Elemente der Mathematik 79 (2024), 131–136
DOI 10.4171/EM/538

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2025 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Aufgabe 1449: Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ zeige man

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \binom{2n+1}{k} \binom{k-1}{2} 2^{k-3} = n^2.$$

Raymond Mortini, Metz, F

Aufgabe 1450: Ersetzt man bei einem Ikosaeder eine Fläche und ihre drei Nachbarflächen durch drei Quadrate mit einer gemeinsamen Ecke, so erhält man ein konvexes Polyeder aus 16 gleichseitigen Dreiecken und drei Quadraten, wovon man sich durch „Basteln“ aus einem Netz leicht überzeugen kann. Man beweise, dass ein solches Polyeder nicht existiert.

Rolfdieter Frank, Koblenz, D

Aufgabe 1451 (Die einfache dritte Aufgabe): Seien eine Ellipse E mit den Brennpunkten A und B und zwei zueinander rechtwinklig stehende Tangenten t_1 und t_2 an E gegeben. Weiter seien a_1 und a_2 die Abstände vom Brennpunkt A zu t_1 und t_2 und analog b_1 und b_2 die Abstände vom Brennpunkt B. Zeige, dass dann $a_1 b_1 = a_2 b_2$ gilt.

Lajos László, Budapest, H

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2023

Aufgabe 1437. Die Funktion $f(x) = \frac{x}{\ln(1-x)}$, $x \neq 0$, $f(0) = -1$, lässt sich in eine Potenzreihe entwickeln, etwa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < 1.$$

(a) Man beweise: $\frac{1}{3k^2} \leq a_k \leq \frac{2}{k}$ für $k \geq 1$.

(b) Konvergieren die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und falls ja, gegen welchen Grenzwert?

Frieder Grupp, Bergrheinfeld, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 6 Beiträge von folgenden Lesern eingetroffen: Walther Janous (Innsbruck, A), Raymond Mortini (Metz, F) und Rudolf Rupp (Nürnberg, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Gerhard Wanner (Genève, CH).

Einerseits lassen sich die Abschätzungen durch explizite Formeln für die a_k relativ einfach gewinnen. Andrerseits erhält man durch bekannte Reihendarstellungen elementar eine Rekursion für die a_k. Wir folgen den leicht bearbeiteten Ausführungen von *Christian Schindler*, der als Einziger dieses Vorgehen gewählt hat.

Mit $\frac{1}{f(x)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{x+1}$ erhält man

$$1 = -\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}\right) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k} \frac{a_l}{k+1-l}\right)x^k.$$

Daraus folgt $a_0 = -1$ und für $k \geq 1$ ergibt sich die Rekursionsgleichung

$$a_k = \frac{1}{k+1} - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{a_l}{k+1-l}.$$

Aus der zu zeigenden Positivität der a_k $(k \geq 1)$ ergibt sich die stärkere obere Schranke $a_k \leq \frac{1}{k+1}$.

Wir definieren nun $b_k = (k+1)a_k$ für $k \geq 1$ und erhalten

$$b_k = 1 - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k+1}{(l+1)(k+1-l)} b_l = 1 - \left(\sum_{l=1}^{k-2} \frac{k+1}{(l+1)(k+1-l)} b_l\right) - \frac{k+1}{2k} b_{k-1}$$

für $k \geq 2$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} b_k - b_{k-1} &= -\frac{k+1}{2k} b_{k-1} + \sum_{l=1}^{k-2} \frac{1}{l+1}\left(\frac{k}{k-l} - \frac{k+1}{k+1-l}\right) b_l \\ &= -\frac{k+1}{2k} b_{k-1} + \sum_{l=1}^{k-2} \frac{l}{(l+1)(k-l)(k+1-l)} b_l \end{aligned}$$

und nach Addition von b_{k-1} erhält man für $k \geq 2$ die Rekursionsgleichung

$$b_k = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{l}{(l+1)(k-l)(k+1-l)} b_l.$$

Mit $b_1 = 1$ folgt daraus die Positivität der b_k und der a_k für $k \geq 1$.

Als nächstes werden wir zeigen, dass $b_k \geq \frac{k+1}{3k^2}$, falls für alle $1 \leq l \leq k-1$ die analoge Ungleichung $b_l \geq \frac{l+1}{3l^2}$ gilt. Daraus folgt dann die untere Schranke $a_k \geq \frac{1}{3k^2}$.

Aufgrund der Induktionsannahme ergibt sich

$$b_k \geq \frac{1}{3} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l(k-l)(k+1-l)} = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^{k-1} \Big(\frac{1}{k(k+1)} \frac{1}{l} + \frac{1}{k} \frac{1}{k-l} - \frac{1}{k+1} \frac{1}{k+1-l} \Big).$$

Mit $\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k-l} = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l}$ und $\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{k+1-l} = \sum_{l=2}^{k} \frac{1}{l}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{k-1} \Big(\frac{1}{k(k+1)} \frac{1}{l} + \frac{1}{k} \frac{1}{k-l} - \frac{1}{k+1} \frac{1}{k+1-l} \Big) \\
&= \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \frac{1}{k} + \Big(\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Big) \sum_{l=2}^{k-1} \frac{1}{l} \\
&= \frac{1}{k} + \frac{2}{k(k+1)} \sum_{l=2}^{k-1} \frac{1}{l} = \frac{1}{k-1} + \frac{2}{k(k+1)} \sum_{l=3}^{k-2} \frac{1}{l} \geq \frac{1}{k-1}
\end{aligned}$$

für $k \geq 4$. Eingesetzt erhält man

$$b_k \geq \frac{1}{3(k-1)} > \frac{k+1}{3k^2}.$$

Mit $b_1 = 1$ und der Rekursion erhält man $b_2 = \frac{1}{4}$ und $b_3 = \frac{1}{6}$. Für diese Werte gilt ebenfalls $b_k \geq \frac{k+1}{3k^2}$. Damit ist Teil (a) gezeigt.

Wegen der Positivität der a_k für $k \geq 1$ konvergieren die Taylorpolynome

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{für } 0 \leq x < 1$$

monoton gegen $f(x)$. Somit ist $f_n(x) < f(x) < 0$ für $0 < x < 1$ und wegen der Stetigkeit der Taylorpolynome gilt auch noch $f_n(1) = \sum_{k=0}^{n} a_n \leq 0$, was die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ zeigt. Aus dem Abelschen Grenzwertsatz und der (linksseitigen) Stetigkeit von $f(x)$ ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = f(-1) = -\frac{1}{\ln(2)}.$$

Bemerkung. Mehrere Leser weisen darauf hin, dass die a_k bis auf das Vorzeichen mit den sogenannten Gregory Koeffizienten übereinstimmen, die sehr gut untersucht sind.

Aufgabe 1438. Es seien $z_j = r_j e^{it_j}$ zwei Punkte in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ mit $0 < r_j < 1$ und $|t_j| < \pi/2$. Weiterhin sei $\Delta = \langle z_1, z_2, 1\rangle$ das durch die Punkte z_1, z_2, 1 bestimmte abgeschlossene Dreieck. Man zeige: Für alle $z = re^{it} \in \Delta$ mit $|t| < \pi/2$ gilt

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \max\left\{\frac{|1-z_1|}{1-|z_1|}, \frac{|1-z_2|}{1-|z_2|}\right\} \quad \text{und} \quad \frac{|t|}{1-r} \leq \max\left\{\frac{|t_1|}{1-r_1}, \frac{|t_2|}{1-r_2}\right\}.$$

Raymond Mortini, Metz, F und Rudolf Rupp, Nürnberg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden 6 Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Im Prinzip lassen sich die behaupteten Ungleichungen direkt nachweisen. Die Argumentation lässt sich wesentlich vereinfachen, wenn man bekannte Kurven zu Hilfe zieht. Wir folgen der Lösung von *Bernhard Ruh*, der das sehr elegant ausführt.

Wir untersuchen zuerst die Kurve

$$f(z) = \frac{|1-z|}{1-|z|} = c, \quad c > 1,$$

deren Verhalten man besser versteht, wenn man sie um 1 nach links verschiebt und anschliessend an der imaginären Achse spiegelt. Mit $z = x + iy$ erhält man für die transformierte Kurve die Gleichung

$$\sqrt{x^2+y^2} = c\big(1 - \sqrt{(1-x)^2+y^2}\big).$$

Nach dem Standardverfahren zur Elimination von Wurzeln führt dies zu

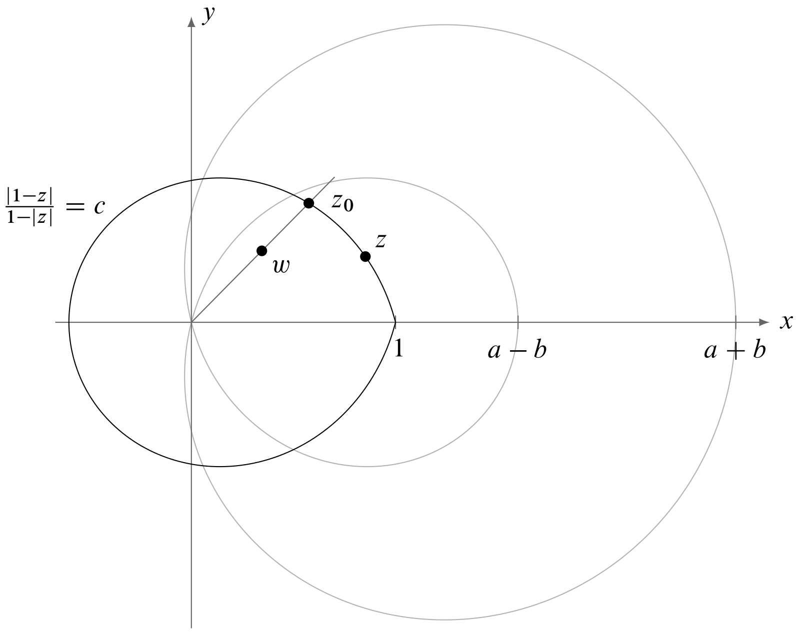
$$(x^2+y^2-ax)^2 - b^2(x^2+y^2) = 0, \quad a = \frac{2c^2}{c^2-1}, \quad b = \frac{2c}{c^2-1},$$

also der Gleichung einer Pascalschen Schnecke (Limaçon). Für ein z im rechten Einheitshalbkreis besteht die originale Kurve also aus einem bei 1 startenden und nach links und durch z laufenden Teil der inneren Schleife dieser Pascalschen Schnecke, welche die imaginäre Achse in zwei zum Nullpunkt symmetrischen Punkten schneidet.

Es sei nun G_z das konvexe(!) Gebiet, das durch diese Kurve und die imaginäre Achse begrenzt wird. Wir zeigen, dass für Punkte w mit $|w| < 1$ genau für Punkte im Inneren von G_z nun $f(w) < f(z)$ gilt. Für reelles w ist dies klar. Andernfalls sei z_0 der Schnittpunkt der Geraden durch 0 und w mit dem Rand von G_z. Für $z = re^{it}$ erhält man unter Anwendung des Kosinussatzes und $\cos(t) = 1 - 2\sin^2(\frac{t}{2})$ die Gleichung

$$f(z) = \sqrt{1 + \frac{4r}{(1-r)^2}\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big)}.$$

Da $g(r) = \frac{4r}{(1-r)^2}$ im Intervall $[0,1)$ monoton wachsend ist, folgt $f(w) < f(z_0) = f(z)$ für innere Punkte von G_z und $f(w) > f(z_0) = f(z)$ für äussere Punkte von G_z.



Für das in der Aufgabe erwähnte Dreiecke $\langle z_1, z_2, 1\rangle$ sei $f(z_1) > f(z_2)$. Dann liegen 1 und z_1 auf dem Rand des konvexen Gebietes G_{z_1} und z_2 im Inneren. Die angegebene Ungleichung folgt dann wegen der Konvexität von G_{z_1} sofort.

Die Argumentation für die zweite Ungleichung ist analog. Die Kurve

$$\frac{|t|}{1-r} = c, \quad c > 0, \quad |t| < \frac{\pi}{2},$$

ist Stück einer bei 1 beginnenden Archimedischen Spirale zusammen mit ihrem an der reellen Achse gespiegelten Spiegelbild. Das Gebiet, das durch die Kurve und allenfalls durch die imaginäre Achse begrenzt ist, ist wiederum konvex. Auch hier ist $h(r) = \frac{1}{1-r}$ wieder eine im Intervall $[0, 1)$ monoton wachsende Funktion.

Vollständigkeitshalber sei noch erwähnt, dass in den Grenzfällen $c = 1$ bzw. $c = 0$ die Ungleichungen trivialerweise erfüllt sind.

Aufgabe 1439 (Die einfache dritte Aufgabe). Man betrachte die Permutation von n verschiedenen Ziffern $1, 2, 3, \ldots, n$. Welche geraden Permutationen g besitzen mindestens eine „Quadratwurzel“ f im Sinne von $f \circ f = g$, und wie lässt sich eine solche Permutation f aus g konstruieren?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 6 Lesern haben Beiträge zugesandt: Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Fast alle Leser sehen sich die Eigenschaften von Quadraten von Permutationen an und schliessen dann umgekehrt auf die Existenz von Quadratwurzeln. Wir folgen den Ausführungen von *Wolfgang Seewald*, der das sehr prägnant ausdrückt.

Wir betrachten einen Zyklus der Länge k, etwa $f = (a_1\, a_2\, \dots\, a_k)$. Wird dieser quadriert, so ergibt sich ein Zyklus derselben Länge k, falls k ungerade ist:

$$g = (a_1\, a_3\, \dots\, a_k\, a_2\, a_3\, \dots\, a_{k-1}).$$

Insbesondere gilt für $k = 1$: $f = g = (a_1)$.

Ist k gerade, so ergibt sich ein Produkt von zwei Zyklen der Länge $\frac{k}{2}$:

$$g = (a_1\, a_3\, \dots\, a_{k-1})(a_2\, a_4\, \dots\, a_k).$$

Ist eine Permutation f das Produkt von mehreren Zyklen, so ist jeder Zyklus getrennt zu quadrieren.

Umgekehrt lässt sich schliessen: Ein Zyklus der ungeraden Länge k, etwa

$$g = (b_1\, b_2\, \dots\, b_k),$$

hat als „Quadratwurzel" wiederum einen Zyklus der Länge k, nämlich

$$f = (b_1\, b_{\frac{k+3}{2}}\, b_2\, b_{\frac{k+5}{2}}\, b_3\, \dots\, b_{\frac{k+1}{2}}).$$

Zwei Zyklen derselben Länge k, etwa $g = (b_1\, b_2\, \dots\, b_k)(c_1\, c_2\, \dots\, c_k)$, haben als „Quadratwurzel" einen Zyklus der Länge $2k$, nämlich

$$f = (b_1\, c_1\, b_2\, c_2\, \dots\, b_k\, c_k).$$

Es gibt hier aber für $k > 1$ mehrere Möglichkeiten, etwa auch

$$f = (b_1\, c_2\, b_2\, c_3\, \dots\, b_k\, c_1).$$

Damit eine Permutation eine „Quadratwurzel" f hat, müssen also die geradzahligen Zyklen paarweise dieselbe Länge haben. Falls ungeradzahlige Zyklen paarweise dieselbe Länge haben, so kann auf die oben beschriebene eine oder andere Art eine Quadratwurzel gebildet werden. Die Quadratwurzel ist also eindeutig bestimmt, falls alle Zyklen der Permutation verschiedene ungerade Länge haben. Andernfalls gibt es mehrere „Quadratwurzeln".

Für $n \leq 5$ haben alle geraden Permutationen mindestens eine Quadratwurzel. Für $n \geq 6$ gibt es Permutationen ohne „Quadratwurzel", etwa $(1\,2\,3\,4)(5\,6)$.

Korrigendum. Durch ein Versehen ist in den Löserlisten zu den Aufgaben 1435 und 1436 *Lienhard Wimmer* unerwähnt geblieben.