Elemente der Mathematik 80 (2025), 38–42
DOI 10.4171/EM/550

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2025 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Aufgabe 1455: Beweise, dass

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(x)\log(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{7}{16}\zeta(3) - \frac{\pi}{4}C,$$

wobei $C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ die Catalansche Konstante ist und leite daraus den Wert her des Integrals

$$J = \int_0^1 \frac{(\arctan(x))^2}{x}\,dx.$$

Raymond Mortini, Metz, F und Rudolf Rupp, Nürnberg, D

Aufgabe 1456: Seien a, b, c Vektoren des $\mathbb{R}^3$ mit $a'b \neq -1$ sowie

$$a \times (b \times c) = a + b + c.$$

Dabei bezeichne $a' = (a_1, a_2, a_3)$ den zu a transponierten Vektor und „$\times$“ das Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$. Man weise nach, dass c eine eindeutig bestimmte Linearkombination von a und b ist.

Götz Trenkler, Dortmund, D und Dietrich Trenkler, Osnabrück, D

Aufgabe 1457 (Die einfache dritte Aufgabe): Man gebe diejenige Ellipse an, die einem Rhombus eingeschrieben werden kann, und deren Fläche gleich der Fläche des Inkreises ist. Man gebe eine möglichst einfache Charakterisierung dieser Ellipse an.

Lajos László, Budapest, H

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2024

Aufgabe 1443. Man zeige, dass der Wert des Integrals

$$I = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\log(\frac{x+1}{x-1})}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$$

mit der Catalanschen Konstante C übereinstimmt.

Raymond Mortini, Metz, F

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 9 Lesern haben Beiträge zugesandt: Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Hansruedi Widmer (Baden, CH).

Fast alle Löser versuchen die gegebene Integraldarstellung in eine bekannte Integraldarstellung der Catalanschen Konstante umzuwandeln. Wir folgen den Ausführungen von *Kee-Wai Lau*, der auch noch die Reihendarstellung herleitet.

Durch die Substitution $x = \sin(\theta) + \cos(\theta)$ für $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, wegen

$$\big(\cos(\theta)+\sin(\theta)\big)^2 + \big(\cos(\theta)-\sin(\theta)\big)^2 = 2,$$
$$\frac{dx}{d\theta} = \cos(\theta) - \sin(\theta) = \sqrt{2-x^2}$$

erhält man

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{\sin(\theta)+\cos(\theta)+1}{\sin(\theta)+\cos(\theta)-1}\right) d\theta.$$

Wegen $\sin(\theta) = 2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})$, $\cos(\theta)+1 = 2\cos^2(\frac{\theta}{2})$ und $\cos(\theta)-1 = -2\sin^2(\frac{\theta}{2})$ erhält man weiter

$$\frac{\sin(\theta)+\cos(\theta)+1}{\sin(\theta)+\cos(\theta)-1} = \cot(\tfrac{\theta}{2})\frac{\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

Daher ist $I = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$ mit

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \log\big(\cot(\tfrac{\theta}{2})\big)\,d\theta \quad \text{und} \quad I_2 = \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2})}\right) d\theta.$$

In I_2 substituiert man $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ und wegen $\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\varphi}{2}) + \sin(\frac{\varphi}{2}))$ und $\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\varphi}{2}) - \sin(\frac{\varphi}{2}))$ erhält man

$$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \log\big(\cot(\tfrac{\varphi}{2})\big)\,d\varphi,$$

insgesamt also

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log\big(\cot(\tfrac{\theta}{2})\big)\,d\theta.$$

Durch die Substitution $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ mit $\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2}(1 + t^2)$ und partieller Integration erhält man weiter

$$I = -\int_0^1 \frac{\log(t)}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\,dt.$$

Für $0 < y < 1$ hat man

$$\int_0^y \frac{\arctan(t)}{t}\,dt = \int_0^y \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^y t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

und weiter mittels Abelschem Grenzwertsatz

$$I = \lim_{y \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = C.$$

Aufgabe 1444. Sei $A_1A_2A_3$ ein Dreieck und $B_1B_2B_3$ ein gleichseitiges Dreieck mit $B_i \in [A_{i+1}A_{i+2}]$ (alle Indizes modulo 3). Weiter seien die Winkel $\varepsilon_i = \sphericalangle(A_i B_{i+1} B_{i+2})$ und $\hat{\varepsilon}_i = \sphericalangle(A_i B_{i+2} B_{i+1})$. Man zeige, dass für das Dreieck $B_1B_2B_3$ mit kleinstem Flächeninhalt gilt:

(a) $\prod_{i=1}^{3} \cos(\varepsilon_i) = \prod_{i=1}^{3} \cos(\hat{\varepsilon}_i)$,

(b) $\sum_{i=1}^{3} \frac{\sin(\varepsilon_i - \hat{\varepsilon}_i)}{\sin(\varepsilon_i + \hat{\varepsilon}_i)} = 0$.

Hans Brandstetter, Wien, A

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind von folgenden 7 Lesern Lösungen eingetroffen: Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Lösungen unterscheiden sich hauptsächlich dadurch, ob die Aufgabe als Extremalproblem oder ob mit geometrischen Eigenschaften des minimalen einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks gearbeitet wurde. Mit letzterer Methode arbeitete auch *Gerhard Wanner*, dessen Lösung wir folgen, der die auftretenden trigonometrischen Ausdrücke auch geometrisch deuten konnte.

Wir hatten bereits ähnliche Aufgaben (Nr. 1334 und Nr. 1401). Schaut man in der Lösung von Nr. 1334 (Vol. 70, No. 4, S. 176) nach, so sieht man, dass sich die Orthogonalen zu den Seiten $A_{i+1}A_{i+2}$ in den Punkten B_i in einem gemeinsamen Punkt E treffen. (Falls sie sich nicht treffen, bilden sie ein nicht leeres Dreieck in dessen Innerem wir einen Drehpunkt E wählen können. Drehen wir nun das Dreieck B um diesen Punkt etwas nach links oder nach rechts, gehen alle drei Ecken aus dem Dreieck A heraus, wir hätten also nicht das kleinstmögliche.)

Die Strecken EB_i teilen die Winkel des Dreiecks B jeweils in $\eta_i = 90^\circ - \varepsilon_i$ und $\hat{\eta}_i = 90^\circ - \hat{\varepsilon}_i$ (siehe Abbildung 1). Sei $r_i = EB_i$ und $h_i = EC_i$, wobei C_i die Lotfusspunkte von E für das Dreieck B sind. Dann ist die erste Behauptung einfach

$$\prod_i \cos(\varepsilon_i) = \prod_i \sin(\eta_i) = \frac{h_1}{r_2}\frac{h_2}{r_3}\frac{h_3}{r_1} = \frac{h_1}{r_3}\frac{h_2}{r_1}\frac{h_3}{r_2} = \prod_i \sin(\hat{\eta}_i) = \prod_i \cos(\hat{\varepsilon}_i),$$

gültig für beliebige Dreiecke B, nicht nur gleichseitige.

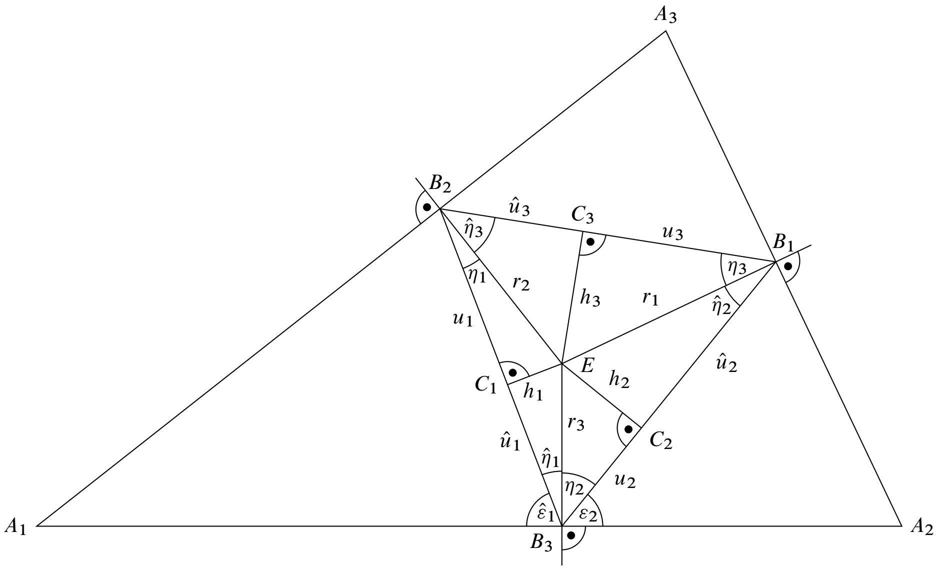


Abbildung 1

Für die zweite Formel, welche hingegen nur für gleichseitige Dreiecke gültig ist, benützen wir

$$\frac{\sin(\hat{\eta}_i - \eta_i)}{\sin(\hat{\eta}_i + \eta_i)} = \frac{u_i - \hat{u}_i}{u_i + \hat{u}_i}$$

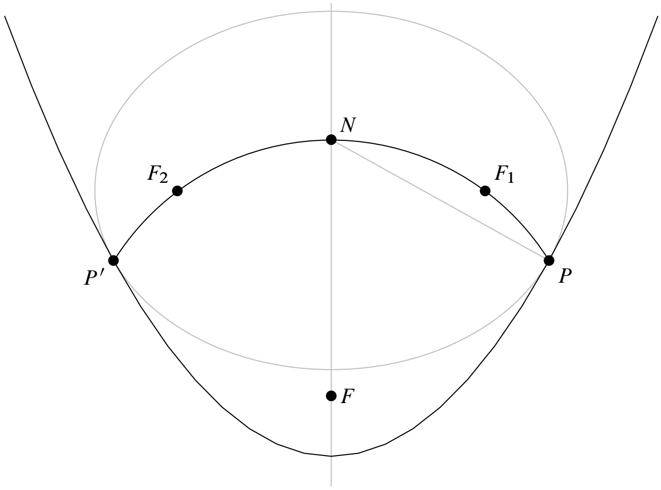
mit $u_i = B_{i+1}C_i$, $\hat{u}_i = C_i B_{i+2}$. Diese ist ähnlich dem Tangentensatz von Viète (1593, also gut 400 Jahre alt) und wird ähnlich bewiesen durch zweifache Anwendung des Sinussatzes. So erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{\sin(\varepsilon_i - \hat{\varepsilon}_i)}{\sin(\varepsilon_i + \hat{\varepsilon}_i)} &= \sum_i \frac{\sin(\hat{\eta}_i - \eta_i)}{\sin(\hat{\eta}_i + \eta_i)} = \sum_i \frac{u_i - \hat{u}_i}{u_i + \hat{u}_i} = \sum_i \frac{u_i - \hat{u}_i}{b} \\ &= \sum_i \frac{u_i^2 - \hat{u}_i^2}{b^2} = \sum_i \frac{r_{i+1}^2 - r_{i+2}^2}{b^2} = 0\end{aligned}$$

mit Dreiecksseite b des Dreiecks B, wie man mit Pythagoras unschwer feststellen kann.

Aufgabe 1445 (Die einfache dritte Aufgabe). Sei P ein vom Scheitelpunkt verschiedener Punkt auf einer Parabel und P' der dazu symmetrische Punkt bezüglich der Parabelachse. Man betrachte alle Ellipsen E, die die Parabel in P und P' berühren und deren Hauptachse senkrecht zur Parabelachse ist. Man bestimme den geometrischen Ort aller Brennpunkte von E.

Lajos László, Budapest, H



Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 15 Lesern sind Lösungen eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Oliver Gloor (Zürich, CH), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser gehen analytisch vor und kommen ohne Schwierigkeiten zum Ziel. *Bernhard Ruh*, dessen Lösung wir folgen, findet einen eleganten Weg, die Lösung geometrisch mithilfe der Ellipseneigenschaft zu charakterisieren.

Bezeichnet N den Schnittpunkt der Parabelnormalen in P mit der Parabelachse, so entspricht der gesuchte geometrische Ort dem Kreisbogen PNP' (interessant, aber nicht relevant: der Mittelpunkt dieses Bogens ist der Brennpunkt F der Parabel). Denn genau wenn die Ellipsenbrennpunkte auf diesem Bogen liegen, sind die Winkel $\sphericalangle F_1PN$ und $\sphericalangle F_2PN$ identisch, da sie Peripheriewinkel über gleich langen Sehnen sind. Die Parabelnormale PN ist also Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle F_1PF_2$, was bekanntermassen eine Eigenschaft der Ellipsennormale ist. Die Gerade PN ist also auch Ellipsennormale und somit ist die Parabeltangente in P auch Ellipsentangente.