Elemente der Mathematik (Online first)
DOI 10.4171/EM/545

Published by EMS Press

Rezensionen

Peter Hohler: ***Nichts ist vollkommen. Oder doch?*** Ein mathematisches Lesebuch, 89 Seiten, CHF 35; ISBN 978-3-9525987-0-2. meo Verlag 2024.

Peter Hohler war langjähriger Gymnasiallehrer für Mathematik an der Kantonsschule Olten. Auch nach seiner Pensionierung blieb er seinem Fach treu und hielt etliche Vorträge über Mathematik als gern gesehener und gehörter Redner. Diese bilden die Grundlage zum vorliegenden Buch. Es ist in 12 Kapitel gegliedert, die alle unabhängig voneinander gelesen werden können. Der Inhalt ist elementar: Als Voraussetzung ist eine gymnasiale Ausbildung mit einem mathematischen Schwerpunkt ausreichend – und die Bereitschaft, auch Argumentationen folgen zu wollen, die sich über mehrere Seiten hinziehen.

Greifen wir einige der Highlights heraus: Das Kapitel, das den gleichen Titel wie das Buch trägt, handelt – wer ahnt es nicht? – von *vollkommenen Zahlen*. Es wird der auf Euklid zurückgehende Satz, wonach die Zahl $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ vollkommen ist, falls $2^n - 1$ eine Primzahl ist (also eine *Mersennesche Primzahl*), bewiesen und ebenso dessen teilweise Umkehrung, wonach eine gerade vollkommene Zahl nur diese Darstellung besitzen kann (Satz von Euler). Es wird die hübsche Aussage bewiesen, dass die Summe der Reziproken der Teiler einer vollkommenen Zahl stets 2 ist. Zum Schluss wird auch gezeigt, dass eine gerade vollkommene Zahl auf 6 oder auf 28 enden muss. Bis dato ist nicht bekannt, ob es unendlich viele vollkommene Zahlen gibt und auch, ob es unendlich viele Mersennesche Primzahlen gibt. Zudem sind keine *ungeraden* vollkommenen Zahlen bekannt.

Das Kapitel *die Seitenhalbierende und die Winkelhalbierende* beschäftigt sich mit den Transversalen eines Dreiecks. Es beginnt mit der Beobachtung, dass die Winkelhalbierende eines nicht gleichschenkligen Dreiecks immer zwischen der von der Ecke ausgehenden Seitenhalbierenden und der Höhe liegt. Dann werden die Formeln zur Bestimmung der Länge von Seiten- und Winkelhalbierenden (gegeben die Längen a, b und c) eines Dreiecks hergeleitet. Das Kapitel schliesst mit der Feststellung, dass die Fläche des aus den Seitenhalbierenden gebildeten Dreiecks 3/4 der Fläche des ursprünglichen Dreiecks entspricht. Dafür werden zwei Beweise gegeben, dabei ein eleganter, der auf N. Hungerbühler zurückgeht.

Das Buch schliesst mit dem Kapitel über das sogenannte Basler Problem: die Bestimmung des Grenzwerts der Reihe der reziproken Quadratzahlen. Rekapitulieren wir kurz, wie Euler ab den 1730er Jahren dieses Problem löste und damit endgültige Berühmtheit erlangte. Mit der von ihm und später von C. Maclaurin entdeckten Summenformel hatte er ein Verfahren zur Verfügung, mit dem sich dieser Grenzwert numerisch effizient mit hoher Genauigkeit ermitteln liess. Etwas später entdeckte er die Produktdarstellung der Sinusfunktion

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\Big),$$

welche einerseits durch Einsetzen von $x = \pi/2$ unmittelbar das Wallissche Produkt für π ergibt; anderseits liefert das Ausmultiplizieren der rechten Seite und ein anschliessender Koeffizientenvergleich mit der Potenzreihe der Sinusfunktion im Falle der dritten Potenz sogleich die Lösung des Basler Problems, und die Terme höherer Ordnung liefern alle Werte $\zeta(2m) := \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{2m}}$. Die obige Darstellung der Sinusfunktion ist heuristisch klar, wenn man annimmt, dass sich $\sin x$ «wie ein Polynom verhält, dessen Nullstellen man kennt»; dies gibt nebst fehlender Konvergenzuntersuchung freilich etwas Anlass zu Kritik. Ein anderer Weg geht so: Logarithmieren von $\sin x$ und des Produkts und anschliessendes Ableiten führt auf die sogenannte *Partialbruchzerlegung des Cotangens*, die u. a. das Basler Problem ebenfalls löst und zudem mit komplexer Analysis direkt bewiesen werden kann. Diese Methoden wurden allerdings erst im 19. Jahrhundert durch A. Cauchy, P. A. Laurent, K. Weierstrass und weitere entdeckt. Im vorliegenden Buch wird ein neuer Beweis des Eulerschen Resultats präsentiert, der im Jahr 2012 von D. Daners publiziert worden ist.

Es kommen viele weitere Aspekte zur Sprache, wie die wichtige Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel, wofür verschiedene Beweise (mit und ohne Induktion) geliefert werden. Mit Wahrscheinlichkeit setzt sich das Buch in zwei separaten Kapiteln auseinander, wobei auch das berühmte Monty-Hall-Problem samt seiner Lösung vorgestellt wird. Ausgehend von einer im ersten Moment seltsam anmutenden trigonometrischen Identität wird der Frage nachgegangen, wie irrational $\cos \frac{\pi}{7}$ ist. – Und wenn das Basler Problem gelöst wird, kommen natürlich auch die harmonische Reihe und ihre Ausdünnungen zu Ehren.

Insgesamt ist Peter Hohler damit ein spannendes Buch gelungen, das auf knappem Raum eine Fülle von Themen anschneidet; ein Buch, das allen Liebhaberinnen und Liebhabern der Mathematik wärmstens empfohlen werden kann.

Martin Jakob, Olten, CH