Elemente der Mathematik 79 (2024), 176–180
DOI 10.4171/EM/547

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2025 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Aufgabe 1452: Für zwei Kreise k_1, k_2 mit Radien r_1, r_2 und Abstand $d > r_1 + r_2$ der Kreismittelpunkte seien S_1, S_2, S_3, S_4 die Schnittpunkte von je einer inneren und äusseren gemeinsamen Tangente an die Kreise. Weiter seien $B_1, \dots, B_8$ die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an die Kreise. Man zeige:

(a) Jeder Schnittpunkt S_i ist gleich weit vom nächstgelegenen Punkt B_j entfernt. Wie gross ist dieser Abstand?

(b) Die zwölf Punkte S_i und B_j liegen auf drei konzentrischen Kreisen, deren Mittelpunkte die Mitte der beiden Kreiszentren von k_1 und k_2 sind. Wie gross sind die Radien dieser Kreise?

Raphael Muhr, Oberammergau, D

Aufgabe 1453: Für reelle $x > 1$ und natürliche Zahlen n beweise man die Ungleichung

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^n \leq 1 - \frac{n}{x + n - 1}.$$

Yagub Aliyev, Baku, AZ

Aufgabe 1454 (Die einfache dritte Aufgabe): Fasst man die Permutationen der Zahlen $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ($n \geq 2$) als die n Koordinaten von Punkten im $\mathbb{R}^n$ auf, so lässt sich der Abstand zweier solcher Punkte in der üblichen Weise mittels Euklidischer Norm berechnen.

Genau welche Paare von Punkten mit unterschiedlichen Koordinaten aus der Menge $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ weisen dabei eine maximale Entfernung voneinander auf und wie gross ist diese ausgedrückt durch n?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2023

Aufgabe 1440. Sei ABC ein nicht rechtwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt U. Sei D der Schnittpunkt der Geraden CU und AB und seien V und W die Umkreismittelpunkte der Dreiecke ACD resp. BCD. Die Gerade AW schneide BC im Punkt E und die Gerade BV schneide AC im Punkt F. Zeige, dass sich die Geraden VW und EF auf der Mittelsenkrechten von AB schneiden.

Trang Quang Hung, Hanoi, VN

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden sechs Lesern eingegangen: Klaus Bickel (Freiburg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Während sich die Aufgabe mittels geschickt gewählter Koordinaten relativ einfach nachrechnen lässt, verwenden *Klaus Bickel* und *Bernhard Ruh*, deren Lösungen praktisch identisch sind, den Satz von Pappos und kommen so elementar zum Ziel (siehe Abbildung auf der nächsten Seite).

Es sei o. B. d. A. $\alpha < \beta$ (für $\alpha = \beta$ fallen die Geraden EF und VW zusammen). Es bezeichne M_b die Seitenmitte der Seite b. Aus dem Kreiswinkelsatz im Umkreis ABC folgt zunächst $\sphericalangle CUM_b = \beta$ bzw. $\sphericalangle M_bCU = 90° - \beta$. Wegen der Winkelsumme im Dreieck ACD ergibt sich dann der Winkel $\sphericalangle CDB = 90° + \alpha - \beta$, welcher aufgrund des Kreiswinkelsatzes im Umkreis von ADC dem Winkel $\sphericalangle M_bVA$ entspricht. Damit gilt $\sphericalangle VAM_b = \beta - \alpha$ und $\sphericalangle VAB = \alpha + \beta - \alpha = \beta$.

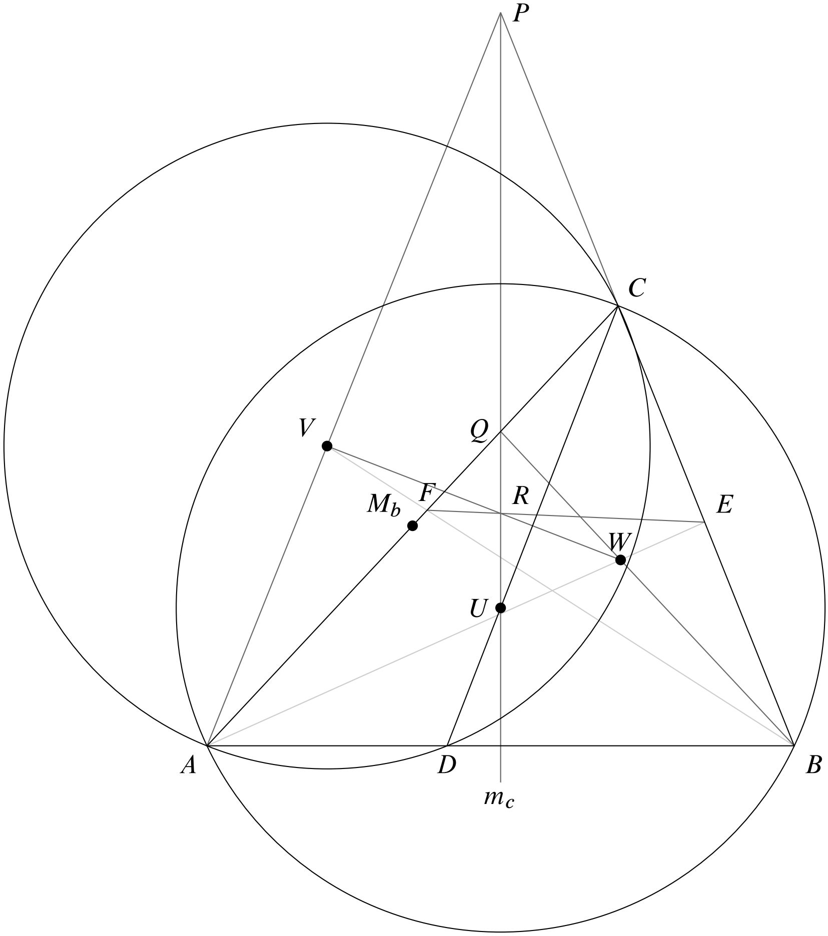
Aus Symmetriegründen schneiden sich daher die Geraden AV und BE in einem Punkt P auf der Mittelsenkrechten m_c von AB. Ganz analog zeigt man, dass sich die Geraden BW und AF in einem Punkt Q auf m_c schneiden. Aufgrund des Satzes von Pappos angewendet auf die Punkte A, V, W, B, E, F schneiden sich nun auch die Geraden VW und EF in einem Punkt R auf der Geraden $PQ = m_c$.

Aufgabe 1441. Sei c die Kurve gegeben durch die Parameterdarstellung $x(t) = t - A/t$, $y(t) = t^2 + B/t$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für welche ganzzahligen Werte von A und B besitzt c eine Selbstüberschneidung mit senkrechtem Schnittwinkel.

Gregory Dresden, Lexington VA, USA

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 15 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Raymond Mortini (Metz, F) und Rudolf Rupp (Nürnberg, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH) und Josef Züger (Bonaduz, CH).

Die Aufgabe lässt sich im Prinzip ohne Schwierigkeiten lösen. Die Lösungen unterscheiden sich dadurch, ob zuerst der Parameter t eliminiert wurde oder nicht. Im Übrigen stellt sich heraus, dass die Kurve in zwei Äste ($t < 0$, $t > 0$) zerfällt, sodass man streng genom-



men von zwei Kurven sprechen muss. Wir folgen der Lösung von *Hans Brandstetter*, der ohne Elimination von t auskommt.

Aus der Gleichung $x = t - \frac{A}{t}$ kann man zwei Parameter $t_{1,2}$ mit gleichem x ausrechnen:

$$t_1 = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 + 4A}), \quad t_2 = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4A}).$$

Die beiden Parameter können in $y(t)$ eingesetzt werden und man erhält aus $y(t_1) = y(t_2)$ die Gleichung

$$\frac{2B}{x - \sqrt{x^2 + 4A}} + \frac{1}{4}(x - \sqrt{x^2 + 4A})^2 = \frac{2B}{x + \sqrt{x^2 + 4A}} + \frac{1}{4}(x + \sqrt{x^2 + 4A})^2$$

beziehungsweise

$$\sqrt{x^2 + 4A}(Ax + B) = 0 \implies x = -\frac{B}{A}.$$

Der Fall $\sqrt{x^2+4A}=0$ bringt keine sinnvolle Lösung, weil in diesem Fall $t_1=t_2$ gelten würde.

Die Zusatzbedingung, dass die Selbstüberschneidung im rechten Winkel erfolgen soll, bedeutet, dass die Tangentialvektoren im Schnittpunkt normal aufeinander stehen:

$$x'(t_1)x'(t_2)+y'(t_1)y'(t_2)=0.$$

Mit $x'(t)=1+\frac{A}{t^2}$ und $y'(t)=2t-\frac{B}{t^2}$ ergibt sich

$$\Big(1+\frac{A}{t_1^2}\Big)\Big(1+\frac{A}{t_2^2}\Big)+\Big(2t_1-\frac{B}{t_1^2}\Big)\Big(2t_2-\frac{B}{t_2^2}\Big)=0.$$

Einsetzen von t_1, t_2 und Vereinfachen führt auf die Gleichung

$$B^2-(6Ax+2x^3)B-4A^3+4A^2+Ax^2=0.$$

Einsetzen von $x=-\frac{B}{A}$ führt schliesslich zu

$$(2B^2-A^3+A^2)(B^2+4A^3)=0$$

mit der Lösung

$$B=\pm A\sqrt{\frac{A-1}{2}}$$

(der Fall $B^2+4A^3=0$ entspricht $x^2+4A=0$). Um Ganzzahligkeit zu bekommen, setzt man $A=2k^2+1$ und erhält $B=k(2k^2+1)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Bemerkung. Einige Leser sehen, dass in diesem Fall auch der Schnittpunkt ganzzahlige Koordinaten $(-k,3k^2+1)$ hat.

Aufgabe 1442 (Die einfache dritte Aufgabe). Es sei $f(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}$ mit positiven x,y,z in $\mathbb{R}$. Man bestimme

$$\min_{x^2+y^2+z^2=1} f(x,y,z).$$

Frieder Grupp, Bergrheinfeld, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden Lesern sind 16 Lösungen eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Philipp E. Imhof (Oberbuchsiten, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Raymond Mortini (Metz, F) und Rudolf Rupp (Nürnberg, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D), Roland Wyss (Flumenthal, CH) und Josef Züger (Bonaduz, CH).

Die Lösungen unterscheiden sich hauptsächlich dadurch, ob mit oder ohne Lagrange-Multiplikatoren gearbeitet wurde. Wir folgen den Ausführungen von *Fritz Siegerist*, der die Aufgabenstellung noch leicht verallgemeinert.

Man kann verallgemeinern mit $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{a}{z}$ mit $a > 0$. Durch Einsetzen der Nebenbedingung ist der Minimalwert von

$$f(x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}} + \frac{a}{z}$$

gesucht.

Da die Ableitung nach x nur für $x = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - z^2)}$, also nur für $x = y$ verschwindet, genügt es unter Nutzung eben dieser Symmetrie

$$f(x, x, \sqrt{1 - 2x^2}) = \frac{2}{x} + \frac{a}{\sqrt{1 - 2x^2}}$$

zu minimieren.

Man erhält $x = (2 + a^{2/3})^{-1/2}$, $y = x$, $z = a^{1/3}x$ und daraus den Minimalwert

$$(2 + a^{2/3})^{3/2} \overset{a=2}{\Longrightarrow} (2 + 2^{2/3})^{3/2} = 6.794\ldots$$