
Short note Eine besondere Lage dreier Kegelschnitte bei speziellen Sechsecken

Klaus Bickel

Zusammenfassung. Die Seiten eines Sechsecks, dessen Diagonalen sich in einem Punkt schneiden, legen zwei Kegelschnitte fest: einen durch die Schnittpunkte von Seiten, die weder benachbart noch gegenüberliegend sind, und einen zweiten, den alle Seiten berühren. Liegen jetzt zudem noch die Ecken des Sechsecks auf einem Kegelschnitt, so hat man ein Ensemble von drei Kegelschnitten, deren Mittelpunkte – sofern sie keine Parabeln sind – auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Ist nur ein Kegelschnitt eine Parabel, so ist die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der beiden anderen eine Nebenachse der Parabel. In vorliegender Note wird ein Beweis dieser Aussage geführt.

Schneiden sich zwei Geraden g_1, g_2 im Punkt S , so wird statt $\{S\} = g_1 \cap g_2$ kürzer $S = g_1 \cap g_2$ geschrieben. Werden Punkte durch Schnitt zweier Geraden festgelegt, so wird vorausgesetzt, dass diese nicht parallel liegen. Für zwei Dreiecke $\Delta P_1 P_2 P_3$ und $\Delta P_1^* P_2^* P_3^*$, die perspektiv zum Zentrum Z liegen, wird $\Delta P_1 P_2 P_3 \leftrightarrow_Z \Delta P_1^* P_2^* P_3^*$ geschrieben. Der Mittelpunkt einer Strecke PQ ist $m(P, Q)$.

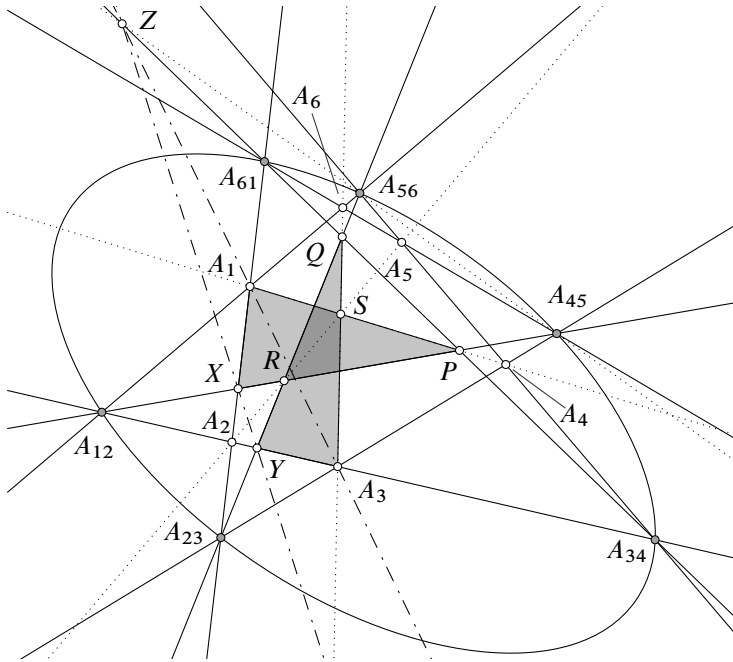
Ist $A_1 A_2 \dots A_6$ ein Sechseck, so werden die Punkte A_{ij} festgelegt durch

$$A_{12} := A_6 A_1 \cap A_2 A_3, \quad A_{23} := A_1 A_2 \cap A_3 A_4, \quad \dots, \quad A_{61} := A_5 A_6 \cap A_1 A_2.$$

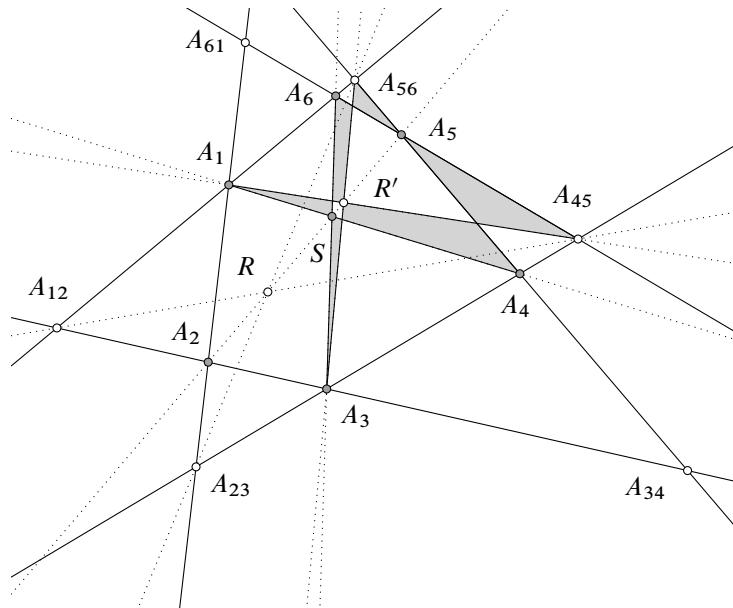
Satz 1. Die Punkte A_{ij} liegen genau dann auf einem Kegelschnitt, wenn die Diagonalen des Sechsecks $A_1 \dots A_6$ kopunktal sind.

In [3, S. 131/132] lautet die zweite Bedingung sinngemäß: Die Seiten des Sechsecks $A_1 \dots A_6$ berühren einen weiteren Kegelschnitt, was nach dem Satz von Brianchon [2, S. 144] zur Diagonalenbedingung von Satz 1 äquivalent ist. Die nachfolgende Begründung verwendet den Satz von Brianchon nicht.

Beweis. Liegen die Punkte A_{ij} auf einem Kegelschnitt, so sind die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks $A_{23} A_{61} A_{34} A_{56} A_{12} A_{45}$, das sind die Punkte $A_1 = A_{23} A_{61} \cap A_{56} A_{12}$, $P := A_{61} A_{34} \cap A_{12} A_{45}$, $A_4 = A_{34} A_{56} \cap A_{45} A_{23}$, nach dem Satz von Pascal kollinear [2, S. 142]. Entsprechendes gilt mit $Q := A_{23} A_{56} \cap A_{61} A_{34}$ und $R := A_{12} A_{45} \cap A_{23} A_{56}$ (Abbildung 1 (a)) für die Punkte A_3, Q, A_6 und A_2, R, A_5 . Eben solche kollinearen Punkte X, Y, Z bzw. A_1, A_3, Z findet man mit den Sechsecken $A_{12} A_{45} A_{56} A_{23} A_{61} A_{34}$ bzw. $A_{12} A_{56} A_{45} A_{23} A_{61} A_{34}$ und es folgt (siehe Abbildung 1 (a))



(a) \Rightarrow Voraussetzung: A_{ij} auf Kegelschnitt



(b) \Leftarrow Voraussetzung: Diagonalen von $A_1 \dots A_6$ sind kopunktal

Abbildung 1. Zum Beweis von Satz 1

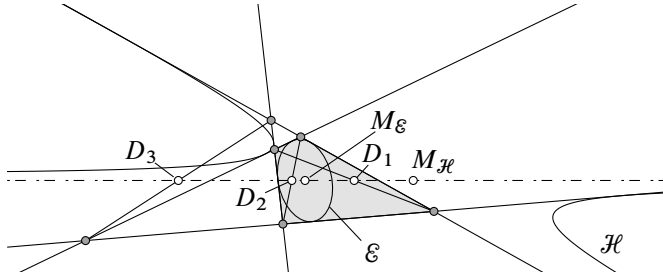


Abbildung 2. Zum Satz von Gauß-Newton: berührende Ellipse \mathcal{E} bzw. Hyperbel \mathcal{H} mit Mittelpunkten $M_{\mathcal{E}}$ bzw. $M_{\mathcal{H}}$ auf der Geraden der Diagonalmittelpunkte D_1, D_2, D_3

$\triangle XA_1P \leftrightarrow_Z \triangle YA_3Q$, und nach dem Satz von Desargues [2, S. 121] sind die Schnittpunkte R, S, A_2 entsprechender Seiten kollinear und somit $S \in A_2A_5$.

Schneiden sich umgekehrt die Diagonalen des Sechsecks $A_1 \dots A_6$ in einem Punkt S und ist $R := A_{12}A_{45} \cap A_{23}A_{56}$, $R' := A_1A_{45} \cap A_3A_{56}$ (Abbildung 1 (b)), so ergibt sich mit dem Sechseck $A_1A_4A_5A_6A_3A_6A_4A_5$ und dem Satz von Pappos [2, S. 59] zunächst $R' \in SA_5$ und mit dem Sechseck $A_1A_{23}A_{56}A_3A_{12}A_{45}$, dass $R \in R'A_2$ gilt, also sind R, A_2, A_5 kollinear. Dies sind die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten des Sechsecks $A_{12}A_{34}A_{56}A_{23}A_{61}A_{45}$ und mit dem Satz von Pascal folgt, dass die Punkte A_{ij} auf einem Kegelschnitt liegen. ■

Im folgenden schneiden sich die Diagonalen des Sechsecks $A_1 \dots A_6$ im Punkt S und die Ecken A_i liegen auf einem Kegelschnitt \mathcal{K} . Aus dem Satz von Brianchon und mit Satz 1 folgt, dass die Seiten des Sechsecks $A_1 \dots A_6$ einen „inneren“ Kegelschnitt \mathcal{K}_I berühren und die Punkte A_{ij} auf einem „äußeren“ Kegelschnitt \mathcal{K}_A liegen. Diese drei Kegelschnitte stehen in einem interessanten Zusammenhang, bei dessen Beweis der Satz von Gauß-Newton verwendet wird.

Satz 2 (Satz von Gauß-Newton). *Der Mittelpunkt einer Ellipse oder Hyperbel, welche die Seiten eines Vierecks berührt, liegt auf der Verbindungsgeraden der Diagonalmittelpunkte.*

Einen Beweis findet man in [1, S. 112–116], den geometrischen Sachverhalt gibt Abbildung 2 wieder.

Satz 3. *Ist keiner der Kegelschnitte $\mathcal{K}, \mathcal{K}_I$ und \mathcal{K}_A eine Parabel, so liegen ihre Mittelpunkte M, M_I und M_A kollinear. Ist genau ein Kegelschnitt eine Parabel, so liegen die Mittelpunkte der anderen Kegelschnitte auf derselben Nebenachse dieser Parabel.*

Beweis. Zunächst werden die Punkte $I_{12} := A_1A_2 \cap A_6A_3$, $I_{23} := A_2A_3 \cap A_1A_4, \dots, I_{61} := A_6A_1 \cap A_5A_2$ eingeführt (siehe Abbildung 3). Dann gilt:

$$I_{ij}A_{ij} \text{ ist Tangente an } \mathcal{K}_A \text{ mit Berührungspunkt } A_{ij}.$$

Zur Begründung wird der Satz von Pascal zunächst auf das Sechseck $A_2A_3A_4A_1A_6A_5$ angewendet. Die Schnittpunkte A_{12}, A_{45}, S der gegenüberliegenden Seiten sind demnach kollinear. Analog ist $S \in A_{23}A_{56}$: der Schnittpunkt der Diagonalen des Sechsecks

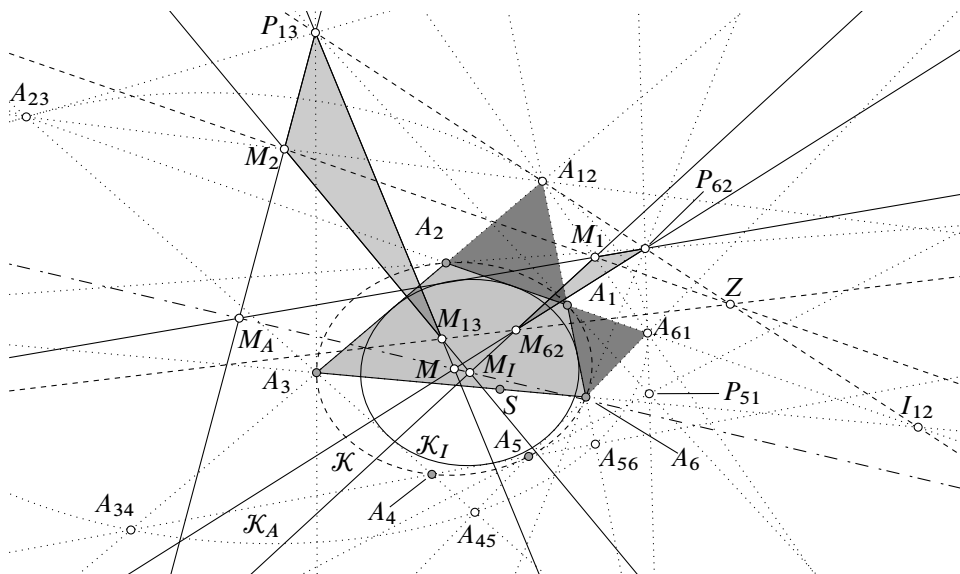


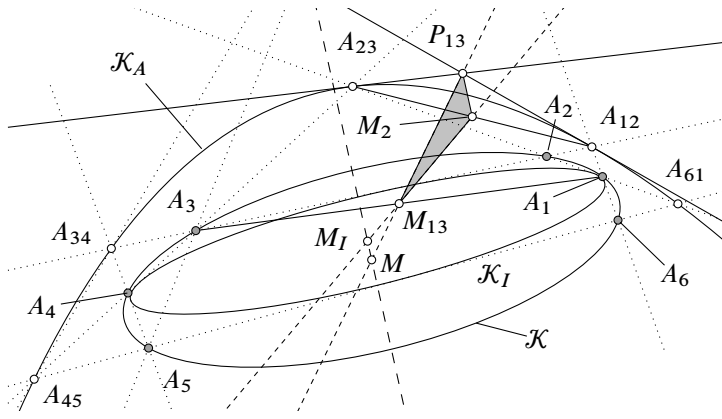
Abbildung 3. Kollinearität der Mittelpunkte

$A_{12}A_{23} \dots A_{61}$ ist also auch S . Ebenfalls mit dem Satz von Pascal und dem entarteten Sechseck $A_{61}A_{45}A_{12}A_{12}A_{56}A_{23}$ erhält man die drei kollinearen Punkte $A_6, S, I := A_{12}A_{12} \cap A_{23}A_{61}$, d. h., $I \in A_6S = A_6A_3$. Wegen $A_{23}A_{61} = A_1A_2$ ist auch $I \in A_1A_2$, also folgt $I = I_{12}$. Die Pole zu den Seiten $A_{12}A_{23}, A_{23}A_{34}, \dots, A_{61}A_{12}$ des Sechsecks $A_{12} \dots A_{61}$ bezüglich \mathcal{K}_A werden mit P_{ij} mit $j = i + 2$ ($1 \leq i \leq 4$), $j = i - 4$ ($i = 5, 6$) bezeichnet: $P_{13} := A_{12}I_{12} \cap A_{23}I_{23}$, $P_{24} := A_{23}I_{23} \cap A_{34}I_{34}$, \dots , $P_{62} := A_{61}I_{61} \cap A_{12}I_{12}$. Dann gilt:

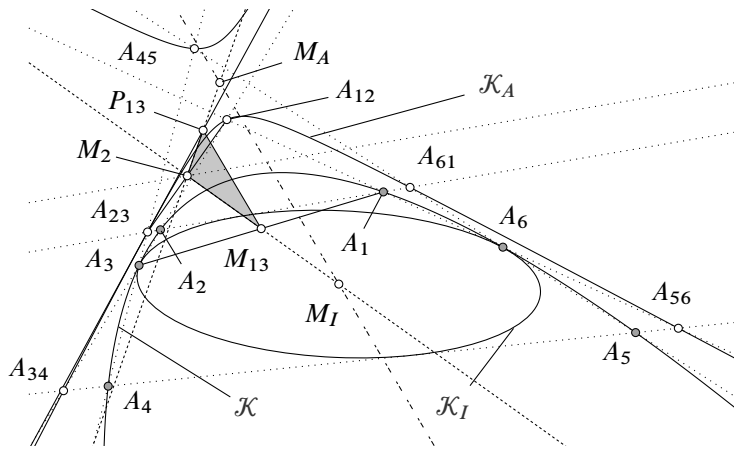
$$P_{ij} \text{ ist Pol zu } A_iA_j \text{ bezüglich } \mathcal{K}. \quad (1)$$

Ist nämlich P der Schnittpunkt der Tangenten an \mathcal{K} z. B. in A_1 bzw. A_3 , so folgt mit dem Satz von Pascal und dem entarteten Sechseck $A_4A_3A_3A_2A_1A_1$ die Kollinearität der Schnittpunkte A_{23}, P, I_{23} gegenüberliegender Seiten, und genauso für die Punkte P, A_{12}, I_{12} mit dem Sechseck $A_3A_3A_2A_1A_1A_6$. Also ist $P = I_{12}A_{12} \cap I_{23}A_{23}$ und somit $P = P_{13}$.

Ist nun zunächst kein Kegelschnitt eine Parabel und $M_1 = m(A_{61}, A_{12})$, so gilt $M_A \in P_{62}M_1$ und mit $M_{62} = m(A_6, A_2)$ ist $M \in P_{62}M_{62}$ wegen (1). Mit dem Tangentenviereck $A_2A_{61}A_6A_{12}$ von \mathcal{K}_I (dunkle „Fliege“ in Abbildung 3) folgt $M_I \in M_1M_{62}$ mit Satz 2. Analog findet man das Dreieck $\Delta P_{13}M_2M_{13}$ mit $M_A \in P_{13}M_2$, $M_I \in M_2M_{13}$, $M \in P_{13}M_{13}$. Der Punkt $Z := M_1M_2 \cap P_{62}P_{13}$ ist wegen des Strahlensatzes Mittelpunkt der Strecke $A_{12}I_{12}$, die auch Diagonale im Viereck $A_1A_2A_3A_6$ ist, dessen zwei andere Diagonalmittelpunkte M_{13} und M_{62} sind. Nach Satz 2 sind M_{13}, M_{62} und Z kollinear und es folgt $\Delta P_{62}M_1M_{62} \leftrightarrow_Z \Delta P_{13}M_2M_{13}$.



(a) $M_I M$ ist Nebenachse der Parabel \mathcal{K}_A



(b) $M_A M_I$ ist Nebenachse der Parabel \mathcal{K}

Abbildung 4. Die Parabelfälle

Ist \mathcal{K}_A oder \mathcal{K} eine Parabel, so kann man anhand Abbildung 4(a) und 4(b) sofort erkennen, dass es jeweils ein Paar sich entsprechender Seiten der Dreiecke $\Delta P_{62} M_1 M_{62}$ und $\Delta P_{13} M_2 M_{13}$ parallel zur Achse der jeweiligen Parabel gibt. Ist \mathcal{K}_I eine Parabel (Abbildung 4(c)) und werden die zur Festlegung der Punkte M_2 und M_{13} nötigen Punkte orthogonal auf die Leitgerade von \mathcal{K}_I projiziert mit Positionen x_i wie in Abbildung 4(d) dargestellt, insbesondere x_5 für M_2 , x_5^* für M_{13} , so gilt

$$\begin{aligned}
 4x_5 &= 2(x_4 + x_7) = (x_1 + x_6) + (x_3 + x_9) = (x_1 + x_3) + (x_6 + x_9) \\
 &= 2(x_2 + x_8) = 4x_5^*.
 \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich dann aus dem Satz von Desargues. ■

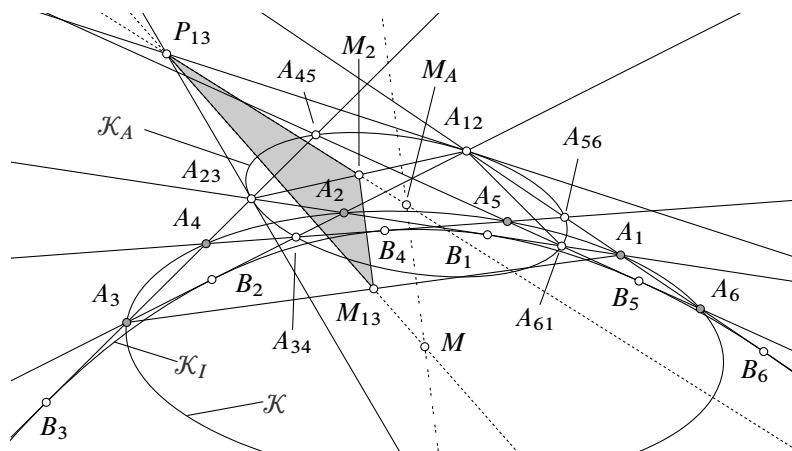
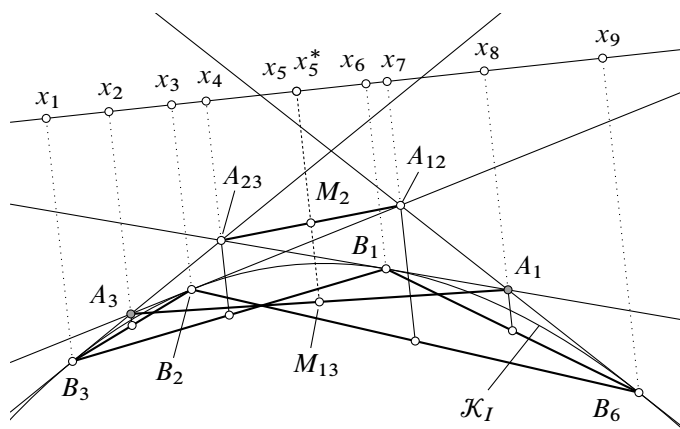
(c) $M_A M$ ist Nebenachse der Parabel \mathcal{K}_I (d) Senkrechte Projektionen auf die Leitgerade der Parabel \mathcal{K}_I

Abbildung 4. Die Parabelfälle

Literatur

- [1] C. F. Gauss. Bestimmung der größten Ellipse, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt. *Monatliche Correspondenz zur Förderung der Erd- und Himmelskunde* **22** (1810), 112–121.
- [2] L. Halbeisen, N. Hungerbühler und J. Lächl, *Mit harmonischen Verhältnissen zu Kegelschnitten*, Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 2016.
- [3] H. Schröter, *J. Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2. Teil*, B. G. Teubner, Leipzig, 1867.

Klaus Bickel
 Paula-Modersohn-Platz 7
 79100 Freiburg, Germany
bicmath@gmx.de