

Zéros de caractères

Jean-Pierre SERRE

Résumé. Soit G un groupe de Lie réel compact, et soit f un caractère irréductible de G de degré > 1 . Nous montrons qu'il existe un élément g de G , d'ordre fini, tel que $f(g) = 0$, et nous complétons ce résultat de diverses manières, qui sont détaillées dans l'Introduction.

Mathematics Subject Classification 2020: 20G05.

Keywords: Burnside, caractères, Deligne.

Introduction

Dans les §§ 1–3, nous étendons aux groupes algébriques en caractéristique zéro, et aux groupes de Lie réels compacts, le théorème de Burnside sur les groupes finis disant que *tout caractère irréductible de degré > 1 s'annule au moins une fois*. En fait, lorsque le groupe n'est pas fini, on demande que le caractère s'annule sur un *élément d'ordre fini* du groupe, cf. théorème 1.3 et théorème 3.2.

Ce résultat avait été énoncé dans un exposé à Oberwolfach [Se 04], ainsi que dans un colloque en mémoire de Jacques Tits (Collège de France, décembre 2023); la démonstration, qui date de 1996, n'avait pas été publiée.

Nous donnons aussi (théorème 2.16) un résultat récent de Deligne disant que, si le groupe est connexe, on peut renforcer la condition *élément d'ordre fini* en *élément d'ordre une puissance d'un nombre premier*. L'extension éventuelle de ce résultat aux groupes non connexes est discutée au § 4.9, en relation avec la classification des groupes finis simples, cf. question 4.11.

Les §§ 4–5 portent sur les zéros des S -caractères (au sens de E. M. Zhmud) des groupes de Lie réels compacts.

Le § 6 est relatif au nombre (fini ou infini) de classes de conjugaison d'éléments d'ordre fini en lesquels s'annule un caractère donné. Le § 7 traite l'exemple du caractère de la représentation adjointe d'un groupe de type G_2 : ce caractère s'annule sur des éléments d'ordre 7, 8, 15, 42.

J'ai plaisir à remercier C. Smyth, P. Deligne et G. Malle pour leurs contributions au § 7, et aux §§ 2, 4.

1. Le cas des groupes algébriques – préliminaires

1.1. Rappels sur les représentations linéaires et leurs caractères. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, et soit G un k -groupe algébrique linéaire. Le groupe $G(k)$ de ses k -points sera écrit “ G ” dans la suite ; la composante connexe de l'élément neutre de G sera notée G^0 .

Une représentation linéaire de G (ou un “ G -module”) est un k -espace vectoriel V de dimension finie muni d'un morphisme de groupes algébriques $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_V$, où GL_V est le groupe des automorphismes de V , considéré comme groupe algébrique.

Le *caractère* du G -module V est la fonction

$$g \mapsto \mathrm{tr}(\rho(g)).$$

C'est un élément de l'algèbre affine de G . Elle ne dépend que des quotients de Jordan–Hölder de V . Deux représentations semi-simples qui ont le même caractère sont isomorphes. Un caractère est dit irréductible si un (donc tout) G -module semi-simple correspondant est simple.

Le *degré* d'un caractère χ est l'entier $\chi(1)$, autrement dit la dimension d'un G -module correspondant.

1.2. Énoncé du théorème.

Théorème 1.3. *Soit G un k -groupe algébrique linéaire et soit χ un caractère irréductible de G de degré > 1 . Il existe un élément g de G , d'ordre fini, tel que $\chi(g) = 0$.*

La démonstration sera donnée au § 2.14.

Remarque. Noter la condition “ g d'ordre fini”. Si on l'omet, l'énoncé devient plus facile : lorsque G est connexe, il est alors valable pour tout caractère (irréductible ou non) qui n'est pas un multiple d'un caractère de degré 1.

Esquisse de Démonstration. On peut supposer que G est réductif ; le cas où c'est un tore de dimension 1 résulte de ce que tout polynôme de Laurent qui n'est pas un monôme a un zéro ; le cas où c'est un tore de dimension quelconque se ramène au cas de dimension 1 par restriction à des sous-tores convenables ; le cas général se déduit du cas précédent, appliqué à un tore maximal de G .

1.4. Relèvements d'éléments et de sous-groupes finis.

Proposition 1.5. *Soit $\phi : H_1 \rightarrow H_2$ un homomorphisme surjectif de k -groupes algébriques linéaires, et soit F_2 un sous-groupe fini de H_2 . Il existe un sous-groupe fini F_1 de H_1 tel que $\phi(F_1) = F_2$.*

Démonstration. Soit $G_1 = \phi^{-1}(F_2)$. D'après le lemme 5.11 de [BS 64] il existe un sous-groupe fini F_1 de G_1 tel que $G_1 = G_1^0 \cdot F_1$, où G_1^0 est la composante neutre de G_1 , cf. § 1.1. Le groupe $\phi(G_1^0)$ est un sous-groupe connexe de F_2 ; il est donc trivial. Comme $\phi(G_1) = F_2$, cela entraîne $\phi(F_1) = F_2$.

Corollaire 1.6. *Tout élément d'ordre fini de H_2 est l'image par ϕ d'un élément d'ordre fini de H_1 .*

L'une des conséquences du corollaire 1.6 est que, si le théorème 1.3 est vrai pour un groupe, il l'est aussi pour tout quotient de ce groupe.

1.7. Réductions.

Lemme 1.8. *Si le théorème 1.3 est vrai pour G^0 , il est vrai pour G .*

Démonstration. D'après la proposition 1.5, il existe un sous-groupe fini F de G tel que $G = G^0 F$. Soit F un tel sous-groupe. Soit V une représentation semi-simple de G de caractère χ . Comme G^0 est normal dans G , le G^0 -module V est semi-simple et se décompose en composantes isotypiques

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda},$$

où les λ sont les caractères irréductibles de G^0 ; chaque V_{λ} est somme directe de représentations irréductibles de G^0 de caractère λ . Soit L l'ensemble des λ tels que $V_{\lambda} \neq 0$. Le groupe G/G^0 opère sur L ; cette action est transitive, puisque V est irréductible ; il en est donc de même de l'action de F .

Si $|L| > 1$, un théorème de Jordan ([Jo 72], [CC 92]) montre qu'il existe $g \in F$ qui opère sans point fixe sur L . Cela entraîne que la trace de g est 0 ; comme g appartient à F , il est d'ordre fini.

Lorsque L a un seul élément λ , on a $V = V_{\lambda}$. Si $\deg(\lambda) > 1$, l'hypothèse faite sur G^0 entraîne qu'il existe $g \in G^0$, d'ordre fini, tel que $\lambda(g) = 0$, d'où $\chi(g) = 0$ puisque $\chi(g)$ est un multiple de $\lambda(g)$. Si $\deg(\lambda) = 1$, λ est un homomorphisme de G^0 dans le groupe multiplicatif $G_m = \text{GL}_1$ et G^0 opère sur V par des homothéties ; tout sous-espace de V stable par F est donc stable par G . Il en résulte que V est F -irréductible. En appliquant à F le théorème de Burnside cité dans l'introduction,

on voit qu'il existe $g \in F$ tel que $\chi(g) = 0$; puisque g appartient à F , g est d'ordre fini.

Lemme 1.9. *Si le théorème 1.3 est vrai pour des groupes G_i , il est vrai pour le groupe*

$$G = \prod G_i.$$

Démonstration. Le caractère χ de G est produit de caractères irréductibles χ_i des G_i ; comme $\deg(\chi) > 1$, il existe un indice j tel que $\deg(\chi_j) > 1$, et il existe donc $g_j \in G_j$, d'ordre fini, tel que $\chi_j(g_j) = 0$. L'élément g de G dont la j -ième composante est g_j et dont les autres composantes sont égales à 1 est d'ordre fini, et l'on a $\chi(g) = 0$.

Lemme 1.10. *Si le théorème 1.3 est vrai lorsque G est connexe, presque simple et simplement connexe, il est vrai pour tout G .*

(Un groupe semi-simple est dit presque simple si son algèbre de Lie est une algèbre simple.)

Démonstration. D'après le lemme 1.8, nous pouvons supposer que G est connexe; nous pouvons aussi supposer que la représentation linéaire $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_n$ correspondant à χ est fidèle (si elle ne l'est pas, on remplace G par son image $\rho(G)$ – c'est licite, car tout élément d'ordre fini de $\rho(G)$ est l'image par ρ d'un élément d'ordre fini de G , cf. corollaire 1.6).

Comme ρ est irréductible, donc semi-simple, et fidèle, le groupe G est réductif connexe. Il existe alors un revêtement fini G' de G de la forme $T \times G_1$, où T est un tore (i.e., un produit de copies de G_m), et où G_1 est semi-simple et simplement connexe. Soit ρ' le composé : $G' \rightarrow G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_n$. Par hypothèse, le théorème 1.3 est vrai pour G_1 ; il est vrai pour T puisque les représentations irréductibles de T sont de degré 1. D'après le lemme 1.9, il est vrai pour $G' = T \times G_1$. Il existe donc un élément g' de G' d'ordre fini tel que $\mathrm{tr} \rho'(g') = 0$; l'image g de g' dans G est d'ordre fini, et l'on a $\chi(g) = 0$.

2. Rappels sur les SL_2 principaux, et fin de la démonstration du théorème 1.3

Dans ce § on suppose que G possède les propriétés énumérées dans le lemme 1.10, autrement dit que c'est un groupe réductif connexe presque simple et simplement connexe. Si l'on démontre le théorème 1.3 dans ce cas, le lemme 1.10 entraîne qu'il est vrai dans le cas général.

2.1. Poids, racines, caractères. Rappelons quelques notations standards (voir [Ja 03], II, chap. 1).

Soit T un tore maximal de G , et soit $X = \text{Hom}(T, G_m)$ le groupe des caractères de T (on note G_m le tore standard de dimension 1, i.e., GL_1). Soit $R \subset X$ le système de racines associé à (G, T) , autrement dit l'ensemble des poids $\neq 0$ de la représentation naturelle de T sur l'algèbre de Lie de G . Comme G est presque simple, R est irréductible, au sens de [Bo 68], VI.1.2. Soit N le normalisateur de T dans G . Le quotient $W = N/T$ est le groupe de Weyl; il opère sur T, X et R .

Choisissons une base B de R , au sens de [Bo 68], VI.1.5; cela revient à choisir un sous-groupe de Borel de G contenant T . Tout élément α de R est combinaison $\mathbb{Z}$ -linéaire des éléments de B , à coefficients, soit tous ≥ 0 (auquel cas on écrit $\alpha > 0$), soit tous ≤ 0 .

Notons $R^\vee$ l'ensemble des racines $\alpha^\vee$ inverses des α (cf. [Bo 68], VI.1.1 et [Ja 03], II.1.3); c'est une partie du $\mathbb{Z}$ -dual $Y = \text{Hom}(G_m, T)$ de X . On note $(\alpha, \beta) \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle$ l'accouplement $X \times Y \rightarrow \mathbb{Z}$.

On pose $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$; c'est un élément de X (à cause de l'hypothèse que G est simplement connexe); on a $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$ pour tout $\alpha \in B$. On définit de même $\rho^\vee = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha^\vee$; on a $2\rho^\vee \in Y$, mais pas toujours $\rho^\vee \in Y$.

2.2. L'homomorphisme principal $\text{SL}_2 \rightarrow G$. Soit $f : G_m \rightarrow T$ l'élément de Y tel que $\langle \alpha, f \rangle = 2$ pour tout $\alpha \in B$; on a $f = 2\rho^\vee = \sum_{\alpha > 0} \alpha^\vee$.

L'élément $\varepsilon = f(-1)$ de T appartient au centre de G . On a $\varepsilon = 1$ si et seulement si $f/2 = \rho^\vee$ appartient à Y ; le noyau de f est alors $\{1, -1\}$; c'est le cas lorsque le centre de G est d'ordre impair, i.e., pour G de type A_n (n pair), ou E_6, E_8, F_4, G_2 .

Lorsque $\varepsilon \neq 1$, f est injectif; c'est le cas, par exemple, lorsque G est de type C_n , ou A_n (n impair), ou E_7 .

Il existe un homomorphisme $\phi : \text{SL}_2 \rightarrow G$ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} G_m & \xrightarrow{f} & T \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota_T \\ \text{SL}_2 & \xrightarrow{\phi} & G \end{array}$$

où ι désigne le plongement $t \mapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ de G_m dans SL_2 , et ι_T désigne l'injection de T dans G ; ce résultat est dû à de Siebenthal [Si 50] et Dynkin [Dy 00].

A conjugaison près, l'homomorphisme ϕ ne dépend pas des choix faits; un tel homomorphisme est appelé *principal*; il est injectif si et seulement si l'élément ε défini plus haut est $\neq 1$; lorsque $\varepsilon = 1$, ϕ se factorise en $\text{SL}_2 \rightarrow \text{PGL}_2 \rightarrow G$.

On trouvera dans [Ko 59] de nombreuses propriétés du sous-groupe $\text{Im}(\phi)$ de G .

2.3. Calculs de caractères. Les représentations irréductibles de G sont indexées par les *poids dominants*, i.e., par les éléments λ de X tels que $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ soit un entier ≥ 0 pour tout $\alpha > 0$, cf. [St 16], chap. 12, th. 39, et [Ja 03], II, chap. 2.

Soit V_λ une représentation irréductible correspondant à un poids dominant λ (autrement dit, telle que λ soit son plus grand poids), et soit χ_λ le caractère correspondant de G . La valeur de χ_λ pour les éléments de T est donnée par une formule, due à H. Weyl, que nous allons rappeler.

Pour écrire commodément cette formule, nous noterons exponentiellement les caractères de T , i.e., nous écrirons x^θ à la place de $\theta(x)$, si $x \in T$, et $\theta \in X$. Posons

$$A_\theta(x) = \sum_{w \in W} \varepsilon_w x^{w\theta}, \quad \text{où } \varepsilon_w = \det(w) \in \{1, -1\} \text{ est la signature de } w.$$

Théorème 2.4 (H. Weyl). *On a $\chi_\lambda(x) = A_{\lambda+\rho}(x)/A_\rho(x)$.*

Remarque. Cette formule n'a de sens que pour les x tels que $A_\rho(x) \neq 0$; mais, comme ceux-ci forment un ouvert de T qui est dense pour la topologie de Zariski, elle détermine χ_λ sans ambiguïté. Même remarque pour la formule du théorème 2.8, ainsi que pour (2.3) ci-après.

Démonstration. Voir [Ja 03], II.5.11 et aussi (pour l'analogue en termes d'algèbres de Lie) [Bo 75], VIII.9.1, th. 1.

Soit $y : G_m \rightarrow T$ un élément de Y . Si $\theta \in X$, on a $y(t)^\theta = t^{(\theta, y)}$, d'où

$$(2.1) \quad A_\theta(y(t)) = \sum_{w \in W} \varepsilon_w t^{(w\theta, y)}.$$

Le cas qui nous intéresse ici est celui où $y = f = 2\rho^\vee$, cf. § 2.1.

Lemme 2.6. *Pour tout $\theta \in X$, on a $A_\theta(f(t)) = \prod_{\alpha > 0} (t^{(\theta, \alpha^\vee)} - t^{-(\theta, \alpha^\vee)})$.*

Démonstration. Soit $\mathbb{Z}[Y]$ la $\mathbb{Z}$ -algèbre du groupe abélien Y . Cette algèbre a une base $e(y)$, $y \in Y$, telle que $e(y + y') = e(y)e(y')$ pour $y, y' \in Y$. En appliquant au système de racines $R^\vee$ une formule standard (cf. [Bo 68], VI.3.3, prop. 2(i)), on trouve

$$(2.2) \quad \sum_{w \in W} \varepsilon_w e(wf) = \prod_{\alpha > 0} (e(\alpha^\vee) - e(-\alpha^\vee)) \quad \text{dans } \mathbb{Z}[Y].$$

Si $\theta \in X$, soit $\phi_\theta : \mathbb{Z}[Y] \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ l'homomorphisme défini par $e(y) \mapsto t^{(\theta, y)}$. En appliquant ϕ_θ aux deux membres de (2.2), on obtient le lemme 2.6.

Nous pouvons maintenant déterminer la valeur de χ_λ pour les éléments de T de la forme $f(t)$.

Théorème 2.8. *On a*

$$\chi_\lambda(f(t)) = \prod_{\alpha > 0} \frac{t^{\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle} - t^{-\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle}}{t^{\langle \rho, \alpha^\vee \rangle} - t^{-\langle \rho, \alpha^\vee \rangle}} = t^{-\langle \lambda, 2\rho^\vee \rangle} \prod_{\alpha > 0} \frac{t^{2\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle} - 1}{t^{2\langle \rho, \alpha^\vee \rangle} - 1}.$$

(Aux notations près, le théorème 2.8 se trouve dans [Ka 81], formule (10), dans le cas particulier où t est une racine de l'unité (cas particulier qui est d'ailleurs suffisant pour la suite); dans le cas général, il est explicité dans [EKV 09], § 3.1, à cela près que la formule a été écrite par erreur en omettant les coefficients “2” du membre de droite.)

Démonstration du théorème 2.8. Il résulte du théorème 2.4, combiné avec le lemme 2.6, appliqué à $\theta = \lambda + \rho$ et à $\theta = \rho$.

Corollaire 2.9. $\chi_\lambda(f(t))$ est le produit d'une puissance de t^{-1} par des polynômes cyclotomiques.

En effet, $\chi_\lambda(f(t))$ appartient à $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ puisque c'est un caractère du groupe G_m ; ce polynôme de Laurent n'a pas de pôle en dehors de $t = 0$, et la formule du théorème 2.8 montre que ses zéros sont des racines de l'unité. À un facteur constant près, c'est donc le produit de $t^{-\langle \lambda, 2\rho^\vee \rangle}$ par des polynômes cyclotomiques; on vérifie que le facteur constant est égal à 1 en observant que le coefficient de $t^{-\langle \lambda, 2\rho^\vee \rangle}$ est 1.

Remarque. Lorsque l'élément ε du § 2.2 est égal à 1, $f(t)$ ne dépend que de t^2 . Si l'on pose $u = t^2$, la formule du théorème 2.8 se récrit

$$\chi_\lambda(f(t)) = u^{-\langle \lambda, \rho^\vee \rangle} \prod_{\alpha > 0} \frac{u^{\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle} - 1}{u^{\langle \rho, \alpha^\vee \rangle} - 1}.$$

2.10. Exemple. Supposons G de type G_2 , ce qui entraîne $\varepsilon = 1$, et choisissons pour λ la plus grande racine positive. Alors V_λ est la représentation adjointe de G , de dimension 14. Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(f(t)) &= \sum_{n=-1}^{n=1} u^n + \sum_{n=-5}^{n=5} u^n \\ &= u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + 2u + 2 + 2u^{-1} + u^{-2} + u^{-3} + u^{-4} + u^{-5} \\ &= u^{-5} \Phi_7(u) \Phi_8(u), \end{aligned}$$

où Φ_7 et Φ_8 sont les polynômes cyclotomiques:

$$\Phi_7(u) = u^6 + u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1, \quad \Phi_8(u) = u^4 + 1.$$

On obtient ainsi des éléments de G d'ordre 7 et d'ordre 8 qui sont des zéros de χ . Nous verrons au § 7 qu'il y a d'autres zéros d'ordre 15 et 42.

2.11. Interprétation du théorème 2.8 en termes de produits tensoriels de représentations.

Pour tout $n \geq 1$, soit E_n une représentation irréductible de SL_2 de dimension n (il y en a une seule, à isomorphisme près). Pour tout poids μ de G tel que $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle \geq 1$ pour tout $\alpha > 0$, posons

$$E_\mu = \bigotimes_{\alpha > 0} E_{\langle \mu, \alpha^\vee \rangle}.$$

(Noter que la condition sur μ est satisfaite si et seulement si $\mu - \rho$ est un poids dominant.)

Notons $\phi^* V_\lambda$ la représentation de SL_2 obtenue en faisant opérer SL_2 sur V_λ grâce à l'homomorphisme $\phi : \mathrm{SL}_2 \rightarrow G$.

Théorème 2.12. *Les SL_2 -représentations $\phi^* V_\lambda \otimes E_\rho$ et $E_{\lambda+\rho}$ sont isomorphes.*

Remarque. Dans le corps des fractions de l'anneau des représentations de SL_2 , cet énoncé peut s'écrire

$$\phi^* V_\lambda = E_{\lambda+\rho} \cdot (E_\rho)^{-1}.$$

En comparant les dimensions des deux membres, on retrouve la formule de H. Weyl donnant $\dim V_\lambda$, cf. [Bo 75], chap. 8, § 9, th. 2; c'est d'ailleurs à peu près la méthode suivie par Weyl lui-même dans [We 26].

Démonstration du théorème 2.12. Pour prouver que deux caractères d'un groupe réductif connexe sont égaux, il suffit de le tester sur un tore maximal; en effet, les tores maximaux sont conjugués, et leur réunion est l'ensemble des éléments semi-simples, qui est dense.

Dans le cas de SL_2 , cela signifie que ces caractères prennent la même valeur pour les éléments $s_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ du tore maximal $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Calculons ces valeurs pour les représentations qui interviennent dans le théorème 2.12.

Si $n \geq 1$, la valeur en s_t du caractère de E_n est $(t^n - t^{-n})/(t - t^{-1})$.

La valeur en s_t du caractère de $E(\mu)$ est $\prod_{\alpha > 0} (t^{\langle \mu, \alpha^\vee \rangle} - t^{-\langle \mu, \alpha^\vee \rangle})/(t - t^{-1})$.

En appliquant cette dernière formule à $\mu = \lambda + \rho$, puis à $\mu = \rho$, et en divisant, les puissances de $t - t^{-1}$ disparaissent et les autres facteurs donnent $\chi_\lambda(f(t))$ d'après le théorème 2.8.

Exemple. Si $k = \mathbb{C}$, et $t = e^{i\theta}$, la valeur en s_t du caractère de E_n est $\sin(n\theta)/\sin(\theta)$ et l'on a donc

$$(2.3) \quad \chi_\lambda(f(e^{i\theta})) = \prod_{\alpha > 0} \frac{\sin(\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \theta)}{\sin(\langle \rho, \alpha^\vee \rangle \theta)} \quad \text{cf. [Ka 81], formule (10).}$$

2.14. Fin de la démonstration du théorème 1.3. Conservons les notations du théorème 1.3, ainsi que celles du § 2.3, et notons λ le poids dominant tel que $\chi = \chi_\lambda$. Pour achever la démonstration du théorème 1.3, il suffit de montrer qu’il existe une racine de l’unité z tel que $\chi_\lambda(f(z)) = 0$. On n’a que l’embarras du choix puisque, d’après le corollaire 2.9, tous les zéros du polynôme de Laurent $\chi_\lambda(f(t))$ sont des racines de l’unité.

On peut, par exemple, prendre z d’ordre $m = \langle 2\lambda + 2\rho, \beta^\vee \rangle$, où $\beta^\vee$ est la plus grande racine de $R^\vee$; le numérateur du membre de droite du théorème 2.4 est nul, alors que le dénominateur ne l’est pas, car $\langle 2\rho, \alpha^\vee \rangle \leq \langle 2\rho, \beta^\vee \rangle < m$ pour tout $\alpha > 0$.

2.15. Un théorème de Deligne. Tout récemment, Deligne a montré que le théorème 1.3 peut être grandement amélioré lorsque G est connexe : “ordre fini” peut être remplacé par “ordre une puissance d’un nombre premier”.

Théorème 2.16 (Deligne). *Soit χ un caractère irréductible de degré > 1 d’un groupe algébrique connexe. Il existe un élément g du groupe, d’ordre une puissance d’un nombre premier, tel que $\chi(g) = 0$.*

(Dans une version antérieure de cet article, le théorème 2.16 était énoncé comme “problème”).

Démonstration (d’après Deligne¹ – reproduite avec sa permission). Pour simplifier, nous dirons *d’ordre primaire* à la place de *d’ordre une puissance d’un nombre premier*.

Le point essentiel est la proposition suivante.

Proposition 2.17. *Soit $F(t)$ une fonction rationnelle de t , de la forme*

$$F(t) = t^a \prod_i (t^{n'_i} - 1) / (t^{n_i} - 1),$$

où les n'_i, n_i sont des entiers ≥ 1 . Supposons que

$$\prod n'_i > \prod n_i.$$

Il existe alors une racine de l’unité d’ordre primaire qui est un zéro de F .

Démonstration. Pour tout nombre premier ℓ , notons $n'_{i,\ell}$ la ℓ -composante de n'_i et définissons de même $n_{i,\ell}$. On a

$$\prod_\ell \frac{\prod_i n'_{i,\ell}}{\prod_i n_{i,\ell}} = \prod_i \frac{n'_i}{n_i} > 1.$$

¹Voir son exposé *Zeros of characters*, IAS, Princeton, 4 novembre 2024.

Il existe donc un nombre premier ℓ tel que $\prod_i n'_{i,\ell} > \prod_i n_{i,\ell}$. Choisissons un tel ℓ . On a

$$\sum_i v_\ell(n'_i) > \sum_i v_\ell(n_i),$$

où v_ℓ est la valuation ℓ -adique de $\mathbb{Q}$.

Pour tout entier $m > 0$, soit Φ_{ℓ^m} le polynôme cyclotomique d'indice ℓ^m . C'est un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$. Il définit donc une valuation discrète de $\mathbb{Q}(t)$, que nous noterons w_m . Si n est un entier > 0 , $w_m(t^n - 1)$ est égal à 1 si n est divisible par ℓ^m , et à 0 sinon. On a donc $\sum_m w_m(t^n - 1) = v_\ell(n)$, d'où

$$\sum_m w_m(F) = \sum_i v_\ell(n'_i) - \sum_i v_\ell(n_i) > 0.$$

Il existe donc au moins un m tel que $w_m(F) > 0$. Cela signifie que F a un zéro qui est racine primitive ℓ^m -ième de l'unité.

Fin de la démonstration du théorème 2.16. Notons d'abord que, si $G_1 \rightarrow G_2$ est un homomorphisme surjectif de groupes linéaires, tout élément de H d'ordre primaire est l'image d'un élément de G d'ordre primaire. Cela résulte du corollaire 1.6, combiné à un argument à la Bézout. Cela permet de supposer que le groupe algébrique du théorème 2.16 est réductif. L'argument du lemme 1.10 montre que l'on peut se ramener au cas où ce groupe est presque simple et simplement connexe. Les hypothèses du présent § sont satisfaites.

On peut alors appliquer les constructions des précédentes sections, et l'on obtient un homomorphisme $f : G_m \rightarrow T \rightarrow G$, où T est un tore maximal de G . Si λ est le poids maximum du caractère χ , le théorème 2.8 donne une formule pour $F(t) = \chi(t)$ qui est du type de la proposition 2.17, les n'_i étant les $\langle \lambda + \rho, \alpha^v \rangle$ et les n_i les $\langle \rho, \alpha^v \rangle$. On a $n'_i \geq n_i$ pour tout i , avec inégalité stricte pour au moins un indice i puisque le poids λ est non nul. D'où $\prod n'_i > \prod n_i$, et l'on applique la proposition 2.17; elle montre que F a un zéro du type voulu.

Remarque. Supposons G simple. La démonstration ci-dessus montre, non seulement qu'il existe un zéro de χ qui est d'ordre primaire, mais aussi qu'un tel élément *peut être choisi de type principal*, i.e., contenu dans un sous-groupe principal de type A_1 de G .

3. Le cas des groupes compacts

3.1. Énoncé du théorème. Cet énoncé est presque le même que celui du théorème 1.3.

Théorème 3.2. *Soit G un groupe topologique compact et soit χ le caractère d'une représentation linéaire complexe continue irréductible $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de degré $n > 1$. Il existe $g \in G$ tel que $\chi(g) = 0$; si G est un groupe de Lie réel, on peut choisir g d'ordre fini.*

Lemme 3.3. *Si le théorème 3.2 est vrai pour les groupes de Lie compacts, il est vrai pour tous les groupes compacts.*

Démonstration. Le groupe $\rho(G)$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. D'après un théorème d'Élie Cartan ([Bo 72], III.8, th. 2), cela entraîne que $\rho(G)$ est un groupe de Lie réel. En appliquant le théorème 3.2 à ce groupe, on obtient un élément $\gamma \in \rho(G)$ tel que $\mathrm{tr}(\gamma) = 0$. Si $g \in G$ est tel que $\rho(g) = \gamma$, on a $\chi(g) = 0$.

Remarque. Lorsque G n'est pas un groupe de Lie réel, on ne peut pas toujours choisir g d'ordre fini. Voici un exemple.

Soit A le groupe additif des entiers 2-adiques, et soit C un groupe cyclique d'ordre 3. Faisons opérer A sur C par $A \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathrm{Aut}(C)$ et soit $G = C \cdot A$ le produit semi-direct correspondant. C est un groupe profini, donc compact. Ses seuls éléments d'ordre fini sont ceux de C . Il a un quotient isomorphe au groupe symétrique S_3 , d'où une représentation irréductible de degré 2; soit χ son caractère. Les valeurs de χ sur C sont égales à 2 (élément neutre) et à -1 (éléments d'ordre 3). Il n'existe donc aucun $g \in G$ d'ordre fini tel que $\chi(g) = 0$.

3.4. Démonstration du théorème 3.2. D'après le lemme 3.3, on peut supposer que G est un groupe de Lie compact. Nous allons utiliser le dictionnaire²:

groupes de Lie réels compacts $\iff$ groupes algébriques réductifs complexes,

pour nous ramener au théorème 1.3.

Soit $\underline{G}$ le $\mathbb{R}$ -groupe algébrique dont l'algèbre affine est formée des fonctions continues f sur G , à valeurs réelles, dont les translatées (à gauche) engendrent un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie (cf. [Ch 46], chap. VI et [Se 93], § 5). Le groupe des $\mathbb{R}$ -points de $\underline{G}$ est G . Soit G_c le $\mathbb{C}$ -groupe algébrique déduit de $\underline{G}$ par extension des scalaires; c'est un groupe linéaire réductif, appelé le *complexifié* de G . On a $\mathrm{Lie}(G_c) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Lie}(G)$. Le groupe G est un sous-groupe compact maximal de G_c ; tout sous-groupe compact de G_c est conjugué d'un sous-groupe de G .

Le caractère χ de G s'étend en un caractère (algébrique) χ_c de G_c , qui est irréductible. D'après le théorème 1.3, appliqué à $k = \mathbb{C}$ et au groupe G_c , il existe $g \in G_c$, d'ordre fini, tel que $\chi_c(g) = 0$. Comme le groupe engendré par g est fini, donc compact,

²Très bien expliqué dans l'article “Complexification (Lie group)” de Wikipedia.

l'un de ses G_c -conjugués est contenu dans G ; on obtient ainsi un zéro de χ d'ordre fini.

Remarque. La même démonstration montre que le théorème 2.16 est valable pour les groupes de Lie compact connexes : *tout caractère irréductible de degré > 1 a un zéro qui est d'ordre primaire.*

4. S -caractères

Dans ce §, les caractères sont des caractères complexes.

La notion de S -caractère a été introduite par E. M. Zhmud [Zh 95] pour les groupes finis. Commençons par ce cas.

4.1. Les S -caractères d'un groupe fini. Soit G un groupe fini, et soit f un caractère virtuel de G (autrement dit une différence de deux caractères). On dit (Zhmud, *loc.cit.*) que f est un S -caractère s'il a les deux propriétés suivantes :

(a) f est positif, i.e., $f(g)$ est réel ≥ 0 pour tout $g \in G$;

(b) $\langle f, 1 \rangle = 1$, i.e., $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) = 1$.

Exemples de S -caractères. (cf. [Zh 95] et [BKZ 19], chap. XX)

(4.1.1) $f = 1$.

(4.1.2) $f = 1 - \varepsilon$ (resp., $f = 1 + \varepsilon$), où $\varepsilon : G \rightarrow \{1, -1\}$ est un homomorphisme surjectif.

(4.1.3) $f = \phi \bar{\phi}$, où ϕ est un caractère irréductible, et $\bar{\phi}$ est le conjugué de ϕ .

(4.1.4) Le caractère associé à une action transitive de G sur un ensemble non vide.

(4.1.5) Le caractère induit d'un S -caractère d'un sous-groupe propre de G .

Remarques. (4.1.6) Voici un exemple de S -caractère qui n'est d'aucun des types ci-dessus. Soit $G = \text{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$, soit ψ le caractère de la représentation irréductible de dimension 8. Les valeurs de ψ sur les éléments de G d'ordre $(1, 2, 3, 4, 7)$ sont $(8, 0, -1, 0, 1)$. Le caractère $f = 1 + \psi$ est un S -caractère de degré 9 qui n'est évidemment pas de type (4.1.1), (4.1.2) ou (4.1.3), et pas non plus de type (4.1.4) ou (4.1.5) car son degré ne divise pas l'ordre de G .

(4.1.7) Si $f = \sum_{\chi \text{ irr}} n_{\chi} \chi$ est un S -caractère, on a ([Zh 95], lemma 2)

$$-\chi(1) \leq n_{\chi} \leq \chi(1) \quad \text{pour tout } \chi \text{ irréductible.}$$

Cela montre que l'ensemble des S -caractères est fini, et cela permet de les énumérer à partir de la table des caractères de G .

4.2. Les zéros d'un S -caractère. Les textes cités plus haut donnent une série de résultats sur les valeurs des S -caractères. Nous nous bornerons à l'énoncé le plus simple.

Théorème 4.3 ([Zh 95], th. 1). *Soit G un groupe fini. Si f est un S -caractère distinct du caractère 1, il existe $g \in G$ tel que $f(g) = 0$.*

Démonstration (inspirée de celle de Burnside [Bu 04]). Supposons $f(g) \neq 0$ pour tout $g \in G$. Soit $N = \prod_{g \in G} f(g)$. C'est un nombre réel > 0 . Nous allons voir que N appartient à $\mathbb{Z}$.

Soit $R(x, y)$ la relation d'équivalence sur G définie par “ x et y engendrent le même sous-groupe”. Soit X une classe d'équivalence de R et soit d l'ordre des éléments de X . Soit $N_X = \prod_{x \in X} f(x)$. Soit K_d le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par les racines d -ièmes de l'unité; on a $f(x) \in K_d$ si $x \in X$. On sait (Kronecker) que le groupe de Galois de $K_d/\mathbb{Q}$ est canoniquement isomorphe au groupe $\Gamma_d = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$; l'isomorphisme associe à $j \in \Gamma_d$ l'automorphisme σ_j tel que $\sigma_j(z) = z^j$ pour tout z tel que $z^d = 1$. L'action des σ_j sur les $f(x)$, $x \in X$ est: $\sigma_j(f(x)) = f(x^j)$, cf. par exemple [Se 98], § 12.4, th. 25. Si $x \in X$, les éléments de X sont les puissances x^j , $j \in \Gamma_d$. Il en résulte que N_X est la norme de $f(x)$ dans l'extension $K_d/\mathbb{Q}$, donc que N_X appartient à $\mathbb{Q}$. Comme c'est un entier algébrique (car combinaison $\mathbb{Z}$ -linéaire de racines de l'unité), c'est un élément de $\mathbb{Z}$. Puisque N est le produit des N_X , on a $N \in \mathbb{Z}$.

Comme N est positif et non nul, on a $N \geq 1$. La moyenne géométrique de la famille $\{f(g), g \in G\}$ est $N^{1/n} \geq 1$, où $n = |G|$. D'autre part la moyenne arithmétique des $f(g)$ est $\langle f, 1 \rangle = 1$. L'inégalité standard entre ces deux moyennes montre que $N^{1/n} \leq 1$, donc que les deux moyennes sont égales à 1, ce qui entraîne $f(g) = 1$ pour tout g , contrairement à l'hypothèse $f \neq 1$.

Exemples. Soit ϕ un caractère irréductible de degré > 1 . En appliquant le théorème 4.3 à $f = \phi\bar{\phi}$, on retrouve le théorème de Burnside.

Soit f le caractère associé à une action transitive de G sur un ensemble X à au moins deux éléments: si $g \in G$, $f(g)$ est le nombre de points de X fixés par g . En appliquant le théorème 4.3 à f , on voit qu'il existe un élément de G qui ne fixe aucun point de X : on retrouve le théorème de Jordan cité dans la démonstration du lemme 1.8.

Remarque. Soit f comme dans le théorème 4.3, soit Z_f l'ensemble de ses zéros et soit $c_f = |Z_f|/|G|$ la densité de Z_f . On trouvera dans [BKZ 19], chap. XX, diverses minoration de c_f . La plus simple est celle où l'on suppose que f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$: on a alors $c_f \geq 1/\sup_{g \in G} f(g)$. La démonstration est la même que celle donnée dans [CC 92] pour le cas particulier des caractères de permutation, où $\sup_{g \in G} f(g) = f(1)$.

4.4. Les S -caractères d'un groupe de Lie compact. Soit G un groupe de Lie réel compact. La notion de S -caractère se définit comme dans le cas des groupes finis : c'est un caractère virtuel f à valeurs réelles ≥ 0 , tel que $\langle f, 1 \rangle = 1$, autrement dit $\int_G f(x) dx = 1$, où dx est la mesure de Haar de G de masse totale 1.

Cette définition suggère plusieurs problèmes. Le plus évident est de savoir si le théorème 4.3 se généralise.

Problème 4.5. Si f est un S -caractère de G distinct de 1, existe-t-il $g \in G$ tel que $f(g) = 0$? Si oui, existe-t-il un tel g qui soit d'ordre fini?

Il est tentant d'essayer d'attaquer ce problème par la méthode de Burnside, cf. démonstration du théorème 4.3. Bien sûr, si G est infini, on ne peut pas faire le produit des valeurs de f . Mais, si f est réel > 0 , on peut définir l'intégrale $I = \int_G \log(f(x)) dx$. Comme $\int_G f(x) dx = 1$, l'analogie en théorie de l'intégration de l'inégalité de la moyenne (*inégalité de Jensen*) montre que I est ≤ 0 , avec égalité seulement si $f = 1$. Pour conclure, il faudrait pouvoir prouver que I est ≥ 0 ; lorsque G est fini, c'est un argument de nature galoisienne qui a permis de le faire; par quoi peut-on le remplacer?

Le second problème reflète la difficulté qu'il y a à construire des S -caractères lorsque G est connexe.

Problème 4.6. Si f est un S -caractère de G , et si G est connexe, est-il vrai que f est de la forme $f = \phi \bar{\phi}$, où ϕ est un caractère irréductible d'un revêtement connexe fini de G ?

Précisons ce que signifie la fin de l'énoncé : soit G' un revêtement connexe fini de G , et soit N le noyau de la projection $G' \rightarrow G$; le groupe N est un sous-groupe fini du centre de G' . Si ϕ est un caractère de G' , correspondant à une représentation irréductible $\rho : G' \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$, l'image de N par ρ est formée d'homothéties de module 1; le produit tensoriel de ρ et de sa conjuguée $\bar{\rho}$ est égal à 1 sur N , donc définit une représentation linéaire de G dont le caractère est $\phi \bar{\phi}$; c'est évidemment un S -caractère.

Exemple. Soit $G = \text{SU}(n, \mathbb{C})/N$, où N un sous-groupe non trivial du centre de G (un tel N existe si $n > 1$). Soit f_0 le caractère de la représentation adjointe de G . Alors $f = 1 + f_0$ est un S -caractère de G de degré n^2 ; si on l'identifie à un caractère de $G' = \text{SU}(n, \mathbb{C})$, il est égal à $\phi \bar{\phi}$, où ϕ est le caractère standard de degré n de G' ; cependant, il n'existe pas de caractère irréductible ψ de G tel que $f = \psi \bar{\psi}$.

Remarques. (1) Noter que le caractère f ci-dessus est de la forme $1 + \theta$, où θ est un caractère irréductible. Nous ignorons s'il existe d'autres S -caractères F qui soient de cette forme (en supposant G connexe et presque simple, pour simplifier).

Il n'y en a pas si le problème 4.6 a une réponse positive. En effet, supposons que $F = \phi\bar{\phi}$ avec $\deg(\phi) > 1$, où ϕ est le caractère d'une représentation irréductible fidèle $\rho : G \rightarrow \mathbb{U}(n, \mathbb{C})$, et supposons que $F = 1 + \theta$, avec θ irréductible, $\theta \neq 1$. On alors

$$\langle \phi^2 \bar{\phi}^2, 1 \rangle = \langle F^2, 1 \rangle = 1 + 2\langle \theta, 1 \rangle + \langle \theta^2, 1 \rangle = 2,$$

ce qui entraîne que G contient $\mathrm{SU}(n, \mathbb{C})$ d'après l'*alternative de Larsen*, cf. [Bo 23], V.4.9, th. 3 (a). Comme on a supposé G semi-simple connexe, cela entraîne $G = \mathrm{SU}(n, \mathbb{C})$.

(2) Le théorème 3.2 montre que, si le problème 4.6 a une réponse positive, il en est de même du problème 4.5 lorsque G est connexe.

Il y a deux cas où le problème 4.6 a une réponse positive : celui où G est commutatif et celui où $G = \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$.

Proposition 4.7. *Si G est connexe et commutatif, le seul S -caractère de G est le caractère 1.*

Proposition 4.8. *Tout S -caractère de $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ est le carré d'un caractère irréductible.*

Les démonstrations seront données au § 5.5.

Ces cas sont trop particuliers pour que l'on puisse transformer les problèmes 4.5 et 4.6 en conjectures.

4.9. Autres problèmes sur les zéros des S -caractères d'un groupe de Lie compact.

Conservons les notations du § précédent. Nous allons modifier le problème 4.5 en renforçant la condition “ g est d'ordre fini”. Dans la première version de ce texte, le renforcement était le suivant.

Problème 4.10. Soit f un S -caractère de G distinct de 1. Existe-t-il un élément $g \in G$, d'ordre primaire (i.e., une puissance d'un nombre premier), tel que $f(g) = 0$?

C'était trop demander, même pour un groupe fini : G . Malle [Ma 25] a construit des contre-exemples, où G est un groupe simple de type J_1 (ou A_8). Une étude détaillée a été faite ensuite par T. Breuer, M. Joswig et G. Malle [BJM 25].

Une question plus raisonnable (surtout après le théorème 2.16 de Deligne) est la suivante.

Question 4.11. Soit χ un caractère irréductible de degré > 1 d'un groupe de Lie compact G . Existe-t-il un zéro de χ qui soit d'ordre primaire?

Essayons de réduire cette question au cas où G est connexe. On procède comme dans la démonstration du lemme 1.8. On choisit un sous-groupe fini F de G tel que $G = G^0 \cdot F$, et l'on décompose la représentation irréductible de caractère χ par rapport

à l'action de G^0 . Comme pour le lemme 1.8, on arrive ainsi à se ramener au cas $G = G^0$ traité par Deligne, mais à deux conditions sur F :

- (A) *Pour toute action transitive de F sur un ensemble à au moins deux éléments, il existe un élément de F d'ordre primaire, qui opère sans points fixes.*
- (B) *Pour tout caractère irréductible χ de F , de degré > 1 , il existe $g \in F$, d'ordre primaire, tel que $\chi(g) = 0$.*

En fait, des réponses positives à (A) et (B) sont énoncées, et presque démontrées, dans la littérature (A) dans [FKS 81] et (B) dans [MNO 00].

Pourquoi “presque”? Parce que, dans les deux cas, la classification des groupes finis simples (CFSG) est utilisée, alors que la démonstration de ce énoncé fondamental n'est pas encore entièrement publiée.

On peut espérer que, dans un futur pas trop lointain, cette difficulté sera levée, et que la question 4.11 sera transformée en théorème. En attendant, on peut se contenter des nombreux cas où l'on a prouvé que F a les propriétés (A) et (B).

5. Polynômes de Laurent positifs et applications aux S -caractères

Le but de ce § est de démontrer les propositions 4.7 et 4.8.

5.1. Quelques propriétés des polynômes de Laurent positifs. Dans ce qui suit, $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n$ est un polynôme de Laurent à coefficients réels, autrement dit un élément de l'anneau $\mathbb{R}[t, t^{-1}]$. On s'intéresse aux valeurs de f sur le cercle unité $\mathbb{U} = \mathbb{U}(1, \mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$, et plus particulièrement à la propriété de positivité :

f est positif, i.e., les valeurs de f sur $\mathbb{U}$ sont des nombres réels ≥ 0 .

Le fait que les valeurs de f soient réelles équivaut à la *propriété de symétrie* $a_n = a_{-n}$ pour tout n . On a donc

$$f(e^{i\theta}) = a_0 + \sum_{n \geq 1} 2a_n \cos(n\theta) \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}.$$

On a $a_0 = \int_{\mathbb{U}} f(t) \mu_U(t)$, où μ_U est la mesure de Haar de $\mathbb{U}$ de masse totale 1. Si l'on écrit les éléments de $\mathbb{U}$ sous la forme $e^{i\theta}$, on a $\mu_U = \frac{1}{2\pi} d\theta$. Si f est positif, on a $a_0 \geq 0$, avec égalité seulement si $f = 0$.

Proposition 5.2. *Supposons que f soit positif. Soit m un entier ≥ 1 tel que $a_n = 0$ pour tout $n > m$ divisible par m .*

- (i) *On a $|a_m| \leq a_0/2$.*

- (ii) Si $a_m = a_0/2$, alors f est divisible par $t^{-m} + 2 + t^m$.
 (iii) Si $a_m = -a_0/2$, alors f est divisible par $-t^{-m} + 2 - t^m$.

(Il s'agit de divisibilité dans l'anneau $\mathbb{R}[t, t^{-1}]$.)

Démonstration. Notons $\mathbb{U}_+$ l'ensemble des $t \in \mathbb{U}$ tels que $t^m = 1$, et $\mathbb{U}_-$ l'ensemble des t tels que $t^m = -1$.

Soient

$$S_+ = \sum_{t \in \mathbb{U}_+} f(t), \quad S_- = \sum_{t \in \mathbb{U}_-} f(t).$$

Lemme 5.3. On a $S_+ = m(a_0 + 2a_m)$, $S_- = m(a_0 - 2a_m)$ et $S_+ + S_- = 2ma_0$.

Démonstration du lemme. Si n est un entier, la somme $\sum_{t \in \mathbb{U}_+} t^n$ est égale à m si m divise n , et à 0 sinon. Les seuls termes *a priori* non nuls de la somme S_+ sont donc ceux relatifs à $n = -m, 0, m$, qui donnent respectivement ma_m, ma_0, ma_m ; leur somme est $m(a_0 + 2a_m)$. Le même argument, appliqué à $2m$ au lieu de m , montre que tous les termes de la somme $S_+ + S_-$ sont nuls, sauf $2ma_0$. Par différence, on en déduit

$$S_- = m(a_0 - 2a_m).$$

Démonstration de la proposition 5.2. Comme S_+, S_- sont ≥ 0 , le lemme 5.3 montre que $a_0 + 2a_m \geq 0$ et $a_0 - 2a_m \geq 0$, autrement dit $-a_0/2 \leq a_m \leq a_0/2$, ce qui prouve (i). Si $a_m = a_0/2$, on a $S_- = 0$; comme S_- est la somme des $f(t), t \in \mathbb{U}_-$, qui sont ≥ 0 , tous ces $f(t)$ sont nuls. L'ensemble $\mathbb{U}_-$ est donc contenu dans l'ensemble des zéros de f . Comme f est partout positive, ses zéros sont de multiplicité paire. Cela montre que f est divisible par $(t^m + 1)^2$, donc aussi par $(t^{-m} + 1)(t^m + 1)$, ce qui prouve (ii). La démonstration de (iii) est analogue à celle de (ii).

Corollaire 5.4. Supposons que f soit positif, non constant, et que l'on ait $a_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n . On a alors $a_0 \geq 2$; si $a_0 = 2$, f est égal, soit à $t^{-m} + 2 + t^m$, soit à $-t^{-m} + 2 - t^m$, avec $m > 0$.

Démonstration. Appliquons à f le lemme 5.3, en prenant pour m le plus grand entier tel que $a_m \neq 0$; on obtient

$$a_0 \geq 2|a_m| \geq 2$$

puisque a_m est un entier non nul. Si $a_0 = 2$, le lemme 5.3 montre que f est divisible par, soit $g_m^+ = t^{-m} + 2 + t^m$, soit $g_m^- = -t^{-m} + 2 - t^m$. Le terme non nul de plus haut degré du polynôme de Laurent f/g_m^+ (resp., f/g_m^-) est nécessairement une constante, et cette constante est égale à 1 puisque les coefficients de 1 dans f, g_m^+, g_m^- sont les mêmes. On a donc, soit $f = g_m^+$, soit $f = g_m^-$.

5.5. Applications aux S -caractères.

Proposition 5.6. *Le groupe $\mathbb{U}$ n'a aucun S -caractère $\neq 1$.*

Démonstration. Soit f un S -caractère de $\mathbb{U}$, distinct de 1. C'est un polynôme de Laurent $\sum a_n t^n$ positif, à coefficients entiers. Comme $\langle f, 1 \rangle = 1$, on a $a_0 = 1$, ce qui contredit le corollaire 5.4.

Proposition 5.7 (= proposition 4.7). *Un tore n'a aucun S -caractère $\neq 1$.*

Démonstration. Soit G un tore de dimension n . C'est un produit de n copies de $\mathbb{U}$. Le cas $n = 0$ est trivial. Supposons $n \geq 1$. Soit f un S -caractère de G . Les caractères irréductibles de G sont les éléments du groupe $X = \text{Hom}(G, \mathbb{U})$. Notons X additivement; c'est un groupe abélien libre de rang n ; si $x \in X$, soit χ_x le caractère correspondant; on a $\chi_{x+x'} = \chi_x \chi_{x'}$. Soit n_x le coefficient de χ_x dans f . Soit A l'ensemble des x tels que $n_x \neq 0$; c'est un ensemble fini, qui contient 0 car $n_0 = 1$ puisque f est un S -caractère. On a

$$f = \sum_{a \in A} n_a \chi_a \quad \text{et} \quad n_0 = 1.$$

Soit $Y = \text{Hom}(\mathbb{U}, G)$. L'application

$$\text{Hom}(\mathbb{U}, G) \times \text{Hom}(G, \mathbb{U}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{U}) = \mathbb{Z},$$

permet d'identifier Y au $\mathbb{Z}$ -dual de X . Soit $y \in Y$ tel que $\langle a, y \rangle \neq \langle a', y \rangle$ pour tout couple d'éléments distincts a, a' de A ; un tel élément existe car A est fini. L'homomorphisme $y : \mathbb{U} \rightarrow G$ définit un caractère $f_y = f \circ y$ de $\mathbb{U}$. Si l'on identifie les caractères de $\mathbb{U}$ à des polynômes de Laurent, on a

$$f_y(t) = \sum_{a \in A} n_a t^{\langle a, y \rangle}, \quad \text{avec } n_a \in \mathbb{Z}.$$

Vu le choix de y , on a $\langle a, y \rangle = 0$ seulement si $a = 0$; le terme constant de $f_y(t)$ est donc 1. Comme f_y est positif, c'est un S -caractère de $\mathbb{U}$. D'après la proposition 5.6, on a $f_y = 1$, ce qui signifie que $n_a = 0$ pour tout $a \neq 0$. D'où $f = 1$.

Proposition 5.8 (= proposition 4.8). *Tout S -caractère du groupe $\text{SU}(2, \mathbb{C})$ est le carré d'un caractère irréductible.*

Démonstration. Soit $G = \text{SU}(2, \mathbb{C})$, et soit χ un S -caractère de G . La restriction de χ au tore maximal standard $\mathbb{U}$ de G est un polynôme de Laurent $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n$. La moyenne $\langle \chi, 1 \rangle_G$ de χ sur G est donnée par un cas particulier élémentaire de la formule d'intégration de H. Weyl ([Bo 82], § 6.2, cor. 2 au th. 1):

$$\langle \chi, 1 \rangle_G = \frac{1}{2} \langle F, 1 \rangle_{\mathbb{U}}, \quad \text{où } F(t) = f(t)(-t^{-2} + 2 - t^2).$$

Notons b_i les coefficients de $F(t)$; on a $\langle \chi, 1 \rangle_G = b_0/2$; comme χ est un S -caractère, on a $b_0 = 2$. D'autre part, $F(t)$ est produit de deux fonctions positives, donc est positif; il n'est pas constant. Le corollaire 5.4, appliqué à F , montre qu'il existe un entier $m > 0$ tel que $F(t)$ soit égal à $t^{-m} + 2 + t^m$ ou à $-t^{-m} + 2 - t^m$. Comme $F(1) = F(-1) = 0$, cela élimine $t^{-m} + 2 + t^m$, et montre que m est pair. Si l'on pose $n = m/2$, on a donc $F = -t^{-2n} + 2 - t^{2n} = -(t^n - t^{-n})^2$. Comme $-t^{-2} + 2 - t^2 = -(t - t^{-1})^2$, on en déduit

$$f(t) = g_n(t)^2 \quad \text{où } g_n(t) = (t^n - t^{-n})/(t - t^{-1}).$$

Soit E_n une représentation irréductible de dimension n de G . La restriction de E_n au tore maximal U a pour caractère $g_n(t)$. Cela démontre la proposition.

6. Nombre de zéros

Revenons à la situation du § 1, où G est un groupe algébrique linéaire sur un corps algébriquement clos k de caractéristique 0.

Si χ est un caractère irréductible de G de degré > 1 , nous avons vu qu'il existe au moins un zéro de G d'ordre fini. On aimerait savoir s'il y en a seulement un nombre fini à conjugaison près et comment on peut les déterminer. La question se pose, non seulement pour les caractères irréductibles, mais pour tous les caractères virtuels. Voici deux exemples:

(6.1) $G = \mathrm{SL}_2$, χ caractère virtuel $\neq 0$.

Si l'on écrit χ comme polynôme de Laurent, les zéros de χ sur le tore maximal standard sont ceux de ce polynôme, qui n'est pas 0 par hypothèse. Ils sont donc en nombre fini.

(6.2) $G = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$, χ est le caractère de la représentation de degré 4 de G qui est somme directe des représentations naturelles de degré 2 de chaque facteur.

Un élément t du tore maximal standard $T = G_m \times G_m$ de G s'écrit de façon unique comme $t = (s_x, s_y)$, où

$$s_x = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s_y = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}.$$

On a $\chi(t) = x + x^{-1} + y + y^{-1}$. Si ε est une racine de l'unité d'ordre d , et si $x = \varepsilon$, $y = -\varepsilon$, on a $\chi(t) = 0$. On obtient ainsi, pour tout d , un zéro de χ d'ordre d si d est pair, et d'ordre $2d$ si d est impair. Ces zéros sont contenus dans $T_1 \cdot z$, où T_1 est la diagonale de $G_m \times G_m$ et $z = (1, -1) \in T$. C'est là un cas particulier d'un résultat conjecturé par Lang et démontré par M. Laurent [La 84].

Théorème 6.3. *Soit T un tore, et soit f un élément de l'algèbre affine de T . Il existe un nombre fini de sous-tores T_i de T , et des éléments z_i de T d'ordre fini, ayant les propriétés suivantes.*

- (i) $f(x) = 0$ pour tout $x \in T_i \cdot z_i$;
- (ii) tout élément x de T d'ordre fini tel que $f(x) = 0$ est contenu dans l'un des $T_i \cdot z_i$.

(Noter que les éléments d'ordre fini de $T_i \cdot z_i$ sont ceux qui s'écrivent $t_i z_i$ avec t_i d'ordre fini dans T_i . Il y en a une infinité si $\dim T_i > 0$.)

Ce théorème s'applique à tout f qui est un caractère virtuel de T .

Pour utiliser le théorème 6.3 de façon effective, on doit déterminer les (T_i, z_i) , ce qui n'est pas facile lorsque $\dim T \geq 2$. Lorsque $\dim T = 2$, F. Beukers et C. J. Smyth [BS 02] donnent une méthode explicite (voir § 7 ci-dessous). Dans le cas général, on a des majorations du nombre de couples (T_i, z_i) , cf. [AS 12].

7. Exemple: éléments g de G_2 d'ordre fini tels que la trace de $\text{Ad}(g)$ soit 0

Nous allons appliquer la méthode de [BS 02] au caractère étudié au § 2.11 : le groupe G est un k -groupe simple de type G_2 , et χ est le caractère de sa représentation adjointe. Voici le résultat.

Théorème 7.1. *Soit n un entier > 0 . Pour qu'il existe $g \in G(k)$ d'ordre égal à n tel que $\chi(g) = 0$, il faut et il suffit que $n = 7, 8, 15$ ou 42 .*

Soit T un tore maximal de G défini sur k . Comme tout élément semi-simple de G est conjugué à un élément de T , et que les éléments d'ordre fini sont semi-simples, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème 7.1 pour les g qui appartiennent à T .

On identifie T à $G_m \times G_m$ de telle sorte que les éléments $(1, 0)$ et $(0, 1)$ de $\text{Hom}(T, G_m)$ forment une base des racines de G . Si $t = (x, y)$ est un élément de T , on a alors

$$\chi(t) = 2 + f(x, y) + f(x^{-1}, y^{-1}),$$

où

$$f(x, y) = x + y + yx + yx^2 + yx^3 + y^2x^3.$$

(Cela résulte de ce que les racines positives sont $\alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \beta + 3\alpha, 2\beta + 3\alpha$, avec les notations habituelles (α racine courte et β racine longue).)

Il est commode d'éliminer les dénominateurs, pour avoir des polynômes en x, y . Pour cela, on pose

$$H(x, y) = y^2 x^3 \chi(t),$$

et l'on a

$$H(x, y) = y^4 x^6 + y^3(x^6 + x^5 + x^4 + x^3) + y^2(x^4 + 2x^3 + x^2) + y(x^3 + x^2 + x) + y + 1.$$

Le théorème 7.1 est équivalent à le suivant.

Théorème 7.2. (a) Si $n = 7, 8, 15$ ou 42 , il existe des racines de l'unité x et y telles que $H(x, y) = 0$ et que $t = (x, y)$ soit d'ordre n .

(b) Inversement, si x et y sont des racines de l'unité telles que $H(x, y) = 0$, alors l'élément $t = (x, y)$ est d'ordre $7, 8, 15$ ou 42 .

Démonstration de (a). Pour tout $n > 0$, notons z_n une racine primitive n -ième de l'unité. Montrons que, si $n = 7, 8, 15$, on a $H(z_n, z_n^3) = 0$, et aussi $H(z_n, z_n^{11}) = 0$ pour $n = 42$, ce qui prouvera (a).

Pour cela, on considère le polynôme

$$H(x, x^3) = x^{18} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{10} + 2x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1,$$

et l'on constate qu'il se factorise de la façon suivante :

$$H(x, x^3) = \Phi_7(x)\Phi_8(x)\Phi_{15}(x),$$

où $\Phi_d(x)$ désigne le d -ième polynôme cyclotomique, i.e.,

$$\begin{aligned}\Phi_7(x) &= x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \\ \Phi_8(x) &= x^4 + 1, \\ \Phi_{15}(x) &= x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1.\end{aligned}$$

On a donc $H(x, x^3) = 0$ si et seulement si x est une racine de l'unité d'ordre $7, 8$ ou 15 .

Remarque. C'est Deligne (lettre du 29/1/2024) qui nous a signalé les propriétés remarquables du sous-groupe de T formé des éléments de la forme (x, x^3) , ainsi que la factorisation de $H(x, x^3)$.

On a d'autre part

$$H(x, x^{11}) = x^{50} + x^{39} + x^{38} + x^{37} + x^{36} + x^{26} + 2x^{25} + x^{24} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + 1,$$

qui se factorise en

$$H(x, x^{11}) = \Phi_8(x) \Phi_{42}(x) F(x),$$

où

$$\Phi_{42}(x) = x^{12} + x^{11} - x^9 - x^8 + x^6 - x^4 - x^3 + x + 1$$

et

$$\begin{aligned} F(x) = & x^{34} - x^{33} + x^{32} - x^{30} + x^{29} - x^{28} + x^{27} + x^{24} + x^{21} + x^{18} - x^{17} \\ & + x^{16} + x^{13} + x^{10} + x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

Cela complète la démonstration de la partie (a) du théorème.

Démonstration de (b). Nous utilisons une méthode qui m'a été suggérée par C. J. Smyth, et qui est exposée dans [BS 02], § 3.4.

Définissons les sept polynômes en x, y :

$$\begin{aligned} H_1 &= H(x, -y), & H_2 &= H(-x, y), & H_3 &= H(-x, -y), & H_4 &= H(x^2, y^2), \\ H_5 &= H(x^2, -y^2), & H_6 &= H(-x^2, y^2), & H_7 &= H(-x^2, -y^2). \end{aligned}$$

D'après *loc.cit.*, pour tout couple $t = (x, y)$ de racines de l'unité tel que $H(x, y) = 0$, il existe un indice $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ et un seul tel que $H_i(x, y) = 0$.

Pour tout i , il nous faut donc déterminer quels sont les couples (x, y) de racines de l'unité tels que $H(x, y) = 0 = H_i(x, y)$.

Cela peut se faire en éliminant la variable x en formant le résultant de H, H_i , considérés comme polynômes en x , à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}(y)$. On obtient ainsi un polynôme $S_i(y)$. On factorise $S_i(y)$ en produit de polynômes irréductibles, et l'on ne garde que les facteurs qui sont des polynômes cyclotomiques : sur [PAR], cela se fait au moyen de la commande *polycyclofactors*³.

Les racines de ces facteurs constituent la liste des y possibles. En permutant les rôles de x, y on obtient de même un polynôme $R_i(x)$, d'où une liste des x possibles. Si y_0, x_0 appartiennent à ces listes, on calcule $H(x_0, y_0)$ et l'on voit s'il est ou non zéro (comme $H(x_0, y_0)$ est un entier d'un corps cyclotomique dont tous les conjugués sont de module au plus 14, un calcul approché est suffisant pour déceler zéro).

Le tableau suivant donne les résultats de ces calculs⁴, pour chaque valeur de $i = 1, \dots, 7$, avec les conventions suivantes :

- z_d , pour $d = 2, 3, 5, 7, 8, 15, 42$: une racine primitive d -ième de l'unité ;

³C'est aussi cette commande qui m'a permis de détecter la divisibilité de $H(x, x^{11})$ par Φ_{42} .

⁴Faits avec l'aide de C.J. Smyth, et de [PAR].

- $R_i(x)^{\text{cycl}}$: l'ensemble des polynômes cyclotomiques qui divisent $R_i(x)$;
- $S_i(y)^{\text{cycl}}$: l'ensemble des polynômes cyclotomiques qui divisent $S_i(y)$;
- couples : les couples possibles (x, y) pour chaque valeur de i ;
- ordre du couple : les ordres des éléments $t = (x, y)$ ainsi obtenus, i.e., le ppcm des ordres de x et y .

i	$R_i(x)^{\text{cycl}}$	$S_i(y)^{\text{cycl}}$	Couples	Ordre de $t = (x, y)$
1	$\Phi_2 \ \Phi_4$	Φ_8	$(z_2, z_8) \ (z_8^6, z_8)$	8 8
2	Φ_8	$\Phi_2 \ \Phi_4$	$(z_8, z_2) \ (z_8, z_8^2)$	8 8
3	Φ_8	Φ_8	$(z_8, z_8) \ (z_8, z_8^3)$	8 8
4	$\Phi_3 \ \Phi_7 \ \Phi_{15}$	$\Phi_5 \ \Phi_7$	$(z_3, z_5) \ (z_7, z_7) \ (z_7, z_7^3)$ $(z_{15}, z_{15}^3) \ (z_{15}, z_{15}^9)$	15 7 7 15 15
5	Φ_7	$\Phi_2 \ \Phi_{42}$	(z_{42}^{18}, z_{42})	42
6	Φ_{42}	Φ_3	(z_{42}, z_{42}^{28})	42
7	Φ_{42}	$\Phi_2 \ \Phi_{42}$	(z_{42}, z_{42}^{11})	42

On constate que les seuls ordres possibles sont ceux du théorème 7.2.

Références

- [AS 12] I. ALIEV and C. SMYTH, [Solving algebraic equations in roots of unity](#). *Forum Math.* **24** (2012), no. 3, 641–665. Zbl [1297.11068](#) MR [2926639](#)
- [BJM 25] T. BREUER, M. JOSWIG and G. MALLE, [Zeros of \$S\$ -characters](#). *J. Comput. Algebra* **13/14** (2025), article no. 100031. MR [4887339](#)
- [BKZ 19] Y. G. BERKOVICH, L. S. KAZARIN and E. M. ZHMUD', *Characters of finite groups. Vol. 2*. 2nd edn., De Gruyter Exp. Math. 64, De Gruyter, Berlin, 2019. Zbl [1426.20003](#) MR [3887569](#)
- [Bo 68] N. BOURBAKI, [Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6](#). Hermann, Paris, 1968. Zbl [0483.22001](#)
- [Bo 72] N. BOURBAKI, [Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 2 et 3](#). Act. Sci. Ind. 1349, Hermann, Paris, 1972. MR [0573068](#)
- [Bo 75] N. BOURBAKI, [Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 7 et 8](#). Act. Sci. Ind., Hermann, Paris, 1975. MR [453824](#)
- [Bo 82] N. BOURBAKI, [Groupes et algèbres de Lie. Chapitre 9](#). Masson, Paris, 1982. Zbl [0505.22006](#) MR [682756](#)
- [Bo 23] N. BOURBAKI, [Éléments de mathématique. Théories spectrales. Chapitres 3 à 5](#). Springer, Cham, 2023. Zbl [1522.46001](#) MR [4592574](#)

- [BS 64] A. BOREL and J.-P. SERRE, [Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne](#). *Comment. Math. Helv.* **39** (1964), 111–164. Zbl [0143.05901](#) MR [0181643](#)
- [BS 02] F. BEUKERS and C. J. SMYTH, Cyclotomic points on curves. In *Number theory for the millennium, I (Urbana, IL, 2000)*, pp. 67–85, A K Peters, Natick, MA, 2002. Zbl [1029.11009](#) MR [1956219](#)
- [Bu 04] W. BURNSIDE, [On an Arithmetical Theorem Connected with Roots of Unity, and its Application to Group-Characteristics](#). *Proc. London Math. Soc. (2)* **1** (1904), 112–116. Zbl [34.0155.02](#) MR [1576762](#)
- [CC 92] P. J. CAMERON and A. M. COHEN, [On the number of fixed point free elements in a permutation group](#). *Discrete Math.* **106/107** (1992), 135–138. Zbl [0813.20001](#) MR [1181907](#)
- [Ch 46] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie Groups. I*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics 8, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1946. Zbl [0063.00842](#) MR [0015396](#)
- [Si 50] J. DE SIEBENTHAL, Sur certaines sous-groupes de rang un des groupes de Lie clos. *C. R. Acad. Sci. Paris* **230** (1950), 910–912. Zbl [0036.15602](#) MR [0033834](#)
- [Dy 00] E. B. DYNKIN, Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. In *Selected papers of E. B. Dynkin with commentary*, pp. 175–308, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [EKV 09] A. G. ELASHVILI, V. G. KAC and E. B. VINBERG, On exceptional nilpotents in semisimple Lie algebras. *J. Lie Theory* **19** (2009), no. 2, 371–390. Zbl [1252.17006](#) MR [2572134](#)
- [FKS 81] B. FEIN, W. M. KANTOR and M. SCHACHER, [Relative Brauer groups. II](#). *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **328** (1981), 39–57. Zbl [0457.13004](#) MR [0636194](#)
- [Ja 03] J. C. JANTZEN, [Representations of algebraic groups](#). 2nd edn., Math. Surveys Monogr. 107, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. Zbl [1034.20041](#) MR [2015057](#)
- [Jo 72] C. JORDAN, Recherches sur les substitutions. *J. Math. Pures Appl.* **17** (1872), 351–367. Zbl [04.0055.01](#)
- [Ka 81] V. G. KAC, [Simple Lie groups and the Legendre symbol](#). In *Algebra, Carbondale 1980 (Proc. Conf., Southern Illinois Univ., Carbondale, Ill., 1980)*, pp. 110–123, Lecture Notes in Math. 848, Springer, Berlin, 1981. Zbl [0498.22013](#) MR [0613179](#)
- [Ko 59] B. KOSTANT, [The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group](#). *Amer. J. Math.* **81** (1959), 973–1032. Zbl [0099.25603](#) MR [0114875](#)
- [La 84] M. LAURENT, [Équations diophantiennes exponentielles](#). *Invent. Math.* **78** (1984), no. 2, 299–327. Zbl [0554.10009](#) MR [0767195](#)

- [Ma 25] G. MALLE, Zeros of S -characters. 2025, arXiv:2408.16785v1.
- [MNO 00] G. MALLE, G. NAVARRO and J. B. OLSSON, Zeros of characters of finite groups. *J. Group Theory* **3** (2000), no. 4, 353–368. Zbl 0965.20003 MR 1790334
- [PAR] PARIS/GP. Available at <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>, visité le 29 mai 2025.
- [Se 93] J.-P. SERRE, Gèbres. *Enseign. Math. (2)* **39** (1993), no. 1-2, 33–85. Zbl 0810.16039 MR 1225256
- [Se 98] J.-P. SERRE, *Représentations linéaires des groupes finis*. deuxième édition refondue, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1971. Zbl 0223.20003 MR 352231
- [Se 04] J.-P. SERRE, On the values of characters of compact Lie groups. In *Algebraische gruppen*, edited by M. Brion and J. C. Jantzen, pp. 666–667, Oberwolfach Rep. 1, EMS Press, 2004.
- [St 16] R. STEINBERG, *Lectures on Chevalley groups*. Univ. Lecture Ser. 66, American Mathematical Society, Providence, RI, 2016. Zbl 1361.20003 MR 3616493
- [We 26] H. WEYL, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. III. *Math. Z.* **24** (1926), no. 1, 377–395. Zbl 52.0116.02 MR 1544770
- [Zh 95] È. M. ZHMUD, On one type of nonnegattve generalized characters of a finite group. *Ukr. Math. J.* **47** (1995), no. 10, 1526–1540.

(Reçu le 16 novembre 2024)

Jean-Pierre SERRE, Collège de France, 11 Place Marcelin Berthelot, 75231 Paris, France;
e-mail: jpserre691@gmail.com