Elemente der Mathematik 79 (2024), 84–88
DOI 10.4171/EM/530

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2024 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Aufgabe 1446: Sei ABC ein beliebiges Dreieck und P ein beliebiger Punkt in der Dreiecksebene. Seien weiter w_α, w_β, w_γ die Längen der Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC. Man zeige

$$\frac{w_\alpha \cdot PA}{w_\beta \cdot w_\gamma} + \frac{w_\beta \cdot PB}{w_\gamma \cdot w_\alpha} + \frac{w_\gamma \cdot PC}{w_\alpha \cdot w_\beta} \geq 2.$$

Tran Quang Hung, Hanoi, VN

Aufgabe 1447: In memoriam Šefket Arslanagić.[1] Man bestimme alle Zahlen, die sowohl in der Folge $(20 + 24\sqrt{2})^n$, $n \geq 0$, als auch in der Folge $(24 + 20\sqrt{2})^n$, $n \geq 0$, vorkommen.

Walther Janous, Innsbruck, A

Aufgabe 1448 (Die einfache dritte Aufgabe): Für die Möndchen des Hippokrates über einem rechtwinkligen Dreieck wird beim Standardbeweis gezeigt, dass die Flächensumme der beiden Möndchen der Dreiecksfläche entspricht, ohne die einzelnen Flächeninhalte der Möndchen zu bestimmen. Gesucht ist eine möglichst einfache Zerlegung des rechtwinkligen Dreiecks in zwei Teilflächen so, dass diese je zu einem der beiden Möndchen flächengleich sind.

Raphael Muhr, Oberammergau, D

[1] Wie mir von *Walther Janous* mitgeteilt wurde, ist Šefket Arslanagić am 7. Mai 2023 verstorben. Eine Todesanzeige findet sich auf der Website https://jedileri.ba/smrtovnica/arslanagic-sefket/

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2023

Aufgabe 1434. Berechne

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^3}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+2)^3},$$
$$T_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(3k+1)^3}, \quad T_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(3k+2)^3}.$$

Michael Vowe, Therwil, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 12 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Raymond Mortini (Metz, F) und Rudolf Rupp (Nürnberg, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Ioannis D. Sfikas (Athen, GR), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Seán M. Stewart (Thuwal, SA).

Alle Löser gehen sehr ähnlich vor. Einerseits lassen sich (rationale) Linearkombinationen der geforderten Summen auf $\zeta(3)$ zurückführen. Andrerseits muss noch eine weitere Summe bestimmt werden. Die folgende Lösung ist aus den Beiträgen von *Frieder Grupp* und *Seán Stewart* zusammengesetzt.

Setzt man

$$S_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+3)^3}, \quad T_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(3k+3)^3},$$

so erhält man $S_1 + S_2 + S_3 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} = \zeta(3)$. Die Zahl $\zeta(3) = 1.2020\ldots$ heisst Apéry-Konstante.

Wegen $S_3 = \frac{1}{27} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{27}\zeta(3)$ gilt

$$S_1 + S_2 = \frac{26}{27}\zeta(3).$$

Weiterhin gilt

$$T_1 - T_2 + T_3 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r^3} = \frac{3}{4}\zeta(3),$$

denn

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r^3} = 2\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r)^3} = \frac{1}{4}\zeta(3)$$

und dann ist $T_3 = \frac{1}{27} \cdot \frac{3}{4}\zeta(3) = \frac{1}{36}\zeta(3)$, also

$$T_1 - T_2 = \frac{13}{18}\zeta(3).$$

Aus den Summendarstellungen für S_1, S_2, T_1 folgt

$$S_1 - T_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^3} - \frac{(-1)^k}{(3k+1)^3} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(6k+4)^3} = \frac{1}{4} S_2.$$

Ist nun noch eine weitere rationale Linearkombination von S_1, S_2, T_1, T_2 bekannt, so lassen sich alle vier Summen bestimmen.

Aus dem bekannten Weierstrassprodukt für den Sinus,

$$\frac{\sin(x)}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\Big), \quad x \in \mathbb{R},$$

erhält man durch Logarithmieren und dreifaches Ableiten nach x Folgendes:

$$\frac{2\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{2}{x^3} = -4x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\pi^2 k^2 + x^2}{(\pi^2 k^2 - x^2)^3}.$$

Einsetzen von $x = \frac{\pi}{3}$ ergibt

$$\begin{aligned}\frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{54}{\pi^3} &= -\frac{108}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{27k^2+1}{(9k^2-1)^3} = -\frac{54}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{(3k-1)^3} - \frac{1}{(3k+1)^3}\Big)\\ &= -\frac{54}{\pi^3}\big(S_2 - (S_1 - 1)\big).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$S_1 - S_2 = \frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}}$$

und schliesslich

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{13}{27}\zeta(3) + \frac{2\pi^3}{81\sqrt{3}}, \quad & S_2 &= \frac{13}{27}\zeta(3) - \frac{2\pi^3}{81\sqrt{3}},\\ T_1 &= \frac{13}{36}\zeta(3) + \frac{5\pi^3}{162\sqrt{3}}, \quad & T_2 &= -\frac{13}{36}\zeta(3) + \frac{5\pi^3}{162\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 1435. Man beweise für $x, y \geq 0$, $x + y = 2$ die Ungleichung

$$\sqrt{x^2+3} + \sqrt{y^2+3} + \sqrt{xy+3} \geq 6.$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BIH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden Lesern sind insgesamt 17 Beiträge eingetroffen: Ulrich Abel (Friedberg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Raymond Mortini (Metz, F) und Rudolf Rupp (Nürnberg, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler

(Allschwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Ioannis D. Sfikas (Athen, GR), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Es wurden im Wesentlichen die beiden folgenden Vorgehensweisen angewandt. Weil die Ungleichung wegen der Nebenbedingung nur von einer Variablen abhängt, können dann durch fortgesetztes Quadrieren die Wurzeln weggeschafft werden oder die Ungleichung kann analytisch gezeigt werden. Wir folgen der Lösung vom *Gerhard Wanner*, der die Ungleichung noch erweitert und geometrisch interpretiert hat.

Zuerst stören uns die vielen 3-er, die bei $x, y \to 1$ zu 4 mit $\sqrt{4} = 2$ werden. Deshalb würde man $x = 1 + z$ und $y = 1 - z$ setzen. Es erweist sich aber als noch schöner, $x = 1 + 2z$ und $y = 1 - 2z$ zu setzen. Dann kann man durch die vielen 4-er kürzen und man erhält als zu beweisende Ungleichung

$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt{1+z+z^2} + \sqrt{1-z+z^2} + \sqrt{1-z^2} \\ &= \sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{1-z^2} \geq 3 \quad \left(0 \leq z \leq \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Wir beweisen etwas mehr, denn die Ungleichung gilt noch ein Stück über $\frac{1}{2}$ hinaus bis zu

$$z = 0.934\,893\ldots$$

Die ersten beiden Wurzelausdrücke zusammen, Summe der Abstände des Punktes $(z, \frac{\sqrt{3}}{2})$ von den Punkten $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, bilden die grosse Achse $2a$ einer Ellipse mit Halbachsen a, b und diesen Brennpunkten, also $b^2 = a^2 - \frac{1}{4}$. Es gilt also

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{\frac{3}{4}}{b^2} = \frac{z^2}{a^2} + \frac{3}{4a^2 - 1} = 1 \implies a^4 - a^2(1+z^2) + \frac{z^2}{4} = 0.$$

Für $z = 0$ haben wir $a = 1$ und $f(0) = 3$. Für kleine $z > 0$ setzen wir $a = 1 + \varepsilon$, vernachlässigen höhere Potenzen, und erhalten

$$\varepsilon = \frac{3z^2}{8(1-z^2)}, \quad \text{also} \quad f(z) = 2 + 2\varepsilon + 1 - \frac{z^2}{2} + O(z^4) = 3 + \frac{z^2}{4} + O(z^4).$$

Die Funktion $f(z)$ ist also zunächst oberhalb der Grenze 3. Wo sie wieder herunterkommt, muss

$$2a + \sqrt{1-z^2} = 3, \quad \text{also} \quad z^2 = -4a^2 + 12a - 4 = -4(a-1)(a-2)$$

gelten. Dies eingesetzt in die obige Gleichung für a ergibt

$$5a^4 - 12a^3 + 6a^2 + 3a - 2 = (5a^3 - 7a^2 - a + 2)(a-1) = 0.$$

Die Wurzel $a = 1$ entspricht dem obigen $z = 0$. Zwei Wurzeln ausserhalb des Intervalls $1 \leq a \leq 2$ ergeben ein imaginäres z. Die uns hier interessierende Wurzel ist

$$a = 1.322\,535\ldots,$$

was dem obigen Wert für z entspricht.

Aufgabe 1436 (Die einfache dritte Aufgabe). Bestimme das Volumen eines Spats mit lauter gleich langen Kanten der Länge a, bei dem an einer Ecke die Kanten mit drei gleich grossen Winkeln φ zusammenstossen.

Walter Burgherr, Rothenburg, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 12 Lesern sind Zuschriften eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Lösungsmethoden unterscheiden sich dadurch, ob vektorgeometrisch in einem Koordinatensystem gearbeitet wurde oder das Volumen einer dreiseitigen Pyramide ausgerechnet wurde. Wir folgen den Ausführungen von *Bernhard Ruh*, der wie auch *Hans Brandstetter* mit der letzteren Methode gearbeitet hat.

Die von der erwähnten Ecke ausgehenden Kanten spannen eine regelmässige dreiseitige Pyramide mit Grundflächenkante u, Grundfläche G und Höhe h auf. Der Kosinussatz liefert

$$u^2 = 2\big(1 - \cos(\varphi)\big)a^2,$$

woraus man zuerst

$$G = \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\big(1 - \cos(\varphi)\big)$$

und dann mit Pythagoras

$$h = \sqrt{a^2 - \Big(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}u\Big)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 + 2\cos(\varphi)}a$$

berechnet. Das Volumen des Spats ergibt sich dann aus dem 6-fachen Volumen der Pyramide

$$V = 2Gh = \big(1 - \cos(\varphi)\big)\sqrt{1 + 2\cos(\varphi)}a^3.$$