puisque $m \geq n$, et μ doit être de type Δ ou α-singulier ou γ-singulier ou α-β-singulier. Si μ est de type Δ ou γ-singulier, on a

$$H^2(\mu) \cong L(0, a-1)^{(1)} \otimes V(s, p - r - 2) \cong L(s, ap - r - 2) \tag{4.52}$$

par l'Exemple 3.1. En examinant chaque terme dans la liste (4.39) (correspondant au cas Δ) et la liste (4.43) (correspondant au cas γ-singulier), on voit que chacun des ν_i^1 et $\nu_i^1 - \delta_i$ apparaissant vérifie les conditions du cas (1) de l'Exemple 3.1, dans lequel $H^j = 0$ si $j \neq 1$, à l'exception du terme $(m^1 - 1, -n^1 - 2) = (a - 1, -a - 2)$. Donc dans ces deux cas, le seul terme dans la somme $\bigoplus_i L(\nu_i^0) \otimes H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}$ qui peut être non nul est $L(s, p - r - 2) \otimes H^2(a - 1, -a - 2)^{(1)}$. Donc on a

$$\begin{aligned}
\bigoplus_i L(\nu_i^0) \otimes H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)} &= L(s, p - r - 2) \otimes H^2(a - 1, -a - 2)^{(1)} \\
&\cong L(s, p - r - 2) \otimes H^0(0, a - 1)^{(1)} \\
&\cong L(s, ap - r - 2) \\
&\cong H^2(\mu),
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle de (1) de l'Exemple 3.1, la troisième égalité découle du théorème du produit tensoriel de Steinberg, et la quatrième égalité découle de (4.52). On en déduit (4.50). Dans les cas où μ et α-singulier ou α-β-singulier, on a $r = p - 1$ et donc par l'Exemple 3.1 on a $H^2(\mu) = L(0, a-1)^{(1)} \otimes V(s, p - r - 2) = 0$. En examinant chaque terme dans (4.41) et (4.44), on voit que $H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1)) = 0$ pour tout i car ν_i^1 et

$\nu_i^1 - \delta_i$ vérifient les conditions du cas (1) de l'Exemple 3.1, dans lequel $H^j = 0$ si $j \neq 1$. Donc les deux cotés de (4.50) sont nuls, et l'égalité est aussi vraie. Donc (4.50) est vraie si $\mu \in \widehat{\mathrm{Gr}}$ est de degré $d = 1$.

Supposons l'égalité (4.50) vraie pour tout μ de degré $\leq d$ dans une H^1-chambre, et montrons-la pour μ de degré $d+1$. D'après ce qu'on a déjà montré, il suffit de supposer que $\mu \in \widehat{\mathrm{Gr}}$.

Écrivons $m = ap^{d+1} + a_d p^d + a_{d-1} p^{d-1} + \cdots + a_1 p + r$ et $n = ap^{d+1} + b_d p^d + b_{d-1} p^{d-1} + \cdots + b_1 p + s$. D'après le Théorème 3.1, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\, H^2(\mu) = \; & \mathrm{ch}\, L(0, a-1)^{(d+1)} \, \mathrm{ch}\, H^3(\mu + (-a-1, a)p^{d+1}) \\ & + \mathrm{ch}\, L(0, a)^{(d+1)} \, \mathrm{ch}\, H^2(\mu + (-a, a)p^{d+1}) \\ & + \mathrm{ch}\, L(0, a-2)^{(d+1)} \, \mathrm{ch}\, H^2(\mu + (-a-1, a+1)p^{d+1}). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Notons $\mu' = \mu + (-a, a)p^{d+1} = (m', -n'-2)$ et $\mu'' = \mu + (-a-1, a+1)p^{d+1} = (-n''-2, m'')$. Alors

$$\begin{aligned} m' &= a_d p^d + a_{d-1} p^{d-1} + \cdots + a_1 p + r, \\ n' &= b_d p^d + b_{d-1} p^{d-1} + \cdots + b_1 p + s, \\ m'' &= (p-1-b_d)p^d + (p-1-b_{d-1})p^{d-1} + \cdots + (p-1-b_1)p + p - s - 2, \\ n'' &= (p-1-a_d)p^d + (p-1-a_{d-1})p^{d-1} + \cdots + (p-1-a_1)p + p - r - 2. \end{aligned}$$

Donc μ' et μ'' sont des poids de degré $\leq d$ dans une H^1-chambre (plus précisément, $\mu' \in s_\beta \cdot C$ et $\mu'' \in s_\alpha \cdot C$).

Comme $\mu' = \mu + (-a, a)p^{d+1}$, on sait que la D-filtration de $\widehat{Z}(\mu')$ est juste celle de $\widehat{Z}(\mu)$ tensorisée par $(-a, a)p^{d+1}$. De même, la D-filtration de $\widehat{Z}(\mu'')$ est celle de $\widehat{Z}(\mu)$ tensorisée par $(-a-1, a+1)p^{d+1}$ et la D-filtration de $\widehat{Z}(\mu + (-a-1, a)p^{d+1})$ est celle de $\widehat{Z}(\mu)$ tensorisée par $(-a-1, a)p^{d+1}$.

Donc l'hypothèse de récurrence pour μ' et μ'' (pour μ'' on utilise la symétrie entre α et β) nous donne

$$\mathrm{ch}\, H^2(\mu') = \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{ch}\, L(\nu_i^0) \, \mathrm{ch}\, H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1 + (-a, a)p^d))^{(1)}. \tag{4.54}$$

$$\mathrm{ch}\, H^2(\mu'') = \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{ch}\, L(\nu_i^0) \, \mathrm{ch}\, H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1 + (-a-1, a+1)p^d))^{(1)}. \tag{4.55}$$

De plus, d'après la Proposition 4.3 du paragraphe 4.3, on a

$$\mathrm{ch}\, H^3(\mu + (-a-1, a)p^{d+1}) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{ch}\, L(\nu_i^0) \, \mathrm{ch}\, H^3(E_{\delta_i}(\nu_i^1 + (-a-1, a)p^d)^{(1)}).$$

Posons $m^1 = ap^d + a_d p^{d-1} + \cdots + a_1 = ap^d + \widetilde{r}$ et $n^1 = ap^d + b_d p^{d-1} + \cdots + b_1 = ap^d + \widetilde{s}$ avec $0 \leq \widetilde{r}, \widetilde{s} \leq p^d - 1$; alors tout poids de la liste (4.45) vérifie les conditions correspondantes de la Proposition 4.2 et du Théorème 3.1. Plus précisément, si $\delta_i = 0$, alors

$$\nu_i^1 \in \{(m^1, -n^1 - 1), (m^1 - 1, -n^1 - 1), (m^1, -n^1 - 2), (m^1 - 1, -n^1 - 2)\}, \quad (4.56)$$

d'après (4.45). On a $m^1 - 1 = ap^d + \widetilde{r} - 1$ avec $-1 \leq \widetilde{r} - 1 \leq p^d - 2$ et $n^1 - 1 = ap^d + \widetilde{s} - 1$ avec $-1 \leq \widetilde{s} - 1 \leq p^d - 2$, donc $\widetilde{r}, \widetilde{s}, \widetilde{r} - 1, \widetilde{s} - 1$ vérifient l'hypothèse du Théorème 3.1, d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} H^2(E_0(\nu_i^1)) = &\operatorname{ch} L(0, a-1)^{(d)} \operatorname{ch} H^3(E_0(\nu_i^1 + (-a-1, a)p^d)) \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_0(\nu_i^1 + (-a, a)p^d)) \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a-2)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_0(\nu_i^1 + (-a-1, a+1)p^d)) \quad (4.57) \end{aligned}$$

si $\delta_i = 0$.

Si $\delta_i = \alpha$, alors

$$E_\alpha(\nu_i^1) \in \{E_\alpha(m^1 + 1, -n^1 - 2), E_\alpha(m^1, -n^1 - 2)\}$$

d'après (4.45). On a $m^1 + 1 = ap^d + \widetilde{r} + 1$ avec $1 \leq \widetilde{r} + 1 \leq p^d$ et $n^1 = ap^d + \widetilde{s}$ avec $0 \leq \widetilde{s} \leq p^d - 1$, donc $(m^1 + 1, -n^1 - 2)$ vérifie l'hypothèse dans (i) de la Proposition 4.2. D'autre part, le facteur $E_\alpha(m^1, -n^1 - 2)$ apparaît seulement si μ est de type ∇, auquel cas on a $s > r$. Mais $m^1 p + r = m \geq n = n^1 p + s$, donc $m^1 \geq n^1 + 1 \geq ap^d + 1$, d'où $\widetilde{r} \geq 1$ dans ce cas. Donc s'il existe i tel que $E_{\delta_i}(\nu_i^1) = E_\alpha(m^1, -n^1 - 2)$, alors $m^1 = ap^d + \widetilde{r}$ avec $1 \leq \widetilde{r} \leq p^d - 1$ et $n^1 = ap^d + \widetilde{s}$ avec $0 \leq \widetilde{s} \leq p^d - 1$, donc $(m^1, -n^1 - 2)$ vérifie aussi l'hypothèse dans (i) de la Proposition 4.2. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} H^2(E_\alpha(\nu_i^1)) = &\operatorname{ch} L(0, a-1)^{(d)} \operatorname{ch} H^3(E_\alpha(\nu_i^1 + (-a-1, a)p^d)) \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\alpha(\nu_i^1 + (-a, a)p^d)) \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a-2)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\alpha(\nu_i^1 + (-a-1, a+1)p^d)) \quad (4.58) \end{aligned}$$

si $\delta_i = \alpha$.

Si $\delta_i = \beta$, alors on a

$$E_\beta(\nu_i^1) \in \{E_\beta(m^1 - 1, -n^1), E_\beta(m^1 - 1, -n^1 - 1)\}$$

d'après (4.45). On a $m^1 - 1 = ap^d + \widetilde{r} - 1$ avec $-1 \leq \widetilde{r} - 1 \leq p^d - 2$ et $n^1 - 2 = ap^d + \widetilde{s} - 2$ avec $-2 \leq \widetilde{s} - 2 \leq p^d - 3$, donc $(m^1 - 1, -n^1)$ vérifie l'hypothèse dans (ii) de la Proposition 4.2. D'autre part, le facteur $E_\beta(m^1 - 1, -n^1 - 1)$ apparaît seulement si μ est de type ∇, auquel cas on a $s \geq r$. Mais $m^1 p + r = m \geq n = n^1 p + s$, donc on a $n^1 \leq m^1 - 1 \leq (a+1)p^d - 2$. Donc $n^1 - 1 = ap^d + \widetilde{s} - 1$ avec $-1 \leq \widetilde{s} - 1 \leq p^d - 3$ dans ce cas, et l'hypothèse dans (ii) de la Proposition 4.2 est aussi satisfaite. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} H^2(E_\beta(\nu_i^1)) = &\operatorname{ch} L(0, a-1)^{(d)} \operatorname{ch} H^3(E_\beta(\nu_i^1 + (-a-1, a)p^d)) \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\beta(\nu_i^1 + (-a, a)p^d)) \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a-2)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\beta(\nu_i^1 + (-a-1, a+1)p^d)) \quad (4.59) \end{aligned}$$

si $\delta_i = \beta$.

Par conséquent, on a

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch} H^2(\mu) = {} & \operatorname{ch} L(0,a-1)^{(d+1)} \operatorname{ch} H^3(\mu+(-a-1,a)p^{d+1}) \\
& + \operatorname{ch} L(0,a)^{(d+1)} \operatorname{ch} H^2(\mu') + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d+1)} \operatorname{ch} H^2(\mu'') \\
= {} & \operatorname{ch} L(0,a-1)^{(d+1)} \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^3(E_{\delta_i}(\nu_i^1+(-a-1,a)p^d))^{(1)} \\
& + \operatorname{ch} L(0,a)^{(d+1)} \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1+(-a,a)p^d))^{(1)} \\
& + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d+1)} \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1+(-a-1,a+1)p^d))^{(1)} \\
= {} & \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0)[\operatorname{ch} L(0,a-1)^{(d)} \operatorname{ch} H^3(E_{\delta_i}(\nu_i^1+(-a-1,a)p^d)) \\
& + \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1+(-a,a)p^d)) \\
& + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1+(-a-1,a+1)p^d))]^{(1)} \\
= {} & \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1)),
\end{aligned}
$$

où la dernière égalité résulte de (4.57)–(4.59). Ceci termine la preuve de la Proposition 4.5 et donc du Théorème 4.1. ∎

4.6. Conclusion

En combinant les Propositions 4.3 et 4.4, le Théorème 4.1 et le Lemme 4.3, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.2. *Soit $\mu \in X(T)$. Soit $0 = N_0 \subset N_1 \subset N \cdots \subset N_\ell = \widehat{Z}(\mu)$ une D-filtration de $\widehat{Z}(\mu)$ (cf. le paragraphe 4.1) telle que $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ où $\delta_i \in \{0,\alpha,\beta\}$. Alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe une filtration $0 = \widetilde{N}_0 \subset \widetilde{N}_1 \subset \cdots \subset \widetilde{N}_\ell = H^j(\mu)$ où $\widetilde{N}_i \cong H^j(G/BG_1, N_i)$ et $\widetilde{N}_i/\widetilde{N}_{i-1} \cong L(\nu_i^0) \otimes H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}$.*

5. La cohomologie des B-modules $E_\delta(\mu)$

5.1. Motivation et premières propriétés

Dans la partie 4, on a montré que pour tout $\mu \in X(T)$, $H^i(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont de la forme $L(\nu^0) \otimes H^i(E_\delta(\nu^1))^{(1)}$. Cette filtration introduit des modules inconnus $H^i(E_\delta(\nu))$, donc il faut étudier leur structure pour bien connaître celle de $H^i(\mu)$.

Pour $i = 0$, d'après la discussion suivant la Proposition 4.4, pour $\delta \in \{\alpha, \beta\}$, tout $H^0(E_\delta(\nu))$ qui apparaît dans la p-filtration de $H^0(\mu)$ est soit nul, soit une extension de $H^0(\nu)$ par $H^0(\nu-\delta)$. Donc le problème pour $i = 0$ ou 3 est déjà complètement résolu.

Pour $i = 1$ ou $i = 2$, la situation est plus compliquée.

Rappelons qu'il existe des suites exactes non scindées de B-modules

$$0 \to \mu-\alpha \to E_\alpha(\mu) \to \mu \to 0,$$
$$0 \to \mu-\beta \to E_\beta(\mu) \to \mu \to 0.$$

Appliquons le foncteur $H^0(G/B, \bullet)$ aux suites exactes ci-dessus. On obtient les suites exactes longues

$$\cdots \to H^1(\mu-\alpha) \to H^1(E_\alpha(\mu)) \to H^1(\mu) \xrightarrow{\partial_\alpha} H^2(\mu-\alpha) \to H^2(E_\alpha(\mu)) \to H^2(\mu) \to \cdots, \tag{5.1}$$

$$\cdots \to H^1(\mu-\beta) \to H^1(E_\beta(\mu)) \to H^1(\mu) \xrightarrow{\partial_\beta} H^2(\mu-\beta) \to H^2(E_\beta(\mu)) \to H^2(\mu) \to \cdots. \tag{5.2}$$

Donc pour connaître la structure de $H^1(E_\delta(\mu))$ et $H^2(E_\delta(\mu))$, il « suffit » de connaître le morphisme de bord ∂_δ.[3] D'après le « Strong Linkage Principle » (cf. [15, II.6.13]), on sait que $\partial_\alpha = 0$ (resp. $\partial_\beta = 0$) si $\mu-\alpha \notin W_p \cdot \mu$ (resp. $\mu-\beta \notin W_p \cdot \mu$). En outre, pour $\delta \in \{\alpha, \beta\}$, $\mu-\delta \in W_p \cdot \mu$ si et seulement si $\langle \mu, \delta^\vee \rangle$ est divisible par p. Donc si $p \nmid \langle \mu, \delta^\vee \rangle$, alors $H^i(E_\delta(\mu))$ est la somme directe de $H^i(\mu-\delta)$ et $H^i(\mu)$.

Soit T_ν^μ le foncteur de translation de ν à μ. On a la proposition suivante.

Proposition 5.1. *Supposons que $\mu = (x, y)$ et $p \mid x$. Posons $\nu = (x-1, y)$; c'est un poids sur le mur entre μ et $\mu-\alpha$. Alors $H^i(E_\alpha(\nu)) \cong T_\nu^\mu(H^i(\nu))$ si $p \nmid y+1$.*

Démonstration. Par définition de $E_\alpha(\mu)$, on sait qu'il existe une suite exacte de B-modules

$$0 \to (0,-1) \to L(1,0) \to E_\alpha(1,0) \to 0.$$

Tensorisons par le poids $\nu = (x-1, y)$. On obtient

$$0 \to \mu-\gamma \to L(1,0) \otimes \nu \to E_\alpha(\mu) \to 0.$$

Appliquant le foncteur $H^0(G/B, \bullet)$ à cette suite exacte, on obtient une suite exacte longue de cohomologie

$$\cdots \to H^{i-1}(E_\alpha(\mu)) \xrightarrow{\partial_{i-1}} H^i(\mu-\gamma) \xrightarrow{\psi} L(1,0) \otimes H^i(\nu) \xrightarrow{\phi} H^i(E_\alpha(\mu)) \xrightarrow{\partial_i} H^{i+1}(\mu-\gamma) \to \cdots.$$

[3] Ceci n'est pas un raisonnement rigoureux, parce que a priori il y aura d'autres termes non nuls dans (5.1) et (5.2). Il s'agit simplement d'une motivation pour étudier les morphismes de bord. On verra des raisonnements rigoureux plus tard.

Si $p \nmid y+1$, alors $p \nmid x+y+1$. Dans ce cas $\mu-\gamma$ n'appartient pas à $W_p \cdot \mu$, d'où $\partial_i = 0$. Donc ϕ est surjectif.

Notons $N = T_\nu^\mu(H^i(\nu))$. Alors $N \cong \mathrm{pr}_\mu(L(1,0) \otimes H^i(\nu)) \subset L(1,0) \otimes H^i(\nu)$. Comme $\mu-\gamma$ n'appartient pas à $W_p \cdot \mu$, alors $\mathrm{Im}\,\psi \cap N = \{0\}$. Donc N est isomorphe à son image par ϕ. Or $\mathrm{pr}_\mu(H^i(E_\alpha(\mu))) = H^i(E_\alpha(\mu))$ est inclus dans l'image de $N = \mathrm{pr}_\mu(L(1,0) \otimes H^i(\nu))$ car ϕ est surjectif. Donc $N \cong \phi(N) = H^i(E_\alpha(\mu))$. ∎

De même, on a une proposition analogue pour E_β :

Proposition 5.2. *Supposons que $\mu = (x, y)$ et $p \mid y$. Posons $\nu = (x, y-1)$; c'est un poids sur le mur entre μ et $\mu-\beta$. Alors $H^i(E_\beta(\nu)) \cong T_\nu^\mu(H^i(\nu))$ si $p \nmid x+1$.*

5.2. Morphismes de bord ∂_α et ∂_β

Commençons par la proposition suivante.

Proposition 5.3. *Soient $\mu_1 = (m_1, -n_1-2)$ et $\mu_2 = (m_2, -n_2-2)$ vérifiant*

(1) $m_i > n_i \geq 0$ *pour* $i \in \{1, 2\}$ *;*

(2) $k_1 = v_p(m_1) \geq 1$ *et* $k_2 = v_p(n_2+2) \geq 1$ *;*

(3) $m_i - n_i \geq p^{k_i}$ *pour* $i \in \{1, 2\}$.

Alors

$$\mathrm{ch}\, H^2(E_\alpha(\mu_1)) = \mathrm{ch}\, H^2(\mu_1) + \mathrm{ch}\, H^2(\mu_1-\alpha), \tag{5.3}$$
$$\mathrm{ch}\, H^2(E_\beta(\mu_2)) = \mathrm{ch}\, H^2(\mu_2) + \mathrm{ch}\, H^2(\mu_2-\beta). \tag{5.4}$$

C'est-à-dire, les morphismes de bord sont nuls.

Remarque 5.1. Fixons $i \in \{1, 2\}$, notons d_i le degré de μ_i. C'est-à-dire, $ap^{d_i} \leq m_i < (a+1)p^{d_i}$ pour un $a \in \{1, \dots, p-1\}$. Si $i = 1$, alors $d_1 \geq v_p(m_1) = k_1$. Si $i = 2$ et si $k_2 = v_p(n_2+2) > d_2$, alors $n_2 \geq p^{k_2}-2 \geq p^{d_2+1}-2$. Mais dans ce cas, on a $m_2 \geq n_2 + p^{k_2} \geq 2p^{d_2+1}-2$, absurde. Donc on a toujours $d_i \geq k_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Démonstration de la Proposition 5.3. Notons d_i le degré de μ_i. On appelle $d_i - k_i$ le *degré relatif* de μ_i et on le note $\widetilde{d}_i$. On montre la proposition simultanément pour E_α et E_β par récurrence sur le degré relatif. D'après la Remarque 5.1, on sait que le degré relatif est toujours ≥ 0.

Si $\widetilde{d}_i = 0$, alors $d_i = k_i$ et $\mu_1 = (ap^{d_1}, -n_1-2)$ avec $n_1 \leq (a-1)p^{d_1}$ et $\mu_2 = (m_2, -ap^{d_2})$ avec $m_2 \geq (a+1)p^{d_2}-2$.

Dans ce cas, μ_1, $\mu_1-\alpha$, μ_2 et $\mu_2-\beta$ sont tous dans une H^1-chambre hors de la région de Griffith. En particulier, (5.3) et (5.4) sont triviales.

Supposons qu'on ait déjà montré la proposition pour tout μ_i tel que $\widetilde{d}_i(\mu_i) \leq \ell$ pour un certain $\ell \geq 0$. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $\mu_i = (m_i, -n_i-2)$ tel que $\widetilde{d}_i(\mu_i) = \ell+1$.

On se concentre d'abord sur $\mu = \mu_1$ et on enlève l'indice 1 pour alléger la notation. Écrivons $m = ap^d + a_{d-1}p^{d-1} + \cdots + a_k p^k = ap^d + r$ avec $a \neq 0$, $a_k \neq 0$ et $d-k =$

$\ell+1 \geq 1$. Si $\mu \notin \widehat{\mathrm{Gr}}$, alors $n < ap^d$, donc $\mu-\alpha \notin \widehat{\mathrm{Gr}}$ aussi, car $m \geq ap^d + p^k \geq ap^d + 2$, et (5.3) est vraie dans ce cas. Donc il suffit de considérer le cas où $\mu \in \widehat{\mathrm{Gr}}$, d'où $n = ap^d + s$ avec $0 \leq s \leq r - p^k$. En particulier, on a $1 \leq r \leq p^d - 1$ et $0 \leq s \leq p^d - 2$, donc d'après la Proposition 4.2, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\, H^2(E_\alpha(\mu)) = {} & \mathrm{ch}\, L(0,a-1)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, H^3(E_\alpha(r-p^d, -s-2))\\ & + \mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, H^2(E_\alpha(r,-s-2))\\ & + \mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, H^2(E_\alpha(-p^d+r, p^d-s-2)).\end{aligned}$$

Comme $v_p(r) = v_p(p^d - r) = v_p(m) = k$ et $(p^d - s - 2) - (p^d - r - 2) = r - s \geq p^k$, le poids $(r, -s-2)$ vérifie les hypothèses pour E_α dans la proposition et est de degré relatif majoré par ℓ. Le poids $(p^d - s - 2, -p^d + r)$ vérifie les hypothèses pour E_β et est de degré relatif aussi majoré par ℓ. D'après l'hypothèse de récurrence on a donc

$$\begin{aligned}&\mathrm{ch}\, H^2(E_\alpha(\mu))\\ &= \mathrm{ch}\, L(0,a-1)^{(d)}(\mathrm{ch}\, H^3(r-p^d,-s-2) + \mathrm{ch}\, H^3(r-p^d-2,-s-1))\\ &\quad + \mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}(\mathrm{ch}\, H^2(r,-s-2) + \mathrm{ch}\, H^2(r-2,-s-1))\\ &\quad + \mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}(\mathrm{ch}\, H^2(-p^d+r, p^d-s-2) + \mathrm{ch}\, H^2(-p^d+r-2, p^d-s-1))\\ &= \mathrm{ch}\, H^2(ap^d+r, -ap^d-s-2) + \mathrm{ch}\, H^2(ap^d+r-2, -ap^d-s-1)\\ &= \mathrm{ch}\, H^2(\mu) + \mathrm{ch}\, H^2(\mu-\alpha),\end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte du Théorème 3.2 et du fait que $0 \leq r-2 \leq p^d - 3$ car $r \geq s + p^k \geq p^k$.

Traitons maintenant $E_\beta(\mu_2)$ et enlevons l'indice 2 pour alléger la notation. On a $v_p(n+2) = k$, $m = ap^d + r$ avec $a \geq 1$, $0 \leq r \leq p^d - 1$ et $d - k = \ell + 1 \geq 1$.

Si $\mu \notin \widehat{\mathrm{Gr}}$, alors $n+2 \leq ap^d + 1$. Mais comme $v_p(n+2) = k$, on a $n+2 \leq ap^d - p^k$. Dans ce cas $\mu - \beta = (m+1, -n-4)$ n'est pas dans $\widehat{\mathrm{Gr}}$ non plus.

Si $\mu \in \widehat{\mathrm{Gr}}$ mais $\mu \notin \mathrm{Gr}$, c'est-à-dire, $r = p^d - 1$, alors on a $n = ap^d + s$ avec $0 \leq s \leq r - p^k \leq p^d - 3$. Donc $\mu - \beta = ((a+1)p^d, -ap^d - s - 4) \notin \mathrm{Gr}$, d'où $H^2(\mu) = H^2(\mu-\beta) = 0$.

Donc il suffit de considérer le cas où $\mu \in \mathrm{Gr}$ et donc $r \leq p^d - 2$. Dans ce cas $n = ap^d + s$ avec $v_p(s+2) = k$ et $p^k - 2 \leq s \leq r - p^k < p^d - 3$. Alors le poids (r, s) vérifie les hypothèses pour E_β et le poids $(p^d - s - 2, -p^d + r)$ vérifie les hypothèses pour E_α, et ils sont de degrés relatifs majorés par ℓ, et les hypothèses pour l'existence d'une filtration à trois étages pour $H^2(E_\beta(\mu))$ sont vérifiées. Donc on a

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\, H^2(E_\beta(\mu)) = {} & \mathrm{ch}\, L(0,a-1)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, H^3(E_\beta(r-p^d, -s-2))\\ & + \mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, H^2(E_\beta(r,-s-2))\\ & + \mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, H^2(E_\beta(-p^d+r, p^d-s-2))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{ch}\, L(0,a-1)^{(d)}(\mathrm{ch}\, H^3(r-p^d,-s-2)+\mathrm{ch}\, H^3(r+1-p^d,-s-4))\\
&\quad +\mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}(\mathrm{ch}\, H^2(r,-s-2)+\mathrm{ch}\, H^2(r+1,-s-4))\\
&\quad +\mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}(\mathrm{ch}\, H^2(-p^d+r,p^d-s-2)+\mathrm{ch}\, H^2(-p^d+r+1,p^d-s-4))\\
&= \mathrm{ch}\, H^2(ap^d+r,-ap^d-s-2)+\mathrm{ch}\, H^2(ap^d+r+1,-ap^d-s-4)\\
&= \mathrm{ch}\, H^2(\mu)+\mathrm{ch}\, H^2(\mu-\beta),
\end{aligned}
$$

où la première égalité est la filtration à trois étages pour $H^2(E_\beta(\mu))$, la deuxième égalité résulte de l'hypothèse de récurrence et du fait que $H^2(r-p^d,-s-2)=0$, et la troisième égalité résulte du Théorème 3.2 et du fait que $0<r+1\le p^d-1$ et $0<s+2<p^d-1$.

Ceci termine la preuve de la Proposition 5.3. ∎

5.2.1. Décomposition de l'image du morphisme de bord.

Lemme 5.1. *Si $\mu=(x,y)$ avec $x,y\le -1$, alors pour $\delta\in\{\alpha,\beta\}$, on a*

$$\mathrm{ch}\, H^3(E_\delta(\mu))=\chi^3(\mu)+\chi^3(\mu-\delta)$$

où $\chi^i(\mu)=\mathrm{ch}\, H^i(\mu)$.

Démonstration. Si $x\le -2$ et $y\le -2$, alors $\mu-\delta$ n'a de la cohomologie qu'en degré 3, d'où le résultat.

Si $x=-1$ ou $y=-1$, alors $H^i(\mu)=0$ pour tout i, donc $H^i(E_\delta(\mu))\cong H^i(\mu-\delta)$ pour tout i, donc le résultat est aussi vrai dans ce cas. ∎

Définition 5.1. Pour $\delta\in\{\alpha,\beta\}$, on note $I_\delta(\mu)\subset H^2(\mu-\delta)$ l'image du morphisme de bord $H^1(\mu)\to H^2(\mu-\delta)$. Donc si $\mu-\delta\notin w_0\cdot X(T)^+$, on a

$$\mathrm{ch}\, I_\delta(\mu)=\chi^2(\mu)+\chi^2(\mu-\delta)-\mathrm{ch}\, H^2(E_\delta(\mu)).$$

Proposition 5.4. *Soit $\mu=(ap^d+r,-ap^d-s-2)$ avec $1\le a\le p-1$. Posons $\mu'=(r,-s-2)$ et $\mu''=(-p^d+r,p^d-s-2)$. Alors si $0\le s<r\le p^d-1$, on a*

$$\mathrm{ch}\, I_\alpha(\mu)=\mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}\,\mathrm{ch}\, I_\alpha(\mu')+\mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}\,\mathrm{ch}\, I_\alpha(\mu''). \tag{5.5}$$

Si $-1\le s<r\le p^d-2$, alors

$$\mathrm{ch}\, I_\beta(\mu)=\mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}\,\mathrm{ch}\, I_\beta(\mu')+\mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}\,\mathrm{ch}\, I_\beta(\mu''). \tag{5.6}$$

Démonstration. Montrons d'abord (5.5) où $\delta=\alpha$. Comme $0\le s<r\le p^d-1$, μ vérifie les hypothèses pour l'existence de la filtration à trois étages pour $H^2(E_\alpha(\mu))$ de la Proposition 4.2. De plus, comme $\mu'-\alpha=(r-2,-s-1)$ vérifie $r-2\ge -1$ et $\mu''-\alpha=(-p^d+r-2,p^d-s-1)$ vérifie $p^d-s-1\ge 0$, on a $\mu'-\alpha\notin w_0\cdot X(T)^+$ et $\mu''-\alpha\notin w_0\cdot X(T)^+$. Donc en utilisant la filtration à trois étages pour $H^2(E_\alpha(\mu))$ pour la première égalité, et le Lemme 5.1 et la Définition 5.1 pour la deuxième égalité, on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ch}\, H^2(E_\alpha(\mu))\\
&\quad = \mathrm{ch}\, L(0,a-1)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, H^3(E_\alpha(r-p^d,-s-2))\\
&\qquad + \mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, H^2(E_\alpha(\mu')) + \mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, H^2(E_\alpha(\mu''))\\
&\quad = \mathrm{ch}\, L(0,a-1)^{(d)}(\chi^3(r-p^d,-s-2)+\chi^3((r-p^d,-s-2)-\alpha))\\
&\qquad + \mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}(\chi^2(\mu')+\chi^2(\mu'-\alpha)-\mathrm{ch}\, I_\alpha(\mu'))\\
&\qquad + \mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}(\chi^2(\mu'')+\chi^2(\mu''-\alpha)-\mathrm{ch}\, I_\alpha(\mu''))\\
&\quad = \chi^2(\mu)+\chi^2(\mu-\alpha)-\mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, I_\alpha(\mu')-\mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, I_\alpha(\mu''),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du Théorème 3.1 en remarquant que $\mu-\alpha = (ap^d+r-2, -ap^d-s-1)$ avec $-1 \le r-2, s-1 < p^d-1$. Donc on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, I_\alpha(\mu') + \mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, I_\alpha(\mu'')\\
&\qquad\qquad = \chi^2(\mu)+\chi^2(\mu-\alpha)-\mathrm{ch}\, H^2(E_\alpha(\mu)) = \mathrm{ch}\, I_\alpha(\mu),
\end{aligned}$$

car $\mu-\alpha \notin w_0\cdot X(T)^+$.

Montrons maintenant (5.6) où $\delta=\beta$. Comme $-1\le s<r\le p^d-2$, μ vérifie les hypothèses pour l'existence de la filtration à trois étages pour $H^2(E_\beta(\mu))$ de la Proposition 4.2. De plus, comme $\mu'-\beta = (r+1,-s-4)$ vérifie $r+1\ge 0$ et $\mu''-\beta = (-p^d+r+1, p^d-s-4)$ vérifie $p^d-s-4\ge -1$, on a $\mu'-\beta\notin w_0\cdot X(T)^+$ et $\mu''-\beta\notin w_0\cdot X(T)^+$. Donc en utilisant la filtration à trois étages pour $H^2(E_\beta(\mu))$ pour la première égalité, et le Lemme 5.1 et la Définition 5.1 pour la deuxième égalité, on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ch}\, H^2(E_\beta(\mu))\\
&\quad = \mathrm{ch}\, L(0,a-1)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, H^3(E_\beta(r-p^d,-s-2))\\
&\qquad + \mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, H^2(E_\beta(\mu')) + \mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, H^2(E_\beta(\mu''))\\
&\quad = \mathrm{ch}\, L(0,a-1)^{(d)}(\chi^3(r-p^d,-s-2)+\chi^3((r-p^d,-s-2)-\beta))\\
&\qquad + \mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}(\chi^2(\mu')+\chi^2(\mu'-\beta)-\mathrm{ch}\, I_\beta(\mu'))\\
&\qquad + \mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}(\chi^2(\mu'')+\chi^2(\mu''-\beta)-\mathrm{ch}\, I_\beta(\mu''))\\
&\quad = \chi^2(\mu)+\chi^2(\mu-\beta)-\mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, I_\beta(\mu')-\mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, I_\beta(\mu''),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du Théorème 3.1 en remarquant que $\mu-\beta = (ap^d+r+1, -ap^d-s-4)$ avec $0<r+1, s+2\le p^d-1$. Donc on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ch}\, L(0,a)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, I_\beta(\mu') + \mathrm{ch}\, L(0,a-2)^{(d)}\, \mathrm{ch}\, I_\beta(\mu'')\\
&\qquad\qquad = \chi^2(\mu)+\chi^2(\mu-\beta)-\mathrm{ch}\, H^2(E_\beta(\mu)) = \mathrm{ch}\, I_\beta(\mu),
\end{aligned}$$

car $\mu-\beta\notin w_0\cdot X(T)^+$. Ceci termine la preuve de la Proposition 5.4. ■

Lemme 5.2. *Soit $\mu=(m,-n-2)$ avec $m>n\ge 0$. Alors pour $\delta\in\{\alpha,\beta\}$ et tout $L(\nu)\in \mathrm{FC}(I_\delta(\mu))$, on a $[I_\delta(\mu) : L(\nu)] = [H^2(\mu-\delta) : L(\nu)]$.*

Démonstration. Comme dans la Proposition 5.3, notons $k_1(\mu) = v_p(m)$, $k_2(\mu) = v_p(n+2)$. Notons d le degré de μ, c'est-à-dire, il existe $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ tel que $ap^d \leq m < (a+1)p^d$. Pour $i \in \{1, 2\}$, notons $\widetilde{d_i} = d - k_i$. Notons aussi $\alpha_1 = \alpha$ et $\alpha_2 = \beta$.

Considérons l'énoncé suivant qui dépend d'un indice $\ell \in \mathbb{Z}$:

$\mathcal{P}_\ell$: pour tout $i \in \{1, 2\}$, si $\mu = (m, -n-2)$ avec $m > n \geq 0$ et $\widetilde{d_i}(\mu) \leq \ell$, alors pour tout $\nu \in X(T)^+$ tel que $L(\nu) \in \mathrm{FC}(I_{\alpha_i}(\mu))$ on a

$$[I_{\alpha_i}(\mu) : L(\nu)] = [H^2(\mu-\delta) : L(\nu)].$$

Le but est de montrer que $\mathcal{P}_\ell$ est vraie pour tout ℓ. Raisonnons par récurrence sur ℓ. Il suffit de considérer le cas où μ ne vérifie pas les hypothèses de la Proposition 5.3 car l'énoncé est trivial si $I_{\alpha_i}(\mu) = 0$.

D'après la définition de d et k_1, on a toujours $d \geq k_1$, d'où $\widetilde{d_1} \geq 0$. Comme $m > n$ et $k_2 = v_p(n+2)$, on a $d < k_2$ seulement s'il existe $d \geq 1$ tel que $m = p^d - 1$ et $n = p^d - 2$. Dans ce cas, on a

$$H^2(E_\beta(\mu)) = H^2(E_\beta(p^d-1, -p^d)) = 0$$

d'après la Proposition 4.1, d'où $I_\beta(\mu) = H^2(\mu-\beta)$ et l'énoncé est vrai. Donc $\mathcal{P}_{-1}$ est vrai.

Supposons $\widetilde{d_1}(\mu) = 0$ et $\delta = \alpha$. Si $k_1 = 0$, alors $p \nmid m$, d'où $I_\alpha(\mu) = 0$ car $\mu - \alpha \notin W_p \cdot \mu$. Si $k_1 \geq 1$, alors comme μ ne vérifie pas les hypothèses de la Proposition 5.3, on a $\mu = (ap^d, -(a-1)p^d - s - 2)$ avec $1 \leq s \leq p^d - 1$. D'après la Proposition 4.1 et la Remarque 4.2, on sait que $H^2(E_\alpha(\mu)) = 0$, d'où $I_\alpha(\mu) = H^2(\mu-\alpha)$ et l'énoncé du lemme est évident.

Supposons $\widetilde{d_2}(\mu) = 0$. Si $k_2 = 0$, alors $p \nmid n+2$ et $\mu - \beta \notin W_p \cdot \mu$, d'où $I_\beta(\mu) = 0$. Si $k_2 \geq 1$, alors comme μ ne vérifie pas les hypothèses de la Proposition 5.3, on a $\mu = (ap^d + r, -ap^d)$ avec $-1 \leq r \leq p^d - 3$. D'après la Proposition 4.1, $H^2(E_\beta(\mu)) = 0$, d'où $I_\beta(\mu) = H^2(\mu-\beta)$ et l'énoncé du lemme est évident.

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}_\ell$ est vraie pour un $\ell \geq 0$. Soit μ tel que $\widetilde{d_1}(\mu) = \ell + 1$. Si $k_1 = 0$, alors $p \nmid m$ et $I_\alpha(\mu) = 0$. Si $k_1 \geq 1$, comme μ ne vérifie pas les hypothèses de la Proposition 5.3, on a

$$m = ap^d + a_{d-1}p^{d-1} + \cdots + a_{k_1}p^{k_1} = ap^d + r$$

et $n = ap^d + s$ avec $0 \leq r - p^k < s < r \leq p^d - 1$. Posons

$$\mu' = (r, -s-2), \quad \mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2) \quad \text{et} \quad {}^t\mu'' = (p^d - s - 2, -p^d + r).$$

Comme

$$v_p(ap^d + r) = k_1 = d - \ell - 1 \leq d - 1,$$

on a

$$v_p(r) = v_p(-p^d + r) = k_1,$$

donc $\widetilde{d}_1(\mu') \leq d-1-k_1 = \ell$ et $\widetilde{d}_2({}^t\mu'') \leq d-1-k_1 = \ell$. D'après la Proposition 5.4, on a

$$\operatorname{ch} I_\alpha(\mu) = \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} I_\alpha(\mu') + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} I_\alpha(\mu'')$$

car $0 < s < r \leq p^d - 1$. D'après le Lemme 3.1, tout plus haut poids d'un facteur de composition de $H^2(\mu'-\alpha)$ ou de $H^2(\mu''-\alpha)$ est p^d-restreint. Donc

$$\mathrm{FC}(I_\alpha(\mu)) = L(0,a)^{(d)} \otimes \mathrm{FC}(I_\alpha(\mu')) \amalg L(0,a-2)^{(d)} \otimes \mathrm{FC}(I_\alpha(\mu'')).$$

Soit $L(\nu) \in \mathrm{FC}(I_\alpha(\mu))$; alors $\nu = \nu^1 p^d + \nu^0$ où $\nu^1 = (0,a)$ ou $(0,a-2)$ et ν^0 est p^d-restreint. Si $\nu^1 = (0,a)$, alors $L(\nu^0) \in \mathrm{FC}(I_\alpha(\mu'))$. Donc

$$\begin{aligned}[I_\alpha(\mu) : L(\nu)] &= [I_\alpha(\mu') : L(\nu^0)] = [H^2(\mu'-\alpha) : L(\nu^0)] \\ &= [L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(\mu'-\alpha) : L(\nu)] = [H^2(\mu-\alpha) : L(\nu)]\end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte de l'hypothèse de récurrence pour μ' et la dernière égalité résulte du Théorème 3.2 et du Lemme 3.1 appliqués à $\mu-\alpha$.

Si $\nu^1 = (0,a-2)$, alors $L(\nu^0) \in \mathrm{FC}(I_\alpha(\mu''))$. Posons $\tau\nu = (y,x)$ si $\nu = (x,y)$; alors

$$\begin{aligned}&[I_\alpha(\mu) : L(\nu)] = [I_\alpha(\mu'') : L(\nu^0)] = [I_\beta(\tau\mu'') : L(\tau\nu^0)] = [H^2(\tau\mu''-\beta) : L(\tau\nu^0)] \\ &= [H^2(\mu''-\alpha) : L(\nu^0)] = [L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu''-\alpha) : L(\nu)] = [H^2(\mu-\alpha) : L(\nu)].\end{aligned}$$

Donc la partie $i = 1$ dans $\mathcal{P}_\ell$ est vraie.

Soit $\mu = (m,-n-2)$ tel que $\widetilde{d}_2(\mu) = \ell+1$. Notons $k = k_2$ pour alléger la notation. Si $k = 0$, alors $p \nmid n+2$ et $I_\beta(\mu) = 0$. Si $k \geq 1$, comme μ ne vérifie pas les hypothèses de la Proposition 5.3, alors $m = ap^d + r$ et $n = ap^d + s$ avec $0 \leq r \leq p^d - 1$ et $s < r < s + p^k$ (a priori s peut être négatif). Mais comme $d = k+\ell+1 \geq k+1$, on a $k = v_p(n+2) = v_p(s+2)$. Si $s < 0$, alors $s+2 \leq 1$, d'où $s+2 \leq -p^k$ car $v_p(s+2) = k \geq 1$. Par conséquent, on a $r < s+p^k \leq -2$, contradiction avec $r \geq 0$. Donc $0 \leq s < r \leq p^d - 1$. Or $v_p(s+2) = k \leq d-1$, donc $s+2 \leq p^d - p^k$ et $r < s+p^k \leq p^d - 2$. D'après la Proposition 5.4, on a

$$\operatorname{ch} I_\beta(\mu) = \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu') + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu'')$$

où $\mu' = (r,-s-2)$ et $\mu'' = (-p^d+r, p^d-s-2)$. Posons $\tau\mu'' = (p^d-s-2, -p^d+r)$; alors $\widetilde{d}_2(\mu') \leq d-1-k = \ell$ et $\widetilde{d}_1(\tau\mu'') \leq d-1-k = \ell$ car $v_p(s+2) = v_p(p^d-s-2) = k$.

D'après le Lemme 3.1, tout plus haut poids d'un facteur de composition de $H^2(\mu'-\beta)$ ou de $H^2(\mu''-\beta)$ est p^d-restreint. Donc

$$\mathrm{FC}(I_\beta(\mu)) = L(0,a)^{(d)} \otimes \mathrm{FC}(I_\beta(\mu')) \amalg L(0,a-2)^{(d)} \otimes \mathrm{FC}(I_\beta(\mu'')).$$

Soit $L(\nu) \in \mathrm{FC}(I_\beta(\mu))$; alors $\nu = \nu^1 p^d + \nu^0$ où $\nu^1 = (0,a)$ ou $(0,a-2)$ et ν^0 est p^d-restreint. Si $\nu^1 = (0,a)$, alors $L(\nu^0) \in \mathrm{FC}(I_\beta(\mu'))$. Donc

$$\begin{aligned}[I_\beta(\mu) : L(\nu)] &= [I_\beta(\mu') : L(\nu^0)] = [H^2(\mu'-\beta) : L(\nu^0)] \\ &= [L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(\mu'-\beta) : L(\nu)] = [H^2(\mu-\beta) : L(\nu)]\end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte de l'hypothèse de récurrence pour μ' et la dernière égalité résulte du Théorème 3.2 et du Lemme 3.1 appliqués à $\mu-\beta$.

Si $\nu^1 = (0, a-2)$, alors $L(\nu^0) \in \mathrm{FC}(I_\beta(\mu''))$. Donc

$$\begin{aligned}[I_\beta(\mu) : L(\nu)] &= [I_\beta(\mu'') : L(\nu^0)] = [I_\alpha(\tau\mu'') : L(\tau\nu^0)] = [H^2(\tau\mu''-\alpha) : L(\tau\nu^0)] \\ &= [H^2(\mu''-\beta) : L(\nu^0)] = [L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu''-\beta) : L(\nu)] \\ &= [H^2(\mu-\beta) : L(\nu)].\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{\ell+1}$ est vraie. Ceci termine la preuve du Lemme 5.2. ■

Théorème 5.1. *Soit $\mu = (m, -n-2)$ avec $m > n \geq 0$. Si M est un sous-module de $H^2(\mu-\delta)$ qui vérifie* $\mathrm{ch}\, M = \mathrm{ch}\, I_\delta(\mu)$*, alors $M = I_\delta(\mu)$.*

Par conséquent, si $m = ap^d + r$ et $n = ap^d + s$ et si l'on pose $\mu' = (r, -s-2)$ et $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$, alors

(i) *Si $0 \leq s < r \leq p^d - 1$, on a $I_\alpha(\mu) = L(0,a)^{(d)} \otimes I_\alpha(\mu') \bigoplus L(0,a-2)^{(d)} \otimes I_\alpha(\mu'')$.*

(ii) *Si $-1 \leq s < r \leq p^d - 2$, on a $I_\beta(\mu) = L(0,a)^{(d)} \otimes I_\beta(\mu') \bigoplus L(0,a-2)^{(d)} \otimes I_\beta(\mu'')$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Lemme 5.2 et la Proposition 5.4. ■

Remarque 5.2. Ce théorème est suffisant pour calculer par récurrence tout $I_\delta(\mu)$ si μ vérifie

$$\mu = (m, -n-2) \text{ ou } (-n-2, m) \text{ avec } m > n \geq -1. \qquad (\clubsuit)$$

Plus précisément, on commence par un poids $\mu = (m, -n-2)$ avec $m > n \geq -1$. Si $n = -1$, alors $H^1(\mu) = H^1(m, -1) = 0$, d'où $I_\delta(\mu) = 0$. Supposons maintenant que $m > n \geq 0$.

(1) Si $\delta = \alpha$, écrivons $n = ap^d + s$ avec $a \in \{1, \ldots, p-1\}$, $d \geq 0$ et $0 \leq s \leq p^d - 1$. Notons $r = m - ap^d$; alors $r > s$.

   (a) Si $r \geq p^d + 1$, alors on a $H^2(\mu-\alpha) = H^2(m-2, -n-1) = H^2(ap^d + (r-2), -ap^d - (s-1) - 2)$ avec $-1 \leq s-1 \leq p^d - 2$ et $r-2 \geq p^d - 1$. Donc $H^2(\mu-\alpha) = 0$ par la Remarque 3.3, d'où $I_\alpha(\mu) = 0$.

   (b) Si $r = p^d$, alors on a $\mu = ((a+1)p^d, -ap^d - s - 2)$ avec $s \leq p^d - 1$, donc on a $H^2(E_\alpha(\mu)) = 0$ par la Proposition 4.1, d'où $I_\alpha(\mu) = H^2(\mu-\alpha)$.

   (c) Si $s < r \leq p^d - 1$, alors le théorème s'applique et $I_\alpha(\mu)$ se calcule par $I_\alpha(\mu')$ et $I_\alpha(\mu'')$, où μ' et μ'' sont des poids plus petits qui vérifient aussi la condition ($\clubsuit$).

(2) Si $\delta = \beta$, écrivons $m = ap^d + r$ avec $a \in \{1, \ldots, p-1\}$, $d \geq 0$ et $-1 \leq r \leq p^d - 2$. Notons $s = n - ap^d$; alors $s < r$.

   (a) Si $s \leq -3$, alors on a $H^2(\mu-\beta) = H^2(m+1, -n-4) = H^2(ap^d + (r+1), -ap^d - (s+2) - 2)$ avec $0 \leq r+1 \leq p^d - 1$ et $s+2 \leq -1$. Donc $H^2(\mu-\beta) = 0$ par la Remarque 3.3, d'où $I_\beta(\mu) = 0$.

   (b) Si $s = -2$, alors $\mu = (ap^d + r, -ap^d)$ avec $r \geq -1$, donc $H^2(E_\beta(\mu)) = 0$ par la Proposition 4.1, d'où $I_\beta(\mu) = H^2(\mu-\beta)$.

(c) Si $-1 \leq s < r$, alors le théorème s'applique et $I_\beta(\mu)$ se calcule par $I_\beta(\mu')$ et $I_\beta(\mu'')$, où μ' et μ'' sont des poids plus petits qui vérifient aussi la condition (♣).

Ceci termine la discussion.

5.2.2. $I_\delta(\mu)$ est sans multiplicité.

Proposition 5.5. *Soit $\mu = (m, -n-2)$ avec $m > n \geq 0$. Alors pour $\delta \in \{\alpha, \beta\}$, $I_\delta(\mu)$ est un T-module sans multiplicité. C'est-à-dire, pour tout poids $\nu \in X(T)$, on a* $\dim(I_\delta(\mu)_\nu) \leq 1$.

Avant de montrer cette proposition, on montre d'abord le lemme utile suivant :

Lemme 5.3. *Soit $\mu = ((a+1)p^d - 2, -ap^d - s - 1)$ avec $d \geq 0$, $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ et $s \leq p^d - 1$ (s n'est pas nécessairement positif). Alors $H^2(\mu)$ est un T-module sans multiplicité.*

Remarque 5.3. Dans ce lemme, les valeurs permises pour μ sont les $(m-2, -n-1)$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \leq m-1$ et $m = 2, 3, \ldots, p-1, p, 2p, 3p, \ldots, (p-1)p, p^2, 2p^2, 3p^2, \ldots$. D'autre part, on sait que $H^2(-1, -n-1) = 0$ pour tout n. Donc d'après le lemme, $H^2(\mu)$ est un T-module sans multiplicité pour tout μ de la forme $(m-2, -n-1)$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \leq m-1$ et $m = 1, 2, \ldots, p, 2p, \ldots, p^2, 2p^2, \ldots$, c'est-à-dire, de la forme $\mu = (ap^d - 2, -n-1)$ avec $d \geq 0$, $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ et $n \leq ap^d - 1$. On a décalé les valeurs de a dans l'énoncé du lemme juste pour simplifier les raisonnements par récurrence dans la preuve.

Démonstration du Lemme 5.3. Raisonnons par récurrence sur d. Si $d = 0$, alors $\mu = (a-1, -a-s-1)$ avec $s \leq 0$. Donc $H^2(\mu) = 0$ d'après la Remarque 3.3. Supposons que $\mu = (ap^{d+1} + p^{d+1} - 2, -ap^{d+1} - s - 1)$ pour un $d \geq 0$ et $s \leq p^{d+1} - 1$. Si $s \leq 0$, alors $H^2(\mu) = 0$. Si $s > 0$, alors d'après le Théorème 3.2, on sait que $H^2(\mu)$ est filtré par $E_1 = L(0, a-1)^{(d+1)} \otimes V(s-1, 0)$ et $E_2 = L(0, a)^{(d+1)} \otimes H^2(p^{d+1} - 2, -s-1)$ car $H^2(\mu'') = H^2(-2, p^{d+1} - s - 1) = 0$. Comme tout poids de $V(s-1, 0)$ et de $H^2(p^{d+1} - 2, -s-1)$ est p^{d+1}-restreint, et comme $L(0, a)$ et $L(0, a-1)$ n'ont pas de poids commun, E_1 et E_2 n'ont pas de poids commun. D'après l'hypothèse de récurrence, $H^2(p^{d+1} - 2, -s-1) = H^2((p-1)p^d + p^d - 2, -(p-1)p^d - (s - (p-1)p^d) - 1)$ n'a pas de multiplicité comme T-module car $s - (p-1)p^d \leq p^{d+1} - 1 - p^{d+1} + p^d = p^d - 1$. On sait aussi que $V(s-1, 0)$ n'a pas de multiplicité comme T-module. Par conséquent, $H^2(\mu)$ n'a pas de multiplicité non plus. ■

Démonstration de la Proposition 5.5. Comme $m \geq 1$, il existe $d \geq 0$ et $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ tels que $ap^d \leq m < (a+1)p^d$.

Écrivons $m = ap^d + r$ et $n = ap^d + s$; alors $0 \leq r \leq p^d - 1$ et $s < r$ (s peut être négatif).

Raisonnons par récurrence sur d. Si $d = 0$, alors $\mu = (a, -a-s-2)$ avec $s \leq -1$. Donc $\mu - \alpha = (a-2, -a-s-1)$ et $\mu - \beta = (a+1, -a-s-4)$, d'où $H^2(\mu - \delta) = 0$ pour tout $\delta \in \{\alpha, \beta\}$. Par conséquent, $I_\delta(\mu) = 0$ car $I_\delta(\mu) \subset H^2(\mu - \delta)$ et l'énoncé est trivial.

Maintenant supposons $m = ap^{d+1} + r$ et $n = ap^{d+1} + s$ avec $0 \le r \le p^{d+1} - 1$ et $s < r$.

Supposons d'abord que $\delta = \alpha$. Si $s \le 0$ et $r \ge 1$, alors

$$H^2(\mu - \alpha) = H^2(ap^{d+1} + r - 2, -ap^{d+1} - s - 1) = 0$$

car $ap^{d+1} + r - 2 \ge ap^{d+1} - 1$ et $ap^{d+1} + s - 1 \le ap^{d+1} - 1$. Donc $I_\alpha(\mu) = 0$ et le résultat est trivial.

Si $s \le 0$ et $r = 0$, alors $s \le -1$ car $s < r$. Donc on a $\mu - \alpha = (ap^{d+1} - 2, -ap^{d+1} - s - 1)$ et $H^2(\mu - \alpha)$ n'a pas de multiplicité comme T-module d'après le Lemme 5.3 et la Remarque 5.3. Donc l'énoncé est vrai car $I_\alpha(\mu) \subset H^2(\mu - \alpha)$.

Si $s > 0$, alors $0 < s < r \le p^{d+1} - 1$, et d'après la Proposition 5.4, on a

$$\mathrm{ch}\, I_\alpha(\mu) = \mathrm{ch}\, L(0, a)^{(d+1)}\, \mathrm{ch}\, I_\alpha(\mu') + \mathrm{ch}\, L(0, a-2)^{(d+1)}\, \mathrm{ch}\, I_\alpha(\mu''),$$

où $\mu' = (r, -s-2)$ et $\mu'' = (-p^{d+1} + r, p^{d+1} - s - 2)$. Comme $(0, 2) \notin \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$, alors $L(0, a)$ et $L(0, a-2)$ n'ont pas de poids commun. D'après le Lemme 3.1, tout poids de $I_\alpha(\mu') \subset H^2(\mu' - \alpha)$ et de $I_\alpha(\mu'') \subset H^2(\mu'' - \alpha)$ est p^{d+1}-restreint, donc $L(0, a)^{(d+1)} \otimes I_\alpha(\mu')$ et $L(0, a-2)^{(d+1)} \otimes I_\alpha(\mu'')$ n'ont pas de poids commun. Par conséquent, $I_\alpha(\mu)$ n'a pas de multiplicité comme T-module car $I_\alpha(\mu')$ et $I_\alpha(\mu'')$ n'ont pas de multiplicité d'après l'hypothèse de récurrence.

Supposons maintenant que $\delta = \beta$. Si $s \le -3$, alors $\mu - \beta = (ap^{d+1} + r + 1, -ap^{d+1} - s - 4)$ avec $r + 1 \ge 1$ et $s + 2 \le -1$, d'où $H^2(\mu - \beta) = 0$. En particulier, $I_\beta(\mu) = 0$ et l'énoncé est trivial.

Si $s = -2$, alors $\mu = (ap^{d+1} + r, -ap^{d+1})$ avec $r \ge 0$. Donc $H^2(E_\beta(\mu)) = 0$ d'après la Proposition 4.1, et par conséquent on a

$$I_\beta(\mu) = H^2(\mu - \beta) = H^2(ap^d + r + 1, -ap^d - 2).$$

Si $r = p^d - 1$, alors $H^2(ap^d + r + 1, -ap^d - 2) = 0$ et l'énoncé est trivial. Si $r \le p^d - 2$, alors d'après le Théorème 3.2, on sait que $H^2(ap^d + r + 1, -ap^d - 2)$ est un quotient de $V(0, ap^d - r - 3)$ car $H^2(r + 1, -2) = 0$. Comme $V(0, ap^d - r - 3)$ n'a pas de multiplicité, l'énoncé est vrai dans ce cas.

Si $s = -1$, alors $p \nmid ap^{d+1} + s + 2$, donc $\mu - \beta \notin W_p \cdot \mu$ et en particulier $I_\beta(\mu) = 0$.

Si $0 \le s \le p^{d+1} - 3$ et $r = p^{d+1} - 1$, alors on a

$$H^2(\mu - \beta) = H^2((a+1)p^{d+1}, -ap^{d+1} - s - 4) = 0$$

car $s + 2 \le p^{d+1} - 1$, d'où $I_\beta(\mu) = 0$.

Si $s = p^{d+1} - 2$ et $r = p^{d+1} - 1$, alors

$$H^2(E_\beta(\mu)) = H^2(E_\beta((a+1)p^{d+1} - 1, -(a+1)p^{d+1})) = 0$$

d'après la Proposition 4.1 (qui s'applique aussi au cas où $a = p - 1$ puisque dans ce cas, on a $\mu = (p^{d+2} - 1, -p^{d+2})$, qui est aussi de la forme dans la Proposition 4.1 avec $d = d + 2$ et $a = 1$). Donc

$$I_\beta(\mu) = H^2(\mu - \beta) = H^2((a+1)p^{d+1}, -(a+1)p^{d+1} - 2),$$

qui est un quotient de $V(0,(a+1)p^{d+1}-2)$ d'après le Théorème 3.2 car $H^2(0,-2)=0$. Comme $V(0,(a+1)p^{d+1}-2)$ n'a pas de multiplicité comme T-module, le résultat en découle.

Si $0 \leq s < r \leq p^{d+1}-2$, alors d'après la Proposition 5.4 on a

$$\operatorname{ch} I_\beta(\mu) = \operatorname{ch} L(0,a)^{(d+1)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu') + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d+1)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu''),$$

où $\mu' = (r,-s-2)$ et $\mu'' = (-p^{d+1}+r, p^{d+1}-s-2)$. Comme $(0,2) \notin \mathbb{Z}\beta + \mathbb{Z}\beta$, alors $L(0,a)$ et $L(0,a-2)$ n'ont pas de poids commun. D'après le Lemme 3.1, tout poids de $I_\beta(\mu') \subset H^2(\mu'-\beta)$ et de $I_\beta(\mu'') \subset H^2(\mu''-\beta)$ est p^{d+1}-restreint, donc $L(0,a)^{(d+1)} \otimes I_\beta(\mu')$ et $L(0,a-2)^{(d+1)} \otimes I_\beta(\mu'')$ n'ont pas de poids commun. Par conséquent, $I_\beta(\mu)$ n'a pas de multiplicité comme T-module car $I_\beta(\mu')$ et $I_\beta(\mu'')$ n'ont pas de multiplicité d'après l'hypothèse de récurrence. Ceci termine la preuve de la Proposition 5.5. ∎

5.3. Retour à la p-H^i-D-filtration

Le but de ce paragraphe est d'écrire en détail la p-H^i-D-filtration où $i \in \{1,2\}$ et $\mu \notin C \cup w_0 \cdot C$. On verra aussi que le Théorème 5.1 et la Remarque 5.2 sont suffisants pour décrire tous les modules inconnus de la forme $H^i(E_\delta(\nu))$ dans le Théorème 4.1. Supposons maintenant que $\mu \notin C \cup w_0 \cdot C$. Alors il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $\mu = (m,-n-2)$ ou $\mu = (-n-2, m)$. D'après la symétrie entre α et β, on peut supposer que $\mu = (m,-n-2)$ sans perte de généralité. D'après la dualité de Serre, il suffit de considérer $H^1(\mu) = H^1(m,-n-2)$ et $H^2(\mu) = H^2(m,-n-2)$ lorsque $m \geq n$ (c'est-à-dire, $\mu \in s_\beta \cdot C$).

Si $n \leq m \leq p-1$, alors $H^2(m,-n-2) = 0$ et

$$H^1(m,-n-2) \cong H^0(s_\beta \cdot \mu) = H^0(m-n-1,n)$$

d'après le théorème de Borel–Weil–Bott (cf. [15, II.5.5]).

Si $m \geq p$, alors il existe $d \geq 1$ et $a \in \{1,\ldots,p-1\}$ tels que $ap^d \leq m < (a+1)p^d$. Écrivons $m = ap^d + Rp + r$ et $n = ap^d + Sp + s$ avec $0 \leq r, s \leq p-1$ (S peut être négatif mais $S \geq -ap^{d-1}$ car $n \geq 0$) ; alors on a $0 \leq R \leq p^{d-1}-1$ et $S \leq R$. Notons $m^1 = ap^{d-1} + R$ et $n^1 = ap^{d-1} + S$.

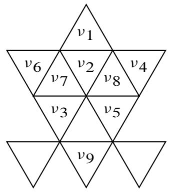
Pour $\nu = p\nu^1 + \nu^0$ où $\nu^0 \in X_1(T)$, posons

$$\mathcal{H}^i_\delta(\nu) = L(\nu^0) \otimes H^i(E_\delta(\nu^1))^{(1)}$$

où $\delta \in \{0,\alpha,\beta\}$. Notons aussi $\mathcal{H}^i(\nu) = \mathcal{H}^i_0(\nu)$.

Remarque 5.4. En utilisant les résultats de ce paragraphe, on peut obtenir une autre démonstration de la proposition de Kühne-Hausmann [16, 6.3.2] (voir aussi [8, 5.3]) et préciser les conditions pour que λ soit « générique » (cf. [19, 3.4]).

5.3.1. Type Δ. Supposons que μ est de type Δ, c'est-à-dire, $0 \leq s < r \leq p-2$. Les neuf facteurs simples de $\widehat{Z}(\mu)$ sont donnés par la figure suivante (où $\nu_1 = \mu$) :



D'après le Théorème 4.1, on sait que pour $i \in \{1, 2\}$, il existe une filtration de $H^i(\mu)$ dont les quotients sont les suivants (l'ordre peut être différent) :

$$\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i(\nu_2), \mathcal{H}^i_\alpha(\nu_4), \mathcal{H}^i_\beta(\nu_6), \mathcal{H}^i(\nu_7), \mathcal{H}^i(\nu_8), \mathcal{H}^i(\nu_9).$$

On sait que $H^0(\nu_4^1) = H^0(m^1+1, -n^1-2) = 0$ et $H^3(\nu_3^1) = H^3(m^1-1, -n^1-1) = 0$ car $m^1, n^1 \geq 0$, donc $\mathcal{H}^0(\nu_4) = \mathcal{H}^3(\nu_3) = 0$. Donc il existe une suite exacte longue

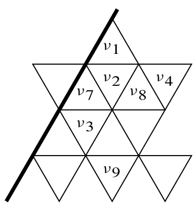
$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_3) \to \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_4) \to \mathcal{H}^1(\nu_4) \xrightarrow{\partial_\alpha} \mathcal{H}^2(\nu_3) \to \mathcal{H}^2_\alpha(\nu_4) \to \mathcal{H}^2(\nu_4) \to 0. \tag{5.7}$$

De même, comme $H^3(\nu_5^1) = H^3(m^1, -n^1-2) = 0$, on a une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \cdots \to \mathcal{H}^0(\nu_6) \xrightarrow{\partial^0_\beta} \mathcal{H}^1(\nu_5) \to \mathcal{H}^1_\beta(\nu_6) \to \mathcal{H}^1(\nu_6) & \\ \xrightarrow{\partial^1_\beta} \mathcal{H}^2(\nu_5) \to \mathcal{H}^2_\beta(\nu_6) \to \mathcal{H}^2(\nu_6) \to 0. & \end{aligned} \tag{5.8}$$

Si $n^1 = 0$, alors $H^2(\mu) = 0$ car $n \leq p-1$ et $m \geq n$. On a aussi $\mathcal{H}^2(\nu_3) = 0$ car $\nu_3^1 = (m^1-1, -n^1-1) = (m^1-1, -1)$. Donc d'après (5.7), on sait que $\mathcal{H}^1_\alpha(\nu_4)$ est juste une extension de $\mathcal{H}^1(\nu_4)$ par $\mathcal{H}^1(\nu_3)$.

Or on a $H^i(E_\beta(\nu_6^1)) = H^i(E_\beta(m^1-1, 0)) = 0$ pour tout i d'après le Lemme 4.1, donc d'après (5.8), ∂^0_β induit un isomorphisme $\mathcal{H}^0(\nu_6) \cong \mathcal{H}^1(\nu_5)$. Par conséquent, non seulement le facteur $\mathcal{H}^1(\nu_6)$ n'apparaît pas, mais le facteur $\mathcal{H}^1(\nu_5)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$, c'est-à-dire, le G-module $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^1(\nu_i) \mid i = 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$. La situation est visualisée par la figure suivante, où la droite en gras est le mur entre C et $s_\beta \cdot C$, i.e. $\{\mu \in X(T) \mid \langle \mu + \rho, \beta \rangle = 0\}$:



Si $n^1 \geq 1$ et $\mu \notin \widehat{\mathrm{Gr}}$, c'est-à-dire, $1 - ap^{d-1} \leq S \leq -1$, alors on a $H^2(\mu) = 0$. De plus, on a $H^0(\nu_6^1) = H^0(m^1-1, -n^1) = 0$, $H^2(\nu_3^1) = H^2(m^1-1, -n^1-1) = 0$ et $H^2(\nu_5^1) = H^2(m^1, -n^1-2) = 0$. Donc d'après (5.7) et (5.8), $\mathcal{H}^1_\alpha(\nu_4)$ est juste une extension de $\mathcal{H}^1(\nu_4)$ par $\mathcal{H}^1(\nu_3)$, et $\mathcal{H}^1_\beta(\nu_6)$ est juste une extension de $\mathcal{H}^1(\nu_6)$ par $\mathcal{H}^1(\nu_4)$. Donc dans ce cas, $H^2(\mu)=0$ et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont les $\mathcal{H}^1(\nu_i)$ pour $i\in\{1,\dots,9\}$.

Si $n^1\geq 1$ et $\mu\in\widehat{\mathrm{Gr}}$, c'est-à-dire, $S\geq 0$, alors $H^0(\nu_6^1)=H^0(m^1-1,-n^1)=0$. Donc (5.8) devient

$$0\to\mathcal{H}^1(\nu_5)\to\mathcal{H}^1_\beta(\nu_6)\to\mathcal{H}^1(\nu_6)\xrightarrow{\partial^1_\beta}\mathcal{H}^2(\nu_5)\to\mathcal{H}^2_\beta(\nu_6)\to\mathcal{H}^2(\nu_6)\to 0. \quad (5.9)$$

Si $S\geq 0$ et $R=p^{d-1}-1$, alors

$$H^2(\nu_5^1)=H^2(m^1,-n^1-2)=H^2((a+1)p^{d-1}-1,-ap^{d-1}-S-2)=0$$

par la Remarque 3.3. En particulier, on a $\partial^1_\beta=0$ dans (5.9), donc pour $i\in\{1,2\}$, le G-module $\mathcal{H}^i_\beta(\nu_6)$ est juste une extension de $\mathcal{H}^i(\nu_6)$ par $\mathcal{H}^i(\nu_5)$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}H^2(E_\alpha(\nu_4^1))&=H^2(E_\alpha(m^1+1,-n^1-2))=H^2(E_\alpha((a+1)p^{d-1},-ap^{d-1}-S-2))\\&=0\end{aligned}$$

d'après la Proposition 4.1. Donc $\mathcal{H}^2_\alpha(\nu_4)=0$ et, d'après (5.7), on a une suite exacte

$$0\to\mathcal{H}^1(\nu_3)\to\mathcal{H}^1_\alpha(\nu_4)\xrightarrow{f}\mathcal{H}^1(\nu_4)\xrightarrow{\partial_\alpha}\mathcal{H}^2(\nu_3)\to 0. \quad (5.10)$$

Notons $\mathcal{Q}_4\subset\mathcal{H}^1(\nu_4)$ l'image de f ; alors on a

$$\begin{gathered}0\to\mathcal{H}^1(\nu_3)\to\mathcal{H}^1_\alpha(\nu_4)\xrightarrow{f}\mathcal{Q}_4\to 0,\\0\to\mathcal{Q}_4\to\mathcal{H}^1(\nu_4)\xrightarrow{\partial_\alpha}\mathcal{H}^2(\nu_3)\to 0.\end{gathered}$$

Donc dans ce cas, le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_3)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$ et de $H^2(\mu)$. Plus précisément, $H^2(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^2(\nu_i)\mid i=1,2,4,5,6,7,8,9\}$ et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^1(\nu_i)\mid i=1,2,3,5,6,7,8,9\}\cup\{\mathcal{Q}_4\}$ où $\mathcal{Q}_4\subset\mathcal{H}^1(\nu_4)$ est tel que $\mathcal{H}^1(\nu_4)/\mathcal{Q}_4\cong\mathcal{H}^2(\nu_3)$.

De même, si $S=0$ et $0\leq R\leq p^{d-1}-1$, alors le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_5)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$. Plus précisément, $H^2(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^2(\nu_i)\mid i=1,2,3,4,6,7,8,9\}$ et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^1(\nu_i)\mid i=1,2,3,4,5,7,8,9\}\cup\{\mathcal{Q}_6\}$ où $\mathcal{Q}_6\subset\mathcal{H}^1(\nu_6)$ est tel que $\mathcal{H}^1(\nu_6)/\mathcal{Q}_6\cong\mathcal{H}^2(\nu_5)$.

Si $1\leq S\leq R\leq p^{d-1}-2$, alors

$$\nu_4^1=(m^1+1,-n^1-2)=(ap^{d-1}+R+1,-ap^{d-1}-S-2)$$

avec $1\leq S<R+1\leq p^{d-1}-1$. Donc ν_4^1 vérifie l'hypothèse du Théorème 5.1 pour $\delta=\alpha$. D'autre part,

$$\nu_6^1=(m^1-1,-n^1)=(ap^{d-1}+R-1,-ap^{d-1}-(S-2)-2)$$

avec $-1 \leq S-2 < R-1 \leq p^d-3$, donc ν_6^1 vérifie l'hypothèse du Théorème 5.1 pour $\delta = \beta$.

Donc pour $i \in \{1,2\}$, $H^i(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

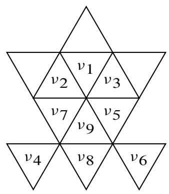
$$\{\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i(\nu_2), \mathcal{H}^i_\alpha(\nu_4), \mathcal{H}^i_\beta(\nu_6), \mathcal{H}^i(\nu_7), \mathcal{H}^i(\nu_8), \mathcal{H}^i(\nu_9)\}.$$

De plus, on a des suites exactes longues

$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_3) \to \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_4) \to \mathcal{H}^1(\nu_4) \xrightarrow{\partial_\alpha} \mathcal{H}^2(\nu_3) \to \mathcal{H}^2_\alpha(\nu_4) \to \mathcal{H}^2(\nu_4) \to 0,$$
$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_5) \to \mathcal{H}^1_\beta(\nu_6) \to \mathcal{H}^1(\nu_6) \xrightarrow{\partial_\beta} \mathcal{H}^2(\nu_5) \to \mathcal{H}^2_\beta(\nu_6) \to \mathcal{H}^2(\nu_6) \to 0,$$

où $\mathrm{Im}(\partial_\alpha) \cong L(\nu_4^0) \otimes I_\alpha(\nu_4^1)^{(1)}$ et $\mathrm{Im}(\partial_\beta) \cong L(\nu_6^0) \otimes I_\beta(\nu_6^1)^{(1)}$, qui peuvent être calculés récursivement par le Théorème 5.1 et la Remarque 5.2.

5.3.2. Type ∇. Si μ est de type ∇, c'est-à-dire, $r < s$, alors on a forcément $m^1 > n^1$ et $R > S$ car $m \geq n$. Les neuf facteurs simples de $\widehat{Z}(\mu)$ sont donnés par la figure suivante (où $\nu_1 = \mu$) :



D'après le Théorème 4.1, on sait que pour $i \in \{1,2\}$, il existe une filtration de $H^i(\mu)$ dont les quotients sont les suivants (l'ordre peut être différent) :

$$\{\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i(\nu_2), \mathcal{H}^i(\nu_3), \mathcal{H}^i_\alpha(\nu_5), \mathcal{H}^i_\beta(\nu_7), \mathcal{H}^i(\nu_8), \mathcal{H}^i(\nu_9)\}.$$

On a $H^0(\nu_5^1) = H^0(m^1, -n^1-2) = 0$ et $H^3(\nu_4^1) = H^3(m^1-2, -n^1-1) = 0$ car $m^1 \geq n^1+1 \geq 1$. Donc $\mathcal{H}^0(\nu_5) = 0$ et $\mathcal{H}^3(\nu_4) = 0$, d'où une suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_4) \to \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_5) \to \mathcal{H}^1(\nu_5) \xrightarrow{\partial_\alpha} \mathcal{H}^2(\nu_4) \to \mathcal{H}^2_\alpha(\nu_5) \to \mathcal{H}^2(\nu_5) \to 0. \tag{5.11}$$

De même, on a $H^0(\nu_7^1) = H^0(m^1-1, -n^1-1) = 0$ et $H^3(\nu_6^1) = H^3(m^1, -n^1-3) = 0$, d'où une suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_6) \to \mathcal{H}^1_\beta(\nu_7) \to \mathcal{H}^1(\nu_7) \xrightarrow{\partial_\beta} \mathcal{H}^2(\nu_6) \to \mathcal{H}^2_\beta(\nu_7) \to \mathcal{H}^2(\nu_7) \to 0. \tag{5.12}$$

Si $S \leq -2$ et $R \geq 1$, alors

$$H^2(\nu_4^1) = H^2(m^1-2, -n^1-1) = H^2(ap^{d-1}+R-2, -ap^{d-1}-(S-1)-2) = 0,$$
$$H^2(\nu_6^1) = H^2(m^1, -n^1-3) = H^2(ap^{d-1}+R, -ap^{d-1}-(S+1)-2) = 0.$$

En particulier, on a $\partial_\alpha = \partial_\beta = 0$. Donc dans ce cas, $H^2(\mu) = 0$ et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^1(\nu_i) \mid i = 1, \ldots, 9\}$.

Si $S \leq -2$ et $R = 0$, alors on a encore

$$H^2(\nu_6^1) = H^2(m^1, -n^1-3) = H^2(ap^{d-1}+R, -ap^{d-1}-(S+1)-2) = 0,$$

d'où $\partial_\beta = 0$. D'autre part, on a

$$H^2(E_\alpha(\nu_5^1)) = H^2(E_\alpha(m^1, -n^1-2)) = H^2(E_\alpha(ap^{d-1}, -ap^{d-1}-S-2)) = 0$$

d'après la Proposition 4.1, donc (5.11) devient

$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_4) \to \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_5) \xrightarrow{f_\alpha} \mathcal{H}^1(\nu_5) \xrightarrow{\partial_\alpha} \mathcal{H}^2(\nu_4) \to 0.$$

Dans ce cas, le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_4)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$ et de $H^2(\mu)$. Plus précisément, notons $\mathcal{Q}_5$ l'image de f_α ; alors $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^1(\nu_i) \mid i = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\} \cup \{\mathcal{Q}_5\}$ où $\mathcal{Q}_5 \subset \mathcal{H}^1(\nu_5)$ est tel que $\mathcal{H}^1(\nu_5)/\mathcal{Q}_5 \cong \mathcal{H}^2(\nu_4)$. De plus, $H^2(\mu) = 0$ même si $\mathcal{H}^2(\nu_4) \neq 0$.

Si $S = -1$ et $R \geq 1$, alors

$$H^2(\nu_4^1) = H^2(m^1-2, -n^1-1) = H^2(ap^{d-1}+R-2, -ap^{d-1}-(S-1)-2) = 0,$$

d'où $\partial_\alpha = 0$. D'autre part, on a

$$H^2(E_\beta(\nu_7^1)) = H^2(E_\beta(m^1-1, -n^1-1)) = H^2(E_\beta(ap^{d-1}+R-1, -ap^{d-1})) = 0$$

d'après la Proposition 4.1. Donc (5.12) devient

$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_6) \to \mathcal{H}^1_\beta(\nu_7) \xrightarrow{f_\beta} \mathcal{H}^1(\nu_7) \xrightarrow{\partial_\beta} \mathcal{H}^2(\nu_6) \to 0.$$

Dans ce cas, le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_6)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$ et de $H^2(\mu)$. Plus précisément, notons $\mathcal{Q}_7$ l'image de f_β ; alors $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^1(\nu_i) \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\} \cup \{\mathcal{Q}_7\}$ où $\mathcal{Q}_7 \subset \mathcal{H}^1(\nu_7)$ est tel que $\mathcal{H}^1(\nu_7)/\mathcal{Q}_7 \cong \mathcal{H}^2(\nu_6)$. De plus, $H^2(\mu) = 0$ même si $\mathcal{H}^2(\nu_6)$ n'est pas forcément nul.

De même, si $S = -1$ et $R = 0$, alors le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_4)$ et le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_6)$ sont tous les deux « effacés ». C'est-à-dire, $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^1(\nu_i) \mid i = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\} \cup \{\mathcal{Q}_5, \mathcal{Q}_7\}$ où $\mathcal{Q}_5 \subset \mathcal{H}^1(\nu_5)$ et $\mathcal{Q}_7 \subset \mathcal{H}^1(\nu_7)$ sont tels que $\mathcal{H}^1(\nu_5)/\mathcal{Q}_5 \cong \mathcal{H}^2(\nu_4)$ et $\mathcal{H}^1(\nu_7)/\mathcal{Q}_7 \cong \mathcal{H}^2(\nu_6)$. De plus, $H^2(\mu) = 0$ même si $\mathcal{H}^2(\nu_4)$ et $\mathcal{H}^2(\nu_6)$ ne sont pas nuls.

Si $S \geq 0$, alors on a $0 \leq S < R < p^{d-1}-1$. Dans ce cas,

$$\nu_5^1 = (m^1, -n^1-2) = (ap^{d-1}+R, -ap^{d-1}-S-2)$$

vérifie l'hypothèse du Théorème 5.1 pour $\delta = \alpha$.

D'autre part,

$$\nu_7^1 = (m^1-1, -n^1-1) = (ap^{d-1}+R-1, -ap^{d-1}-(S-1)-2)$$

avec $-1 \leq S-1 < R-1 \leq p^{d-1}-2$. Donc ν_7^1 vérifie l'hypothèse du Théorème 5.1 pour $\delta = \alpha$. Donc pour $i \in \{1,2\}$, $H^i(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i(\nu_2), \mathcal{H}^i(\nu_3), \mathcal{H}^i_\alpha(\nu_5), \mathcal{H}^i_\beta(\nu_7), \mathcal{H}^i(\nu_8), \mathcal{H}^i(\nu_9)\}.$$

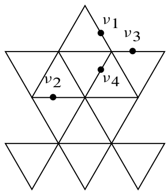
De plus, on a des suites exactes longues

$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_4) \to \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_5) \to \mathcal{H}^1(\nu_5) \xrightarrow{\partial_\alpha} \mathcal{H}^2(\nu_4) \to \mathcal{H}^2_\alpha(\nu_5) \to \mathcal{H}^2(\nu_5) \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_6) \to \mathcal{H}^1_\beta(\nu_7) \to \mathcal{H}^1(\nu_7) \xrightarrow{\partial_\beta} \mathcal{H}^2(\nu_6) \to \mathcal{H}^2_\beta(\nu_7) \to \mathcal{H}^2(\nu_7) \to 0,$$

où $\mathrm{Im}(\partial_\alpha) \cong L(\nu_5^0) \otimes I_\alpha(\nu_5^1)^{(1)}$ et $\mathrm{Im}(\partial_\beta) \cong L(\nu_7^0) \otimes I_\beta(\nu_7^1)^{(1)}$, qui peut être calculés récursivement par le Théorème 5.1 et la Remarque 5.2.

5.3.3. Cas α-singulier. Supposons que μ est α-singulier, c'est-à-dire, $0 \leq s < r = p-1$. Les quatre facteurs simples de $\widehat{Z}(\mu)$ sont donnés par la figure suivante (où $\nu_1 = \mu$) :



D'après le Théorème 4.1, on sait que pour $i \in \{1,2\}$, il existe une filtration de $H^i(\mu)$ dont les quotients sont $\mathcal{H}^i(\nu_1)$, $\mathcal{H}^i_\alpha(\nu_3)$, et $\mathcal{H}^i(\nu_4)$.

On sait que $H^0(\nu_3^1) = H^0(m^1+1, -n^1-2) = 0$ et $H^3(\nu_2^1) = H^3(m^1-1, -n^1-1) = 0$ car $m^1, n^1 \geq 0$, donc $\mathcal{H}^0(\nu_3) = \mathcal{H}^3(\nu_2) = 0$. Donc il existe une suite exacte longue

$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_2) \to \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_3) \to \mathcal{H}^1(\nu_3) \xrightarrow{\partial_\alpha} \mathcal{H}^2(\nu_2) \to \mathcal{H}^2_\alpha(\nu_3) \to \mathcal{H}^2(\nu_3) \to 0. \quad (5.13)$$

Si $\mu \notin \widehat{\mathrm{Gr}}$, c'est-à-dire, $S \leq -1$, alors on a $H^2(\mu) = 0$. De plus, on a

$$H^2(\nu_2^1) = H^2(m^1-1, -n^1-1) = H^2(ap^{d-1}+R-1, -ap^{d-1}-S-1) = 0.$$

Donc d'après (5.13) , $\mathcal{H}^1_\alpha(\nu_3)$ est juste une extension de $\mathcal{H}^1(\nu_3)$ par $\mathcal{H}^1(\nu_2)$. Donc dans ce cas, $H^2(\mu) = 0$ et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^1(\nu_i) \mid i = 1,2,3,4\}$.

Si $\mu \in \widehat{\mathrm{Gr}}$ et $R = p^{d-1}-1$, c'est-à-dire, $S \geq 0$ et $R = p^{d-1}-1$, alors on a

$$H^2(E_\alpha(\nu_3^1)) = H^2(E_\alpha(m^1+1, -n^1-2)) = H^2(E_\alpha(ap^{d-1}, -ap^{d-1}-S-2)) = 0$$

d'après la Proposition 4.1. Donc $\mathcal{H}^2_\alpha(\nu_3) = 0$ et d'après (5.13), on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_2) \to \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_3) \xrightarrow{f} \mathcal{H}^1(\nu_3) \xrightarrow{\partial_\alpha} \mathcal{H}^2(\nu_2) \to 0.$$

Donc dans ce cas, le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_2)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$. Plus précisément, notons $\mathcal{Q}_3 \subset \mathcal{H}^1(\nu_3)$ l'image de f ; alors $H^2(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^2(\nu_i) \mid i = 1,3,4\}$ et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^1(\nu_i) \mid i = 1,2,4\} \cup \{\mathcal{Q}_3\}$ où $\mathcal{Q}_3 \subset \mathcal{H}^1(\nu_3)$ est tel que $\mathcal{H}^1(\nu_3)/\mathcal{Q}_3 \cong \mathcal{H}^2(\nu_2)$.

Si $0 \le S \le R \le p^{d-1} - 2$, alors

$$\nu_3^1 = (m^1 + 1, -n^1 - 2) = (ap^{d-1} + R + 1, -ap^{d-1} - S - 2)$$

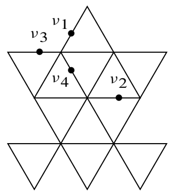
avec $1 \le S < R + 1 \le p^{d-1} - 1$. Donc ν_3^1 vérifie l'hypothèse du Théorème 5.1 pour $\delta = \alpha$.

Donc pour $i \in \{1,2\}$, $H^i(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i_\alpha(\nu_3), \mathcal{H}^i(\nu_4)\}$. De plus, on a une suite exacte longue

$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_2) \to \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_3) \to \mathcal{H}^1(\nu_3) \xrightarrow{\partial_\alpha} \mathcal{H}^2(\nu_2) \to \mathcal{H}^2_\alpha(\nu_3) \to \mathcal{H}^2(\nu_3) \to 0$$

où $\mathrm{Im}(\partial_\alpha) \cong L(\nu_3^0) \otimes I_\alpha(\nu_3^1)^{(1)}$, qui peut être calculé récursivement par le Théorème 5.1 et la Remarque 5.2.

5.3.4. Cas β-singulier. Si μ est β-singulier, c'est-à-dire, $0 \le r < s = p - 1$, alors on a forcément $m^1 > n^1$ et $R > S$ car $m \ge n$. Les quatre facteurs simples de $\widehat{Z}(\mu)$ sont donnés par la figure suivante (où $\nu_1 = \mu$) :



D'après le Théorème 4.1, on sait que pour $i \in \{1,2\}$, il existe une filtration de $H^i(\mu)$ dont les quotients sont $\mathcal{H}^i(\nu_1)$, $\mathcal{H}^i_\beta(\nu_3)$, et $\mathcal{H}^i(\nu_4)$.

On a $H^0(\nu_3^1) = H^0(m^1 - 1, -n^1 - 1) = 0$ et $H^3(\nu_2^1) = H^3(m^1, -n^1 - 3) = 0$, d'où une suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_2) \to \mathcal{H}^1_\beta(\nu_3) \to \mathcal{H}^1(\nu_3) \xrightarrow{\partial_\beta} \mathcal{H}^2(\nu_2) \to \mathcal{H}^2_\beta(\nu_3) \to \mathcal{H}^2(\nu_3) \to 0. \quad (5.14)$$

Si $S \le -2$, alors

$$H^2(\nu_2^1) = H^2(m^1, -n^1 - 3) = H^2(ap^{d-1} + R, -ap^{d-1} - (S+1) - 2) = 0.$$

En particulier, on a $\partial_\beta = 0$. Donc dans ce cas, $H^2(\mu) = 0$ et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^1(\nu_i) \mid i = 1,2,3,9\}$.

Si $S = -1$, alors on a

$$H^2(E_\beta(\nu_3^1)) = H^2(E_\beta(m^1 - 1, -n^1 - 1)) = H^2(E_\beta(ap^{d-1} + R - 1, -ap^{d-1})) = 0$$

d'après la Proposition 4.1. Donc (5.14) devient

$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_2) \to \mathcal{H}^1_\beta(\nu_3) \xrightarrow{f_\beta} \mathcal{H}^1(\nu_3) \xrightarrow{\partial_\beta} \mathcal{H}^2(\nu_2) \to 0.$$

Dans ce cas, le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_2)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$. Plus précisément, notons $\mathcal{Q}_3$ l'image de f_β ; alors $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^1(\nu_i) \mid i = 1,2,4\} \cup \{\mathcal{Q}_3\}$ où $\mathcal{Q}_3 \subset \mathcal{H}^1(\nu_3)$ est tel que $\mathcal{H}^1(\nu_3)/\mathcal{Q}_3 \cong \mathcal{H}^2(\nu_2)$. De plus, $H^2(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^2(\nu_i) \mid i = 1,3,4\}$.

Si $S \geq 0$, alors on a $0 \leq S < R < p^{d-1} - 1$. Dans ce cas, on a

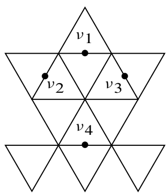
$$\nu_3^1 = (m^1 - 1, -n^1 - 1) = (ap^{d-1} + R - 1, -ap^{d-1} - (S-1) - 2)$$

avec $-1 \leq S-1 < R-1 \leq p^{d-1} - 2$. Donc ν_3^1 vérifie l'hypothèse du Théorème 5.1 pour $\delta = \beta$. Donc pour $i \in \{1,2\}$, $H^i(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i_\beta(\nu_3), \mathcal{H}^i(\nu_4)\}$. De plus, on a une suite exacte longue

$$0 \to \mathcal{H}^1(\nu_2) \to \mathcal{H}^1_\beta(\nu_3) \to \mathcal{H}^1(\nu_3) \xrightarrow{\partial_\beta} \mathcal{H}^2(\nu_3) \to \mathcal{H}^2_\beta(\nu_3) \to \mathcal{H}^2(\nu_3) \to 0$$

où $\mathrm{Im}(\partial_\beta) \cong L(\nu_3^0) \otimes I_\beta(\nu_3^1)^{(1)}$, qui peuvent être calculés récursivement par le Théorème 5.1 et la Remarque 5.2.

5.3.5. Cas γ-singulier ou α-β-singulier. Si μ est γ-singulier ou α-β-singulier, alors il n'y a pas de E_α ou E_β dans la filtration. Donc d'après le Théorème 4.1, si μ est γ-singulier, alors pour $j \in \{1,2\}$, $H^i(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont $\{\mathcal{H}^j(\nu_i) \mid i = 1,2,3,4\}$, où la valeur de ν_i est donnée par la figure suivante (où $\nu_1 = \mu$) :



Si μ est α-β-singulier, alors $\mu = (m^1 p + p - 1, -n^1 p - p - 1)$ et pour $i \in \{1,2\}$, on a

$$H^i(\mu) \cong L(p-1, p-1) \otimes H^i(m^1, -n^1 - 2)^{(1)}.$$

Références

[1] Achar, P. N., Hardesty, W. D. : Calculations with graded perverse-coherent sheaves. Quart. J. Math. **70**, 1327–1352 (2019) Zbl 1467.14048 MR 4045103

[2] Andersen, H. H. : The first cohomology group of a line bundle on G/B. Invent. Math. **51**, 287–296 (1979) Zbl 0417.20038 MR 530635

[3] Andersen, H. H. : On the generic structure of cohomology modules for semisimple algebraic groups. Trans. Amer. Math. Soc. **295**, 397–415 (1986) Zbl 0593.14033 MR 831206

[4] Andersen, H. H. : Torsion in the cohomology of line bundles on homogeneous spaces for Chevalley groups. Proc. Amer. Math. Soc. **96**, 537–544 (1986) Zbl 0595.20045 MR 826477

[5] Bendel, C. P., Nakano, D. K., Pillen, C., Sobaje, P. : Counterexamples to the tilting and (p,r)-filtration conjectures. J. Reine Angew. Math. **767**, 193–202 (2020) Zbl 1477.20080 MR 4160306

[6] Donkin, S. : A note on the characters of the cohomology of induced vector bundles on G/B in characteristic p. J. Algebra **258**, 255–274 (2002) Zbl 1083.14521 MR 1958906

[7] Donkin, S. : The cohomology of line bundles on the three-dimensional flag variety. J. Algebra **307**, 570–613 (2007) Zbl 1115.14008 MR 2275364

[8] Doty, S. R., Sullivan, J. B. : On the structure of the higher cohomology modules of line bundles on G/B. J. Algebra **114**, 286–332 (1988) Zbl 0643.20020 MR 936976

[9] Griffith, W. L., Jr. : Cohomology of flag varieties in characteristic p. Illinois J. Math. **24**, 452–461 (1980) Zbl 0417.14012 MR 573481

[10] Hardesty, W. D. : Support varieties of line bundle cohomology groups for $SL_3(k)$. J. Algebra **448**, 127–173 (2016) Zbl 1343.20048 MR 3438309

[11] Humphreys, J. E. : Cohomology of G/B in characteristic p. Adv. Math. **59**, 170–183 (1986) Zbl 0612.20023 MR 834227

[12] Irving, R. S. : The structure of certain highest weight modules for SL_3. J. Algebra **99**, 438–457 (1986) Zbl 0598.20052 MR 837554

[13] Jantzen, J. C. : Darstellungen halbeinfacher Gruppen und kontravariante Formen. J. Reine Angew. Math. **290**, 117–141 (1977) Zbl 0342.20022 MR 432775

[14] Jantzen, J. C. : Darstellungen halbeinfacher Gruppen und ihrer Frobenius-Kerne. J. Reine Angew. Math. **317**, 157–199 (1980) Zbl 0451.20040 MR 581341

[15] Jantzen, J. C. : Representations of Algebraic Groups. 2nd ed., Math. Surveys Monogr. 107, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2003) Zbl 1034.20041 MR 2015057

[16] Kühne-Hausmann, K. : Zur Untermodulstruktur der Weylmoduln für Sl_3. Bonner Math. Schriften 162, Univ. Bonn, Bonn (1985) Zbl 0577.20030 MR 816532

[17] Lin, Z. Z. : Structure of cohomology of line bundles on G/B for semisimple groups. J. Algebra **134**, 225–256 (1990) Zbl 0732.20028 MR 1068424

[18] Lin, Z. Z. : Socle series of cohomology groups of line bundles on G/B. J. Pure Appl. Algebra **72**, 275–294 (1991) Zbl 0758.20008 MR 1120694

[19] Liu, L. : Cohomologie des fibrés en droites sur SL_3/B en caractéristique positive : deux filtrations et conséquences. Thesis, Sorbonne Université (2019)

[20] Yehia, S. E. : Extensions of simple modules for the universal Chevalley groups and its parabolic subgroups. Ph.D. thesis, Univ. of Warwick (1982)