Elemente der Mathematik 80 (2025), 11–25
DOI 10.4171/EM/523

Ein elementarer Beweis des Primzahlsatzes via den ersten Satz von Mertens

Daniel Fritze

Daniel Fritze wurde 1978 in Berlin geboren. Er studierte Mathematik und Physik an der Freien Universität Berlin und machte 2007 das Abschlussdiplom. Als leidenschaftlicher Hobbyforscher widmet er sich schwerpunktmäßig der Zahlentheorie und bearbeitet die Aufgaben aus verschiedenen Zeitschriften, darunter auch die Aufgaben in den Elementen der Mathematik.

1 Einleitung

F. Mertens [8] hat im Jahre 1874 erstmals einen strengen, aber elementaren Beweis einer Aussage über die Verteilung der Primzahlen vorgelegt, die heute als zweiter Satz von Mertens bekannt ist:

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\log\log x+M+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big).$$

Die Primzahltheorie ist seit der griechischen Antike eines der wichtigsten Kapitel der Mathematik. Erst um 1800 jedoch wurde die Frage aufgeworfen, ob es möglich sei, die Primzahlen in Beziehung zu elementaren Funktionen zu setzen. Das zunächst als Vermutung von Gauß und Legendre ausgesprochene Ergebnis ist heute als Primzahlsatz bekannt. Um 1850 bildeten sich zwei Ansätze für den Beweis heraus: zum einen die elementare, reell-analytische Methode von Tschebyschow, zum anderen die von Riemann mit den Mitteln der Funktionentheorie begründete Theorie der nach ihm benannten Zetafunktion. Der erst durch die nachfolgende Generation erbrachte Beweis auf Grundlage des letzteren Ansatzes ist bis heute der Standardbeweis geblieben, da sich die später entdeckten, darunter auch reell-analytische, als technisch höchst anspruchsvoll erwiesen. Mit der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, durch eine offenbar neue und elementare Beweismethode, die auf den von Tschebyschow und den darauf aufbauenden Ergebnissen von Mertens beruht und einzig mit den Mitteln der Differenzenrechnung auskommt, dieses berühmte Ergebnis zugänglicher zu machen.

Hierbei ist x reell, p durchläuft die Menge $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Primzahl}\}$ und

$$M = \gamma + \sum_{p \in \mathbb{P}} \Big(\log\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) + \frac{1}{p} \Big)$$

ist die Meissel-Mertens-Konstante, worin γ die Euler-Mascheroni-Konstante bezeichnet. Der Logarithmus ist wie im Folgenden stets natürlich, sofern keine andere Basis angegeben ist.

In [8] findet sich auch die Aussage

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1),$$

die heute als erster Satz von Mertens bekannt ist, welche in der Abhandlung von Mertens jedoch nur den Rang eines Hilfssatzes einnimmt. Es mag auf den ersten Blick merkwürdig anmuten, dass gerade diese Primzahlsumme, und nicht die von Mertens hervorgehobene, einen Zugang zu wesentlich tieferliegenden Aussagen über die Verteilung der Primzahlen eröffnet. Wenn es nämlich gelingt, die Konvergenz von

$$\tau(x) = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} - \log x$$

für $x \to \infty$ nachzuweisen, so lässt sich daraus leicht das vielleicht bedeutendste Ergebnis der analytischen Zahlentheorie, der Primzahlsatz, folgern. Dieser besagt, dass

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1,$$

wobei $\pi(x)$ die bekannte Primzahlfunktion, d. h. die Anzahl der Primzahlen nicht größer als x, bezeichnet. Dies soll in Abschnitt 3 noch näher erläutert werden. Auf den zweiten Blick erkennt man jedoch den engen Zusammenhang zwischen dieser gewichteten und der ungewichteten Primzahlsumme

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

die Tschebyschow [12] eingeführt und durch die Bestimmung von deren Ordnung, d. h. $\vartheta(x) = O(x)$ für $x \geq 1$, erstmals den Zusammenhang zwischen der Primzahlfunktion und dem Logarithmus und somit dessen Bedeutung für das Problem der Primzahlverteilung streng bewiesen hat, welcher zuvor von Gauß und Legendre anhand numerischer Berechnungen nur vermutet worden war. Mit Hilfe dieses Ergebnisses lässt sich auch der erste Satz von Mertens leicht folgern.

Es stellt sich nun die Frage, ob sich die Konvergenz von τ ebenfalls elementar, d. h. ohne Verwendung von Methoden aus der höheren Analysis wie etwa der Funktionentheorie, direkt beweisen und darüber hinaus der Grenzwert bestimmen lässt. Wir werden im Laufe der folgenden Untersuchung sehen, dass dies in der Tat der Fall ist. Es wird sich herausstellen, dass eine leichte Abwandlung der Summe $\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p}$ der Schlüssel zur Lösung dieses Problems ist (Lemma 2.1).

Die Konvergenz von τ wurde von de la Vallée Poussin [2] mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden bewiesen, setzt allerdings den Primzahlsatz voraus, der ebendort erstmalig und unabhängig von Hadamard [5] bewiesen wurde. Ein einfacherer direkter, ebenfalls funktionentheoretischer Beweis wurde von Newman [9] gegeben. Dieses Ziel lässt sich bereits heute auf elementarem Weg erreichen, wenn man zuvor den Primzahlsatz beweist. Solche elementaren Beweise des Primzahlsatzes wurden von Erdős [4] und Selberg [10] unter wechselseitigem Einfluss gefunden, beide Beweise basieren jedoch auf einer von Selberg entdeckten Identität. Einen recht guten Überblick über weitere Beweise des Primzahlsatzes sowie aktuelle Entwicklungen gibt McNamara [7].

Die in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Methode unterscheidet sich jedoch grundlegend von den genannten und dem Verfasser bekannten Beweismethoden. Sie besteht darin, die Fehler in den Sätzen von Mertens als reelle Funktionen aufzufassen, diese mit Hilfe der Methode der Abelschen partiellen Summation umzuformen und anschließend miteinander in Beziehung zu setzen. Außer den Ergebnissen von Tschebyschow in ihrer einfachsten Form wird nichts an Kenntnissen vorausgesetzt.

Das Ziel der folgenden Ausführungen soll es zunächst sein, zwei neue Darstellungen der Funktion τ zu gewinnen (Lemmata 2.2 und 2.5). Durch Verknüpfung dieser beiden Darstellungen werden wir ein Ergebnis erhalten (Lemma 2.6), welches es uns erlauben soll, das Hauptergebnis unserer Untersuchung zu beweisen, nämlich die Konvergenz von τ (Satz 3.1). Zudem soll auf Grundlage der gewonnenen Ergebnisse der Grenzwert von τ bestimmt werden. Dieser wurde ebenfalls zuerst von de la Vallée Poussin [3] gefunden, wofür allerdings der Primzahlsatz mit Restglied erforderlich ist. Die in Abschnitt 4 vorgestellte Methode erscheint insofern von Interesse zu sein, da sie ohne den Primzahlsatz mit Restglied auskommt.

2 Hilfssätze

Im Folgenden seien mit $\lfloor x \rfloor$ der ganzzahlige Teil von x, d. h. die größte ganze Zahl kleiner gleich x, und mit $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ der gebrochene Teil von x bezeichnet.

Lemma 2.1. *Für $x \geq 2$ gilt*

$$\sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \log p = x \log x - C_1 x + O(\sqrt{x}), \tag{2.1}$$

wobei $C_1 = 1 + \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log p}{p(p-1)}$.

Anmerkung. In dem Verfasser bekannten Abhandlungen über die analytische Zahlentheorie, etwa in [1, 11], wird nur der Fehler $O(x)$ angegeben. Aus Lemma 2.1 folgt bereits ein wichtiger Spezialfall des Primzahlsatzes, nämlich der Satz von Tschebyschow [12], auch bekannt als Bertrandsches Postulat. Dieser besagt, dass stets eine Primzahl p mit $x < p < 2x$ für $x > 1$ existiert. Bezeichnet man die Summe in (2.1) mit $A(x)$, so folgt der Beweis leicht durch Abschätzung des Ausdrucks $A(x) - 2A(x/2)$, der auch in [11] untersucht wird.

Beweis. Ausgangspunkt ist der bekannte Satz von Legendre über die Primzahlzerlegung der Fakultät:

$$\lfloor x \rfloor ! = \prod_{p \le x} p^{e_p}, \quad e_p = \sum_{m=1}^{\lfloor \log_p x \rfloor} \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor. \tag{2.2}$$

Logarithmieren ergibt zunächst

$$\log \lfloor x \rfloor ! = \sum_{p \le \sqrt{x}} e_p \log p + \sum_{\sqrt{x} < p \le x} e_p \log p. \tag{2.3}$$

Für die zweite Summe gilt

$$\sum_{\sqrt{x} < p \le x} e_p \log p = \sum_{\sqrt{x} < p \le x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \log p, \tag{2.4}$$

da $\lfloor x/p^m \rfloor = 0$ für $p > \sqrt{x}$ und $m \ge 2$. Die erste Summe können wir auf folgende Weise zerlegen:

$$\begin{aligned} \sum_{p \le \sqrt{x}} e_p \log p &= \sum_{p \le \sqrt{x}} \sum_{m=1}^{\lfloor \log_p x \rfloor} \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor \log p \\ &= \sum_{p \le \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \log p + \sum_{p \le \sqrt{x}} \sum_{m=2}^{\lfloor \log_p x \rfloor} \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor \log p. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Es soll im Folgenden darum gehen, die letzte Doppelsumme auszuwerten. Diese lässt sich zunächst wie folgt zerlegen:

$$\sum_{p \le \sqrt{x}} \sum_{m=2}^{\lfloor \log_p x \rfloor} \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor \log p = x \sum_{p \le \sqrt{x}} \sum_{m=2}^{\lfloor \log_p x \rfloor} \frac{\log p}{p^m} - \sum_{p \le \sqrt{x}} \sum_{m=2}^{\lfloor \log_p x \rfloor} \left\{ \frac{x}{p^m} \right\} \log p, \tag{2.6}$$

wenn man beachtet, dass $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$. Der zweite Teil lässt sich mit Hilfe der von Tschebyschow [12] eingeführten Funktion

$$\psi(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{p^m \le x} \log p = \sum_{p \le x} \lfloor \log_p x \rfloor \log p,$$

für welche die elementare Abschätzung $\psi(x) = O(x)$ für $x \ge 1$ gilt, folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{p \le \sqrt{x}} \sum_{m=2}^{\lfloor \log_p x \rfloor} \left\{ \frac{x}{p^m} \right\} \log p &< \sum_{p \le \sqrt{x}} \lfloor \log_p x \rfloor \log p \\ &= O\big(\psi(\sqrt{x})\big) = O(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

für $x \geq 1$. Was den ersten Teil auf der rechten Seite von (2.6) betrifft, so erhalten wir nach Division durch x:

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq\sqrt{x}}\sum_{m=2}^{\lfloor\log_p x\rfloor}\frac{\log p}{p^m} &= \sum_{p\leq\sqrt{x}}\Bigg(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{p^m} - \sum_{m=\lfloor\log_p x\rfloor+1}^{\infty}\frac{1}{p^m}\Bigg)\log p \\ &= \sum_{p\leq\sqrt{x}}\frac{\log p}{p(p-1)} - \sum_{p\leq\sqrt{x}}\frac{\log p}{p^{\lfloor\log_p x\rfloor}(p-1)}. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Die letzte Summe können wir mit Hilfe der Tschebyschowschen ϑ-Funktion wie folgt abschätzen:

$$\sum_{p\leq\sqrt{x}}\frac{\log p}{p^{\lfloor\log_p x\rfloor}(p-1)} < \frac{1}{x}\sum_{p\leq\sqrt{x}}\frac{p\log p}{(p-1)} < \frac{2\vartheta(\sqrt{x})}{x} = O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)$$

für $x \geq 1$, denn $p^{\lfloor\log_p x\rfloor} > p^{\log_p x-1} = x/p$. Für die vorletzte Summe in (2.7) gilt

$$\sum_{p\leq\sqrt{x}}\frac{\log p}{p(p-1)} = \sum_{p=2}^{\infty}\frac{\log p}{p(p-1)} - \sum_{p>\sqrt{x}}^{\infty}\frac{\log p}{p(p-1)}.$$

Der Reihenrest lässt sich mittels partieller Summation folgendermaßen umformen (siehe [1] für die allgemeine Formel der partiellen Summation):

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{x}<p\leq z}\frac{\log p}{p(p-1)} &= \frac{\vartheta(z)}{z(z-1)} - \frac{\vartheta(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \int_{\sqrt{x}}^{z}\frac{\vartheta(t)(1-2t)}{t^2(t-1)^2}\,dt \\ &< \frac{\vartheta(z)}{z(z-1)} + \int_{\sqrt{x}}^{z}\frac{2t\vartheta(t)}{t^2(t-1)^2}\,dt = O\Big(\int_{\sqrt{x}}^{z}\frac{1}{t^2}\,dt\Big),\end{aligned}$$

und $z \to \infty$ liefert somit

$$\sum_{p>\sqrt{x}}^{\infty}\frac{\log p}{p(p-1)} = O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big).$$

Für die Doppelsumme (2.6) haben wir also insgesamt, da alle auftretenden Fehler von der Ordnung $\sqrt{x}$ sind,

$$\sum_{p\leq\sqrt{x}}\sum_{m=2}^{\lfloor\log_p x\rfloor}\Big\lfloor\frac{x}{p^m}\Big\rfloor\log p = x\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log p}{p(p-1)} + O(\sqrt{x})$$

für $x \geq 1$. Aus (2.3) in Verbindung mit (2.4) und (2.5) folgt somit

$$\log\lfloor x\rfloor! = \sum_{p\leq x}\Big\lfloor\frac{x}{p}\Big\rfloor\log p + x\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log p}{p(p-1)} + O(\sqrt{x})$$

für $x \geq 1$ und daraus unmittelbar die Behauptung, wenn man beachtet, dass nach Stirling die Identität $\log\lfloor x\rfloor! = x\log x - x + O(\log x)$ für $x \geq 2$ gilt (siehe [1]). ∎

Aus Lemma 2.1 folgt nun sofort die erste der beiden in der Einleitung angekündigten Darstellungen von τ, und zwar eine Verfeinerung des ersten Satzes von Mertens.

Lemma 2.2. *Für $x \geq 2$ gilt*

$$\tau(x) = G(x)\log x - C_1 + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big), \tag{2.8}$$

wobei

$$G(x) = \frac{1}{x}\sum_{p\leq x}\Big\{\frac{x}{p}\Big\}. \tag{2.9}$$

Beweis. Wegen $\lfloor x\rfloor = x - \{x\}$ folgt aus (2.1):

$$\tau(x) = \frac{1}{x}\sum_{p\leq x}\Big\{\frac{x}{p}\Big\}\log p - C_1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big).$$

Die Summe auf der rechten Seite können wir mittels partieller Summation wie folgt umformen. Für ein beliebiges festes x_0 hat man zunächst

$$\sum_{p\leq x}\Big\{\frac{x_0}{p}\Big\}\log p = \log(x)\sum_{p\leq x}\Big\{\frac{x_0}{p}\Big\} - \int_2^x \frac{\sum_{p\leq t}\big\{\frac{x_0}{p}\big\}}{t}\,dt.$$

Diese Gleichung bleibt gültig, wenn man x_0 durch x ersetzt, da es ja keine Einschränkungen bezüglich x_0 gibt. Dieses Argument lässt sich nun aber noch strenger fassen. Partielle Summation ergibt nämlich auch auf die folgende, wenngleich weniger offensichtliche Weise:

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq x}\Big\{\frac{x}{p}\Big\}(\log x - \log p) &= \sum_{p\leq x}\Big\{\frac{x}{p}\Big\}\int_p^x \frac{ds}{s} = \sum_{1<n\leq x}\Big(\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n)\Big\{\frac{x}{n}\Big\}\Big)\int_n^x \frac{ds}{s}\\ &= \int_2^x \frac{1}{t}\sum_{p\leq t}\Big\{\frac{x}{p}\Big\}\,dt\end{aligned}$$

wegen $\frac{d}{dt}\int_t^x \frac{ds}{s} = -\frac{1}{t}$, wobei $\mathbf{1}_{\mathbb{P}}$ die Indikatorfunktion der Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen ist.[1] Für das Integral gilt die Abschätzung

$$\int_2^x \frac{1}{t}\sum_{p\leq t}\Big\{\frac{x}{p}\Big\}\,dt < \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt = O\Big(\int_2^x \frac{dt}{\log t}\Big) = O(\mathrm{Li}(x)) = O\Big(\frac{x}{\log x}\Big)$$

für $x \geq 2$, wobei die sowohl für $\pi(x)$ als auch für den Integrallogarithmus $\mathrm{Li}(x)$ gültige Abschätzung $O(x/\log x)$ für $x \geq 2$ benutzt wurde, und die Behauptung folgt nach Division durch x. ∎

[1] Mitteilung durch F. Pillichshammer (Linz, Österreich)

Lemma 2.2 stellt noch keine wirkliche Verschärfung des ersten Satzes von Mertens dar, weil wir bislang nur wissen, dass $G(x)\log x = O(1)$. Dennoch erlaubt es uns, einen tieferliegenden Zusammenhang zwischen den beiden Sätzen von Mertens aufzudecken.

Um die zweite Darstellung von τ zu erhalten, wird der zweite Satz von Mertens nur in der folgenden, einfacheren Form als der von Mertens angegebenen benötigt, in welcher die Konstante γ noch unbestimmt ist und die leicht mittels partieller Summation aus dem ersten Satz von Mertens folgt (siehe [1,6]): Für $x \geq 2$ gilt

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + M + E(x), \tag{2.10}$$

wobei $M = 1 - \log\log 2 + E_2(2)$ und $E(x) = E_1(x) - E_2(x)$ mit

$$E_1(x) = \frac{\tau(x)}{\log x}, \quad E_2(x) = \int_x^\infty \frac{\tau(t)}{t\log^2 t}\,dt. \tag{2.11}$$

Die Zerlegung des Fehlers $E(x)$ in zwei Teile wird sich im Folgenden als zweckmäßig erweisen.

Aus (2.10) folgt unmittelbar

$$\frac{1}{x}\sum_{p\leq x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor = \log\log x + M + F(x)$$

für $x \geq 2$, wobei mit Rücksicht auf (2.9) gilt:

$$F(x) = E(x) - G(x). \tag{2.12}$$

Die angekündigte zweite Darstellung von τ lautet nun in ihrer allgemeinsten Form wie folgt.

Lemma 2.3. *Für $x \geq 2$ gilt*

$$\tau(x) = E(x)\log x - \int_2^x \frac{E(t)}{t}\,dt + E_2(2)\log 2. \tag{2.13}$$

Beweis. Durch partielle Summation erhalten wir zunächst

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} = \log(x)\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} - \int_2^x \frac{\sum_{p\leq t} 1/p}{t}\,dt.$$

Nach dem zweiten Satz von Mertens (2.10) gelten

$$\log(x)\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \log(x)(\log\log x + M + E(x))$$

und (man darf in das Integral einsetzen wegen der Gültigkeit für $x \geq 2$)

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{\sum_{p\leq t} 1/p}{t}\,dt &= \int_2^x \frac{\log\log t + M + E(t)}{t}\,dt \\ &= [\log(t)(\log\log t - 1)]_2^x + [M\log t]_2^x + \int_2^x \frac{E(t)}{t}\,dt \\ &= \log(x)(\log\log x + M) - \log x - E_2(2)\log 2 + \int_2^x \frac{E(t)}{t}\,dt. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Da E keine stetig differenzierbare Funktion ist, können wir in (2.13) die Formel für die partielle Integration nicht anwenden. Daher werden wir uns von nun an auf natürliche Zahlen beschränken, was hinsichtlich der Konvergenz von τ keine Einschränkung darstellt.

Der besseren Übersichtlichkeit wird im Folgenden der Differenzenoperator $\Delta[f](n) = f(n) - f(n-1)$ verwendet, wofür aber nur kurz $\Delta f(n)$ geschrieben wird. Außerdem wird eine Variante der partiellen Summation benutzt, die in dieser Form vielleicht nicht jedem geläufig ist und daher als Lemma formuliert werden soll.

Lemma 2.4. *Es seien f eine integrierbare und g eine stetig differenzierbare Funktion. Für $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$, gilt dann*

$$\sum_{k=m+1}^{n} \Delta f(k) g(k) = f(n)g(n) - f(m)g(m) - \int_m^n f(\lfloor t \rfloor) g'(t)\, dt.$$

Anmerkung. Hierbei steht $\Delta f(k)g(k)$ für $(\Delta f(k))g(k)$ und *nicht* $\Delta(f(k)g(k))$.

Beweis. Aus

$$\big(f(k) - f(k-1)\big)g(k) = f(k)g(k) - f(k-1)g(k-1) - \int_{k-1}^{k} f(\lfloor t \rfloor) g'(t)\, dt$$

folgt durch Summation von $k = m+1$ bis $k = n$ unmittelbar die Behauptung. ∎

Damit können wir τ die folgende Gestalt geben.

Lemma 2.5. *Für $n \geq 3$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt*

$$\tau(n) = \sum_{k=3}^{n} \Delta E(k) \log k + C_2 + O\Big(\frac{1}{n}\Big), \tag{2.14}$$

wobei $C_2 = \int_2^\infty \frac{E(\lfloor t \rfloor) - E(t)}{t}\, dt + \tau(2)$.

Beweis. Partielle Summation mittels Lemma 2.4 ergibt zunächst

$$\sum_{k=3}^{n} \Delta E(k) \log k = E(n) \log n - E(2) \log 2 - \int_2^n \frac{E(\lfloor t \rfloor)}{t}\, dt.$$

Aus (2.13) mit $x = n$ folgt nun sofort

$$\tau(n) = \sum_{k=3}^{n} \Delta E(k) \log k + \int_2^n \frac{E(\lfloor t \rfloor) - E(t)}{t}\, dt + E(2) \log 2 + E_2(2) \log 2.$$

Die beiden letzten Terme lassen sich gemäß (2.11) zu $\tau(2)$ zusammenfassen. Um die Konvergenz des Integrals auf der rechten Seite nachzuweisen, beachte man, dass nach Definition von E gilt:

$$E(\lfloor t \rfloor) - E(t) = \log\log t - \log\log\lfloor t \rfloor < \log\log(\lfloor t \rfloor + 1) - \log\log\lfloor t \rfloor = O\Big(\frac{1}{t \log t}\Big),$$

wobei die letzte Abschätzung etwa aus der leicht durch die Eulersche Summenformel beweisbaren Identität $\sum_{k \leq x} 1/(k \log k) = \log\log x + A + O(1/(x \log x))$ für $x \geq 2$ (A konstant) folgt. Der Fehler $\int_n^\infty (E(\lfloor t \rfloor) - E(t))/t\, dt = O\big(\int_n^\infty dt/(t^2 \log t)\big)$ ließe sich natürlich noch genauer als durch $O(1/n)$ abschätzen, was jedoch für das Folgende irrelevant ist. ∎

Durch Kombination der Darstellungen (2.8) und (2.14) lässt sich nun das folgende Resultat gewinnen.

Lemma 2.6. *Für $n \geq 3$ gilt*

$$\int_3^n \frac{G(\lfloor t \rfloor)}{t}\,dt = \sum_{k=3}^{n} \Delta F(k) \log k + C_3 + O\Big(\frac{1}{\log n}\Big), \tag{2.15}$$

wobei $C_3 = C_1 + C_2$.

Beweis. Partielle Summation ergibt

$$\sum_{k=3}^{n} \Delta G(k) \log k = G(n) \log n - \int_3^n \frac{G(\lfloor t \rfloor)}{t}\,dt$$

wegen $G(2) = 0$, und nach Definition von F in (2.12) gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} \Delta F(k) \log k &= \sum_{k=3}^{n} \Delta E(k) \log k - \sum_{k=3}^{n} \Delta G(k) \log k \\ &= \Big(\tau(n) - C_2 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) - \Big(G(n) \log n - \int_3^n \frac{G(\lfloor t \rfloor)}{t}\,dt\Big) \\ &= \int_3^n \frac{G(\lfloor t \rfloor)}{t}\,dt - C_1 - C_2 + O\Big(\frac{1}{\log n}\Big),\end{aligned}$$

wobei von (2.14) und (2.8) Gebrauch gemacht wurde. ∎

3 Der Hauptsatz

Lemma 2.6 erlaubt es uns nun, das Hauptergebnis unserer Untersuchung zu beweisen.

Satz 3.1. *$\tau(x)$ ist konvergent für $x \to \infty$.*

Beweis. Es genügt, die Konvergenz der Folge $\tau(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ nachzuweisen. Man betrachte die Identität (2.15). Das Integral auf der linken Seite ist offenbar monoton wachsend, da der Integrand nicht-negativ ist. Genau genommen gilt sogar strenge Monotonie, da $G(n) > 0$ für $n \geq 3$; dies folgt etwa aus dem Satz von Tschebyschow (siehe die Anmerkung zu Lemma 2.1), da n durch keine Primzahl echt größer $n/2$ teilbar ist.[2] Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden.

[2]Noch einfacher kann man es für hinreichend großes n einsehen, wenn man beachtet, dass nach dem ersten Satz von Mertens beliebig viele Primzahlen zwischen $\sqrt{n}$ und n existieren müssen wegen

$$\sum_{\sqrt{n} < p \leq n} \frac{\log(p)}{p} = \log n + O(1),$$

und n durch höchstens eine dieser Primzahlen teilbar ist.

Fall 1. Ist das Integral beschränkt, so konvergiert es gemäß dem Satz von Bolzano-Weierstraß für wachsendes n gegen einen endlichen Grenzwert. In diesem Fall ist notwendigerweise der Zähler des Integranden für hinreichend großes n von der Ordnung $o(1/\log n)$ und $\tau(n)$ nach (2.8) konvergent.

Fall 2. Ist das Integral unbeschränkt, so muss es auch die Summe auf der rechten Seite von (2.15) sein. Wegen

$$\sum_{k=3}^{n} \Delta E(k) \log k = \sum_{k=3}^{n} \Delta F(k) \log k + \sum_{k=3}^{n} \Delta G(k) \log k \tag{3.1}$$

(siehe den Beweis von Lemma 2.6) erkennt man weiter, dass bei Unbeschränktheit bzw. Divergenz gegen $+\infty$ der ersten Summe auf der rechten Seite die zweite divergent gegen $-\infty$ sein muss, da ja die Summe auf der linken Seite wegen (2.14) und der Beschränktheit von $\tau(n)$ (nach dem ersten Satz von Mertens) beschränkt ist. Aufgrund der gleichen Struktur dieser Summen müssen also $\Delta F(n)$ und $\Delta G(n)$ für hinreichend großes n dem Betrage nach von der gleichen Größenordnung sein.

Es soll im Folgenden, und dies ist die entscheidende Idee des Beweises, darum gehen, $\Delta E(n)$ mit Hilfe von $\Delta F(n)$ abzuschätzen. Im Fall $\Delta E(n) = 0$ ist nichts zu beweisen, es sei also angenommen, dass $\Delta E(n) \neq 0$. Da nach Definition von F gemäß (2.12) auch $\Delta E(n) = \Delta F(n) + \Delta G(n)$ gilt, können $\Delta F(n)$ und $\Delta G(n)$ nicht beide gleichzeitig Null sein. Im Fall $\Delta F(n) = 0$ können wir also $\Delta E(n)$ mit Hilfe von $\Delta G(n)$ abschätzen. Da $\Delta F(n)$ und $\Delta G(n)$ zufolge (3.1) für hinreichend großes n dem Betrage nach von der gleichen Größenordnung sind, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass auch $\Delta F(n) \neq 0$.

Setzt man $a(k) = \Delta E(k) \log k$ und $b(k) = \Delta F(k)/\Delta E(k)$ für $k = 3, \ldots, n$, so erhält die Summe auf der rechten Seite von (2.15) die Form $\sum_{k=3}^{n} a(k)b(k)$. Nun ist offenbar nach unserer Voraussetzung $b(n)$ dem Betrage nach für wachsendes n eine unbeschränkte Folge. Denn wäre $b(n)$ beschränkt, d. h. $|b(n)| \leq C$ (wobei $C > 0$), so würde weiter nach Definition von F gelten:

$$\frac{1}{C} \leq \left| 1 + \frac{\Delta G(n)}{\Delta F(n)} \right|.$$

Dies steht aber in Widerspruch zu Gleichung (3.1), wonach -1 Häufungspunkt der Folge $\Delta G(n)/\Delta F(n)$ sein muss, da ja die beiden Summen auf der rechten Seite asymptotisch proportional mit Faktor -1 sind.

Aus der Unbeschränktheit von $b(n)$ folgt

$$\frac{1}{b(n)} = \frac{\Delta E(n)}{\Delta F(n)} = o(1) \quad \text{für } n \to \infty. \tag{3.2}$$

Es kommt jetzt darauf an, $\Delta F(n)$ abzuschätzen. Dies gelingt in einfacher Weise mit Hilfe der Identität (2.15). Man beachte zunächst, dass

$$\int_{k-1}^{k} \frac{G(\lfloor t \rfloor)}{t}\, dt = G(k-1) \Delta \log k.$$

Gibt man nun der Summe in (2.15) die Form

$$\sum_{k=3}^{n} \Delta F(k) \log k = \sum_{k=4}^{n} c(k) \int_{k-1}^{k} \frac{G(\lfloor t \rfloor)}{t} \, dt,$$

wobei $c(k) = (\Delta F(k) \log k)/(G(k-1)\Delta \log k)$ (wegen $G(k-1) > 0$ ist $c(k)$ wohldefiniert), so muss gemäß (2.15) offensichtlich $c(n) \to 1$ für $n \to \infty$ gelten. Mit anderen Worten, $\Delta F(n) \log n$ und $G(n-1)\Delta \log n$ sind asymptotisch gleich, und wir erhalten insbesondere

$$\Delta F(n) = O\Big(\frac{G(n-1)\Delta \log n}{\log n}\Big) = O\Big(\frac{1}{n \log^2 n}\Big)$$

für hinreichend großes n.

In Verbindung mit (3.2) ergibt sich somit

$$\Delta E(n) = o(|\Delta F(n)|) = o\Big(\frac{1}{n \log^2 n}\Big) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass dann $E(n) = o(1/\log n)$ für $n \to \infty$ gelten muss. Für ein hinreichend großes n_0 haben wir

$$\begin{aligned} |E(n) - E(n_0)| = \Big| \sum_{k=n_0+1}^{n} \Delta E(k) \Big| &\le \sum_{k=n_0+1}^{n} |\Delta E(k)| < \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\varepsilon(k)}{k \log^2 k} \\ &= \Big| \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{\varepsilon(k)}{k \log^2 k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon(k)}{k \log^2 k} \Big|, \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon(n) = o(1)$ für $n \to \infty$; mit anderen Worten, der Abstand zwischen $E(n)$ und $E(n_0)$ ist kleiner als derjenige zwischen den beiden letzten Ausdrücken, von denen der eine wie auch $E(n_0)$ konstant ist. Sei nun $M(n) = \sup\{\varepsilon(k) \mid k > n\}$. Damit gilt nach der Eulerschen Summenformel

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon(k)}{k \log^2 k} \le M(n) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k \log^2 k} &= M(n) O\Big(\int_{n+1}^{\infty} \frac{dt}{t \log^2 t}\Big) \\ &= M(n) O\Big(\frac{1}{\log n}\Big) = o\Big(\frac{1}{\log n}\Big) \end{aligned}$$

wegen $M(n) = o(1)$, und es folgt

$$E(n) = o\Big(\frac{1}{\log n}\Big) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Daraus ergibt sich nun sofort die Konvergenz von $\tau(n)$. Denn mit Rücksicht auf die in (2.11) definierte Zerlegung von $E(n)$ haben wir

$$\tau(n) = E_1(n) \log n = E_2(n) \log n + E(n) \log n = E_2(n) \log n + o(1) \tag{3.3}$$

für $n \to \infty$, wonach für hinreichend große m, n und beliebiges $\varepsilon > 0$ gemäß dem Cauchyschen Konvergenzprinzip

$$|\tau(n) - \tau(m)| \leq |\tau(n) - E_2(n)\log n| + |E_2(n)\log n - \tau(m)| < \varepsilon$$

gilt und somit die Behauptung folgt. ■

Anmerkung. Es wäre von Interesse zu wissen, welcher der beiden Fälle im vorstehenden Beweis tatsächlich vorliegt. Es wird sich im nächsten Abschnitt herausstellen, dass dies der zweite Fall ist (Lemma 4.2).

Die wichtigste Folgerung von Satz 3.1 ist das folgende Resultat.

Korollar 3.2 (Primzahlsatz).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Beweis. Eine Möglichkeit besteht darin, $\pi(x)$ die Form $\pi(x) = \sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} \frac{p}{\log p}$ zu geben und diese Darstellung mittels partieller Summation umzuformen.

Etwas einfacher wird die Rechnung jedoch, wenn man auf folgende Weise vorgeht. Zunächst folgt aus der Relation (3.3), dass die Konvergenz von τ und $E(x) = o(1/\log x)$ äquivalente Aussagen sind. Durch partielle Summation und anschließendes Einsetzen des zweiten Satzes von Mertens (2.10) erhält man für hinreichend großes x:

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= x \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} - \int_2^x \sum_{p\leq t} \frac{1}{p}\, dt \\
&= x\big(\log\log x + B_1 + E(x)\big) - \int_2^x \big(\log\log t + B_1 + E(t)\big)\, dt \\
&= \mathrm{Li}(x) + o(\mathrm{Li}(x)),
\end{aligned}$$

wonach wegen $\mathrm{Li}(x) \sim x/\log x$ (für $x \to \infty$) die Behauptung unmittelbar ersichtlich ist. ■

4 Bestimmung des Grenzwerts von τ

Der Primzahlsatz erlaubt es uns nun, auch den Grenzwert von τ vollständig zu bestimmen, welchen wir nach Lemma 2.2 bislang nur teilweise kennen. Es läuft also auf die Bestimmung des Grenzwerts von $G(x)\log x$ bzw. des Ausdrucks $1/x \sum_{p\leq x}\{x/p\}\log p$ (siehe den Beweis von Lemma 2.2) hinaus. Man kann diesen direkt bestimmen, indem man sich erneut das Lemma 2.1 zunutze macht. Hierzu benötigen wir die von Tschebyschow eingeführte Funktion $\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \log p$. Die Summe in Lemma 2.1 lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$\sum_{p\leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \log p = \sum_{n\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{n}\right). \tag{4.1}$$

Denn für jedes $p \leq x$ tritt $\log p$ genau in denjenigen Summen $\vartheta(x/n)$ als Summand auf, für die $p \leq x/n$ bzw. $n \leq x/p$ gilt, d. h., es gibt genau $\lfloor x/p \rfloor$ solche Summen.

Man beachte weiter, dass man dem Primzahlsatz auch die Form $\vartheta(x) \sim x$ bzw.

$$\vartheta(x) = x + xr(x) \tag{4.2}$$

für $x \geq 1$ geben kann, wobei $r(x) = o(1)$ für $x \to \infty$.

Zunächst genügt uns jedoch die elementare Abschätzung $\vartheta(x) = O(x)$ für $x \geq 1$, um die folgende Darstellung zu gewinnen.

Lemma 4.1. *Für $x \geq 1$ gilt*

$$\frac{1}{x}\sum_{p\leq x}\left\{\frac{x}{p}\right\}\log p = \frac{\vartheta(x)}{x} - \left(\frac{1}{x}\sum_{n\leq\sqrt{x}}\vartheta\left(\frac{x}{n}\right) - \int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\vartheta(t)}{t^2}\,dt\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right). \tag{4.3}$$

Beweis. Wegen $1/x\sum_{p\leq\sqrt{x}}\{x/p\}\log p < \vartheta(\sqrt{x})/x = O(1/\sqrt{x})$ hat man zunächst

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{p\leq x}\left\{\frac{x}{p}\right\}\log p &= \sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\frac{\log p}{p} - \frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\log p + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\\ &= \left(\frac{\vartheta(x)}{x} - \frac{\vartheta(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\vartheta(t)}{t^2}\,dt\right)\\ &\quad - \frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\log p + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\end{aligned}$$

wobei die erste Summe auf der rechten Seite mittels partieller Summation umgeformt wurde. Wir benötigen nun nur noch eine andere Darstellung der zweiten Summe. Die Primzahlzerlegung der Fakultät (2.2) lässt sich folgendermaßen verfeinern:

$$\lfloor x\rfloor! = \prod_{p\leq\sqrt{x}}p^{e_p}\prod_{\sqrt{x}<p\leq\frac{x}{\lfloor\sqrt{x}\rfloor}}p^{\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\prod_{n=1}^{\lfloor\sqrt{x}\rfloor-1}\prod_{\frac{x}{n+1}<p\leq\frac{x}{n}}p^n,$$

da $\lfloor x/p^m\rfloor = 0$ für $p > \sqrt{x}$ und $m \geq 2$, und wegen $\lfloor x/p\rfloor = n$ genau dann, wenn $x/(n+1) < p \leq x/n$; denn wenn $\lfloor x/p\rfloor = n$, dann gilt nach Definition der Ganzteilfunktion $n \leq x/p < n+1$, und die Umkehrung folgt leicht aus der Monotonie derselben.

Logarithmieren des Produkts ergibt

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\log p &= \lfloor\sqrt{x}\rfloor\left(\vartheta\left(\frac{x}{\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\right) - \vartheta(\sqrt{x})\right)\\ &\quad + \sum_{n=1}^{\lfloor\sqrt{x}\rfloor-1}n\left(\vartheta\left(\frac{x}{n}\right) - \vartheta\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\vartheta\left(\frac{x}{n}\right) - \lfloor\sqrt{x}\rfloor\vartheta(\sqrt{x}),\end{aligned} \tag{4.4}$$

und daraus folgt nach Division durch x wegen $\{x\}\vartheta(\sqrt{x})/x = O(1/\sqrt{x})$ die Behauptung. ∎

Lemma 4.2. *Für $x \to \infty$ gilt*

$$\frac{1}{x}\sum_{p\le x}\left\{\frac{x}{p}\right\}\log p = 1-\gamma+o(1).$$

Beweis. Aus (4.3) sowie dem Primzahlsatz (4.2) folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{n\le\sqrt{x}}\vartheta\Big(\frac{x}{n}\Big)-\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\vartheta(t)}{t^2}\,dt &= \frac{1}{x}\sum_{n\le\sqrt{x}}\Big(\frac{x}{n}+\frac{x}{n}r\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big)-\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t+tr(t)}{t^2}\,dt\\ &= \Big(\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{1}{n}-\log\sqrt{x}\Big)\\ &\quad+\Big(\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{r(x/n)}{n}-\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{r(t)}{t}\,dt\Big).\end{aligned}$$

Der Wert des Ausdrucks in der ersten Klammer ist wohlbekannt (siehe [1]). Was denjenigen in der zweiten betrifft, so beachte man, dass nach dem bisher Bewiesenen wegen

$$\tau(x)=\frac{\vartheta(x)}{x}+\int_1^x\frac{\vartheta(t)/t-1}{t}\,dt=\frac{\vartheta(x)}{x}+\int_1^x\frac{r(t)}{t}\,dt$$

auch das Integral konvergieren, mithin $\int_{\sqrt{x}}^{x} r(t)/t\,dt=o(1)$ für $x\to\infty$ gelten muss. Daraus folgt sofort auch die Konvergenz von $\sum_{n\le\sqrt{x}} r(x/n)/n$, und wir werden sogleich erkennen, dass diese Summe nur eine andere Darstellung von $\int_{\sqrt{x}}^{x} r(t)/t\,dt$ ist. Zunächst folgt aus (4.1) und (4.2) in Verbindung mit (2.1), dass einerseits

$$\sum_{n\le x}\frac{r(x/n)}{n}=-\gamma-C_1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\tag{4.5}$$

für $x\ge 2$. Indem wir andererseits die Summe in (2.1) in zwei Teile zerlegen, erhalten wir mittels (4.4) und partieller Summation:

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x}\Big\lfloor\frac{x}{p}\Big\rfloor\log p &= \sum_{p\le\sqrt{x}}\Big\lfloor\frac{x}{p}\Big\rfloor\log p+\sum_{\sqrt{x}<p\le x}\Big\lfloor\frac{x}{p}\Big\rfloor\log p\\ &= x\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{\log p}{p}+\sum_{n\le\sqrt{x}}\vartheta\Big(\frac{x}{n}\Big)-\lfloor\sqrt{x}\rfloor\vartheta(\sqrt{x})+O(\sqrt{x})\\ &= x\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\vartheta(t)}{t^2}\,dt+\sum_{n\le\sqrt{x}}\vartheta\Big(\frac{x}{n}\Big)+O(\sqrt{x}).\end{aligned}$$

Mit (4.2) und (2.1) folgt weiter

$$\int_1^{\sqrt{x}}\frac{r(t)}{t}\,dt+\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{r(x/n)}{n}=-\gamma-C_1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\tag{4.6}$$

für $x \geq 2$. Somit gilt nach (4.5) und (4.6):

$$\int_1^{\sqrt{x}} \frac{r(t)}{t}\,dt = \sum_{\sqrt{x}<n\leq x} \frac{r(x/n)}{n} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)$$

für $x \geq 2$, und es folgt $\sum_{n\leq\sqrt{x}} r(x/n)/n = o(1)$ für $x \to \infty$. ■

Aus Lemma 2.2 und Lemma 4.2 folgt schließlich die folgende Verschärfung des ersten Satzes von Mertens.

Satz 4.3. *Für $x \to \infty$ gilt*

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} = \log x - \gamma - \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p(p-1)} + o(1).$$

Literatur

[1] T. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer, New York, 1976.

[2] C.-J. de la Vallée Poussin, Recherches analytiques de la théorie des nombres premiers, I–III, *Ann. de la Soc. Sci. Bruxelles* **20** (1896), 183–256, 281–362, 363–397.

[3] C.-J. de la Vallée Poussin, Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques, *Ann. de la Soc. Sci. Bruxelles* **22** (1898), 84–90.

[4] P. Erdős, On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **35** (1949), 374–384.

[5] J. Hadamard, Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, *Bull. de la Soc. Math. de France* **24** (1896), 199–220.

[6] G. H. Hardy und E. M. Wright, *Einführung in die Zahlentheorie*, Oldenbourg, München, 1958.

[7] R. McNamara, A dynamical proof of the prime number theorem, *Hardy-Ramanujan J.* **44** (2021), 160–185.

[8] F. Mertens, Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, *J. Reine Angew. Math.* **78** (1874), 46–62.

[9] D. Newman, A simple proof of the prime number theorem, *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), 693–696.

[10] A. Selberg, An elementary proof of the prime-number theorem, *Ann. of Math. (2)* **50** (1949), 305–313.

[11] E. Trost, *Primzahlen*, Birkhäuser, Basel, 1953 (2. Aufl. 1968).

[12] P. L. Tschebyschow (Tchebychef), Mémoire sur les nombres premiers, in: *Œuvres. Vol. 1*, herausgegeben von A. Markoff und N. Sonin, Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences, St. Petersburg (1899), 51–70.

Daniel Fritze
Wedellstraße 45, 12249 Berlin, Germany
daniel.fritze@t-online.de