Elemente der Mathematik 80 (2025), 84–88
DOI 10.4171/EM/559

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2025 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Aufgabe 1458: Sei P der erste Brocard-Punkt des Dreiecks ABC, d. h., P ist der Punkt im Innern des Dreiecks so, dass $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA = \omega$. Weiter seien R_a, R_b und R_c die Umkreisradien der Dreiecke PBC, PCA und PAB. Schliesslich seien r und R die In- und Umkreisradien des Dreiecks ABC. Man beweise, dass

$$\frac{3}{R} \leq \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \leq \frac{3}{2r}.$$

Yun Zhang, Xi'an, CHN

Aufgabe 1459: Sei f eine reellwertige mindestens fünfmal stetig differenzierbare Funktion über dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ so, dass $f(a) = f(b)$ und $f(\frac{a+3b}{4}) = f(\frac{3a+b}{4})$. Zeige, dass

$$\left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{(b-a)^6}{184\,320} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(5)}(x)|,$$

wobei $f^{(5)}$ die fünfte Ableitung von f ist.

Cezar Lupu, Beijing, CHN und Tudorel Lupu, Constanta, RO

Aufgabe 1460 (Die einfache dritte Aufgabe): Für Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$ gilt allgemein der Multiplikationssatz $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ für die Determinanten. Man zeige, dass für 2×2-Matrizen genau dann ein Additionssatz $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ gilt, wenn die Spuren den Multiplikationssatz $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(A) \cdot \mathrm{Spur}(B)$ erfüllen.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2024

Aufgabe 1446. Sei ABC ein beliebiges Dreieck und P ein beliebiger Punkt in der Dreiecksebene. Seien weiter w_α, w_β, w_γ die Längen der Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC. Man zeige

$$\frac{w_\alpha \cdot PA}{w_\beta \cdot w_\gamma} + \frac{w_\beta \cdot PB}{w_\gamma \cdot w_\alpha} + \frac{w_\gamma \cdot PC}{w_\alpha \cdot w_\beta} \geq 2.$$

Tran Quang Hung, Hanoi, VN

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 3 Beiträge von folgenden Lesern eingetroffen: Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Da keine vollständige Lösung eingegangen ist, folgen wir der Lösung des Aufgabenautors.

Man startet mit Koois Ungleichung

$$(x+y+z)^2 R^2 \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2,$$

wobei R der Umkreisradius und x, y, z beliebige reelle Zahlen sind. Gleichheit gilt genau dann, wenn $x : y : z = \sin(2\alpha) : \sin(2\beta) : \sin(2\gamma)$. Durch Anwendung des Sinussatzes erhält man die äquivalente Ungleichung

$$\frac{(x+y+z)^2}{4} \geq yz\sin^2(\alpha) + zx\sin^2(\beta) + xy\sin^2(\gamma).$$

Wendet man dies auf ein Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ an, so ergibt sich

$$\frac{(x+y+z)^2}{4} \geq yz\cos^2\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) + zx\cos^2\Big(\frac{\beta}{2}\Big) + xy\cos^2\Big(\frac{\gamma}{2}\Big),$$

mit Gleichheit genau, wenn $x : y : z = \sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma)$.

Wendet man weiter die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel auf die Seiten b und c an, so ergibt sich

$$w_\alpha = \frac{2bc\cos(\frac{\alpha}{2})}{b+c} \leq \sqrt{bc}\cos\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $b = c$. Durch Quadrieren und Multiplikation mit $yz \geq 0$ erhält man weiter

$$yzw_\alpha^2 \leq ybzc\cos^2\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)$$

und analog für die anderen Winkelhalbierenden. Durch Addition ergibt sich

$$\begin{aligned} yzw_\alpha^2 + zxw_\beta^2 + xyw_\gamma^2 &\leq ybzc\cos^2\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^2 + zcxa\cos^2\Big(\frac{\beta}{2}\Big) + xayb\cos^2\Big(\frac{\gamma}{2}\Big) \\ &\leq \frac{(xa+yb+zc)^2}{4}, \end{aligned}$$

wenn man noch Koois Ungleichung in der oben stehenden Form anwendet. Ersetzt man x durch xw_α^2, y durch yw_β^2 und z durch zw_γ^2 und zieht die Quadratwurzel auf beiden Seiten, so ergibt sich

$$2\sqrt{yz+zx+xy}\,w_\alpha w_\beta w_\gamma \le xaw_\alpha^2 + ybw_\beta^2 + zcw_\gamma^2$$

nach Multiplikation mit 2 und weiter

$$\frac{xaw_\alpha}{w_\beta w_\gamma} + \frac{ybw_\beta}{w_\gamma w_\alpha} + \frac{zcw_\gamma}{w_\alpha w_\beta} \ge 2\sqrt{yz+zx+xy}$$

nach Division durch $w_\alpha w_\beta w_\gamma$. Setzt man nun $x = \frac{PA}{a}$, $y = \frac{PB}{b}$ und $z = \frac{PC}{c}$, so ergibt sich

$$\frac{w_\alpha \cdot PA}{w_\beta \cdot w_\gamma} + \frac{w_\beta \cdot PB}{w_\gamma \cdot w_\alpha} + \frac{w_\gamma \cdot PC}{w_\alpha \cdot w_\beta} \ge 2\sqrt{\frac{PB \cdot PC}{bc} + \frac{PC \cdot PA}{ca} + \frac{PA \cdot PB}{ab}}.$$

Schliesslich folgt die Behauptung aus Hayashis Ungleichung

$$\frac{PB \cdot PC}{bc} + \frac{PC \cdot PA}{ca} + \frac{PA \cdot PB}{ab} \ge 1,$$

die für beliebige Punkte P in der Dreiecksebene gilt; mit Gleichheit nur, wenn P der Höhenschnittpunkt im spitzwinkligen Dreieck ABC oder einer der Eckpunkte ist. Aus dem Gesagten folgt, dass die Gleichheit in der Ungleichung der Aufgabenstellung nur für den Mittelpunkt im gleichseitigen Dreiecks gilt.

Aufgabe 1447. In memoriam Šefket Arslanagić. Man bestimme alle Zahlen, die sowohl in der Folge $(20 + 24\sqrt{2})^n$, $n \ge 0$, als auch in der Folge $(24 + 20\sqrt{2})^n$, $n \ge 0$, vorkommen.

Walther Janous, Innsbruck, A

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind insgesamt 13 Lösungen von folgenden Lesern eingegangen: Ulrich Abel (Friedberg, D), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Raymond Mortini (Metz, F) und Rudolf Rupp (Nürnberg, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Aufgabe ist nicht schwer, wenn man die richtige Vermutung hat, dass nur die Zahl 1 in beiden Folgen auftritt. Wenn man die Theorie der quadratischen Körpererweiterungen im Kopf hat, folgt die Lösung ziemlich elementar. Wir folgen exemplarisch den Ausführungen von *Wolfgang Seewald*.

Wir betrachten die quadratische Ringerweiterung $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$. Die Norm eines Ringelementes ist definiert als

$$\|a + b\sqrt{2}\| = (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2.$$

Die Norm ist multiplikativ, daher ist

$$\|(20 + 24\sqrt{2})^n\| = \|20 + 24\sqrt{2}\|^2 = (-752)^n = (-2^4 \cdot 47)^n$$

und

$$\|(24+20\sqrt{2})^m\| = \|24+20\sqrt{2}\|^m = (-224)^m = (-2^5\cdot 7)^m.$$

Da die Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen eindeutig ist, gibt es eine Übereinstimmung zwischen diesen Werten nur, falls $n = m = 0$. Die einzigen Zahl, die in beiden Folgen auftritt, ist daher die 1.

Aufgabe 1448 (Die einfache dritte Aufgabe). Für die Möndchen des Hippokrates über einem rechtwinkligen Dreieck wird beim Standardbeweis gezeigt, dass die Flächensumme der beiden Möndchen der Dreiecksfläche entspricht, ohne die einzelnen Flächeninhalte der Möndchen zu bestimmen. Gesucht ist eine möglichst einfache Zerlegung des rechtwinkligen Dreiecks in zwei Teilflächen so, dass diese je zu einem der beiden Möndchen flächengleich sind.

Raphael Muhr, Oberammergau, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind von folgenden 9 Lesern Zuschriften eingegangen: Oliver Gloor (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), André Kiener (Oberdorf SO, CH), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH) und Josef Züger (Bonaduz, CH).

Man könnte einen Teilpunkt auf der Hypotenuse so finden, dass dieser die Hypotenuse im Verhältnis der beiden Flächeninhalte der Möndchen teilt und das Dreieck lässt sich dann offensichtlich in zwei zu den Möndchen flächengleiche Teildreiecke unterteilen. Dieser Teilpunkt lässt sich aber im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren, wie *Roland Wyss* anmerkt.

Wir geben ausnahmsweise zwei Lösungen an. Die erste folgt fast direkt aus der Berechnung der Flächeninhalte der Möndchen. Wir folgen den Ausführungen von *André Kiener*.

Das rechtwinklige Dreieck wird in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit Katheten a und b aufgeteilt. Zwei dieser Dreiecke werden durch den Sektor mit Radius b und Winkel α geteilt, die beiden anderen durch den Sektor mit Radius a und Winkel $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (siehe Abbildung 1).

Für die schattierte Fläche im Dreieck gilt dann

$$\frac{1}{2}a^2\cdot 2\beta + ab - \frac{1}{2}b^2\cdot 2\alpha = \frac{1}{2}a^2\cdot\pi + ab - \frac{1}{2}(a^2+b^2)\cdot 2\alpha.$$

Der letzte Term entspricht der Fläche des Möndchens über der Kathete $2a$.

Die zweite Lösung von *Josef Züger* benutzt Ähnlichkeit und der Nachweis der Flächengleichheit ist elementar.

In der dargestellten Abbildung 2 sind alle Kreismittelpunkte Mittelpunkte von Dreiecksseiten. Die Bezeichnungen im Dreieck sind wie üblich gewählt. Insbesondere steht q für den Hypotenusenabschnitt der Seite a.

In der Abbildung sind drei Kreissegmente (weiss) ersichtlich, die dazugehörenden Seiten haben die Längen a, h und q. Die dazugehörenden Zentriwinkel sind gleich 2α. Somit sind die Kreissegmente zueinander ähnlich und die Flächeninhalte verhalten sich wie die

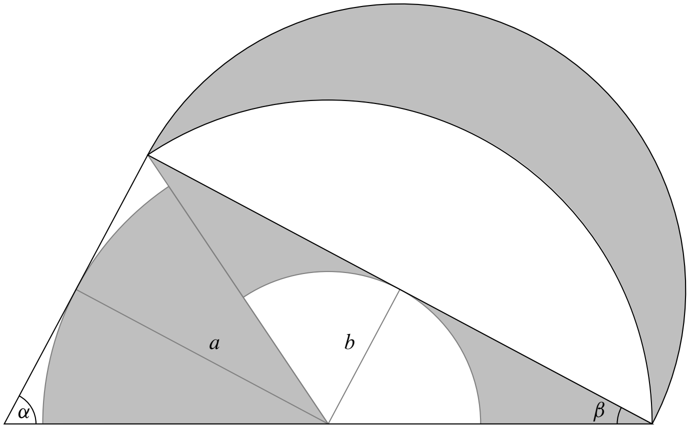

Abbildung 1

Quadrate der Sehnenlängen. Mit dem Satz des Pythagoras $h^2 + q^2 = a^2$ ergibt sich, dass die Summe der beiden Segmentflächen über h und q gleich der Segmentfläche über a ist.

Die schattierte Fläche des rechten Möndchens zusammen mit der Segmentfläche über a sind somit gleich gross wie die schattierten Flächen innerhalb des Dreiecks zusammen mit den anderen beiden Segmentflächen und die Flächengleichheit folgt wegen dem oben Gesagten.

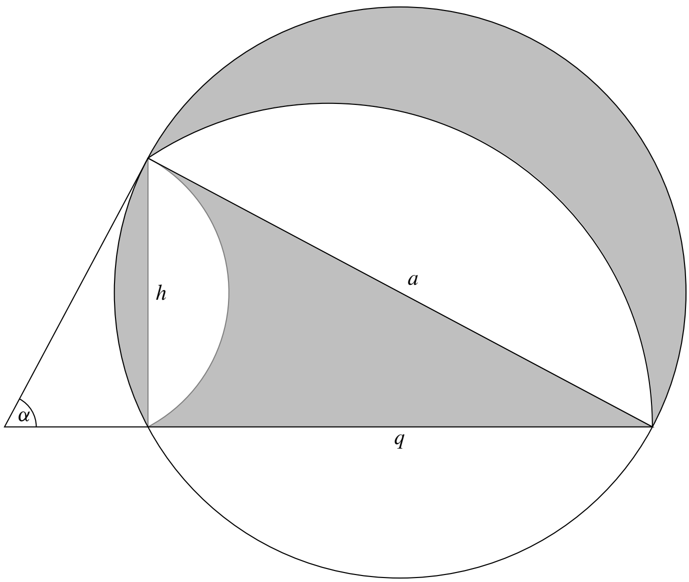

Abbildung 2