Elemente der Mathematik 80 (2025), 132–136
DOI 10.4171/EM/567

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2026 erbeten und können auf postalischem Weg bis zum 31. Dezember 2025 an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Ab 1. Januar 2026 können die Lösungen per Post an

Martin Lukarevski, Kosta Novakovik 46, 3-7, 1000 Skopje, Nordmazedonien

oder an die E-Mail-Adresse martin.lukarevski@ugd.edu.mk gesandt werden.

Aufgabe 1461: Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC mit Umkreis u. Die äussere Winkelhalbierende w_γ^* in C schneide u in einem weiteren Punkt D. Ferner sei H ein beliebiger Punkt auf der inneren Winkelhalbierenden w_γ. Die zu HA senkrechte Gerade durch A schneide w_γ^* in E, die zu HB senkrechte Gerade durch B schneide w_γ^* in F. Zeige, dass D die Strecke EF halbiert.

Bernhard Ruh, Zuchwil, CH

Aufgabe 1462: Berechne den Wert des Integrals

$$I(a) = \int_0^\pi \frac{x}{1 + a\sin(x)}\,dx, \quad a > -1.$$

Michael Vowe, Therwil, CH

Aufgabe 1463 (Die einfache dritte Aufgabe): Die beiden endlichen Körpererweiterungen $\mathbb{Z}_5(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Z}_5(\sqrt{3})$ haben jeweils 25 Elemente und sind daher zueinander isomorph. Man konstruiere einen Isomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z}_5(\sqrt{2}) \to \mathbb{Z}_5(\sqrt{3})$ (mit den üblichen Eigenschaften $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$) unter Benutzung des Elements $\alpha = 2 + \sqrt{2}$, welches den erstgenannten Körper durch fortlaufendes Potenzieren erzeugt.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2024

Aufgabe 1449. Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ zeige man

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \binom{2n+1}{k} \binom{k-1}{2} 2^{k-3} = n^2.$$

Raymond Mortini, Metz, F

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Lösungen von folgenden 18 Lesern eingetroffen: Ulrich Abel (Friedberg, D), Necdet Batır (Nevşehir, TR), Hans Brandstetter (Wien, A), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Myriam Ounaïes (Strasbourg, F), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Seán M. Stewart (Thuwal, SA), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Fast alle können die Reihe als Wert eines speziellen Polynoms erkennen. Am prägnantesten bringt dies *Ulrich Abel*, dessen Lösung wir folgen, zum Ausdruck.

Nach der binomischen Formel gilt

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^{k-1} = \frac{(x+1)^{2n+1}-1}{x}.$$

Zweimaliges Differenzieren ergibt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (k-1)(k-2) x^{k-3} \\ = \frac{(2n+1)2n(x+1)^{2n-1}}{x} - 2\frac{(2n+1)(x+1)^{2n}}{x^2} + 2\frac{(x+1)^{2n+1}-1}{x^3}.\end{aligned}$$

Schliesslich führt Division durch 2 und Einsetzen von $x = -2$ zu

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \binom{k-1}{2} (-2)^{k-3} = \frac{1}{2}\left((2n+1)n - \frac{2n+1}{2} + \frac{1}{2}\right) = n^2,$$

womit die Identität der Aufgabe gezeigt ist.

Bemerkung. Mit der gleichen Methode hat *Bernhard Ruh* die Summen auch für den Fall $2n$ ausgewertet und erhält

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \binom{2n}{k} \binom{k-1}{2} 2^{k-3} = -n(n-1).$$

Aufgabe 1450. Ersetzt man bei einem Ikosaeder eine Fläche und ihre drei Nachbarflächen durch drei Quadrate mit einer gemeinsamen Ecke, so erhält man ein konvexes Polyeder aus 16 gleichseitigen Dreiecken und drei Quadraten, wovon man sich durch «Basteln» aus einem Netz leicht überzeugen kann. Man beweise, dass ein solches Polyeder nicht existiert.

Rolfdieter Frank, Koblenz, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 8 Leser haben Beiträge zugesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Gerhard Wanner (Genève, CH).

Hier muss man aufpassen, dass man sich die Aufgabe nicht zu leicht macht, da das Ikosaeder ohne die vier Dreiecke nicht starr ist. Deshalb bauen alle Löser den Körper von den drei starren Quadraten beginnend auf und zeigen so die Unmöglichkeit. Wir folgen den Ausführungen von *Bernhard Ruh*.

Da topologisch nichts gegen ein solches Polyeder spricht, muss der Widerspruch von den metrischen Eigenschaften abgeleitet werden. Wir bauen daher das Polyeder in einem Koordinatensystem beginnend mit den drei Quadraten $ABCD$, $ABEF$ und $ADGF$ auf mit

$$\begin{aligned} &A(0,0,0),\ B(2,0,0),\ C(2,2,0),\ D(0,2,0),\\ &E(2,0,2),\ F(0,0,2),\ G(0,2,2). \end{aligned}$$

An die Kanten BC und BE fügen wir anschliessend zwei gleichseitige Dreiecke nach aussen mit Kantenlänge 2 und gemeinsamer Kante BI an. Ein entsprechendes Vorgehen für die Kanten FE und FG führt zur Ecke J, für die Kanten DG und DC zur Ecke K mit

$$I(2+\sqrt{2},1,1),\ J(1,1,2+\sqrt{2}),\ K(1,2+\sqrt{2},1).$$

Nun müssen an die Kanten EI bzw. EJ gleichseitige Dreiecke EIL bzw. EJL mit einer gemeinsamen Kante EL angefügt werden (Abbildung 1). Die Ecke L liegt also auf den Mittelnormalebenen von EI und von EJ, also auf deren Schnittgerade. Die Bedingung $LE = 2$ liefert nach einer einfachen Rechnung einerseits die Ecke $L(2,2,2)$, die aber zu einem Polyeder mit 3 Quadraten und nur 12 Dreiecken führt. Als zweite Lösung findet man

$$L(u,v,u), \quad u = \frac{12\sqrt{2}+30}{17}, \quad v = \frac{16\sqrt{2}+6}{17}.$$

Ganz entsprechend ergeben sich die Ecken $M(u,u,v)$ und $N(v,u,u)$. Das Polyeder kann nun durch die 4 Dreiecke ILM, JLN, KMN und LMN vervollständigt werden. Es besteht wie verlangt aus 3 Quadraten und 16 Dreiecken, allerdings sind wegen

$$LM = LN = MN = \sqrt{2}(u-v) = \frac{8}{17}(3\sqrt{2}-1) < 2$$

die letzten 4 Dreiecke nicht mehr kongruent zu den ersten 12.

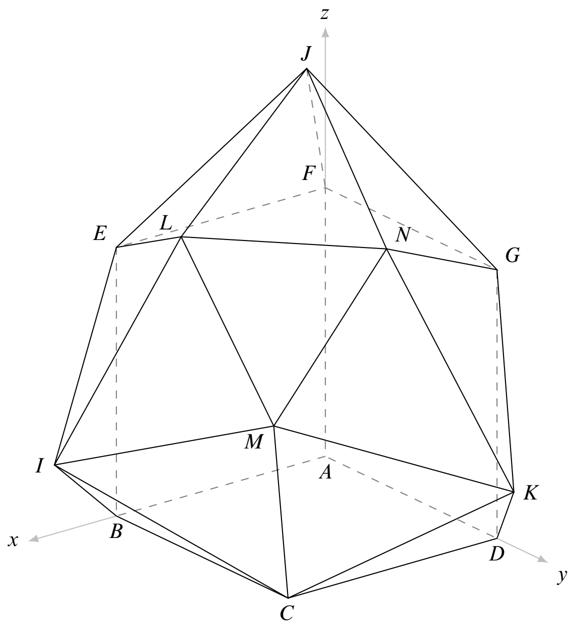

Abbildung 1

Aufgabe 1451 (Die einfache dritte Aufgabe). Seien eine Ellipse E mit den Brennpunkten A und B und zwei zueinander rechtwinklig stehende Tangenten t_1 und t_2 an E gegeben. Weiter seien a_1 und a_2 die Abstände vom Brennpunkt A zu t_1 und t_2 und analog b_1 und b_2 die Abstände vom Brennpunkt B. Zeige, dass dann $a_1 b_1 = a_2 b_2$ gilt.

Lajos László, Budapest, H

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden 17 Lesern eingegangen: Klaus Bickel (Freiburg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Oliver Gloor (Zürich, CH), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Leser zeigen, dass das Produkt der Abstände der Brennpunkte zu den Tangenten unabhängig von der Wahl der Tangente ist, was im Wesentlichen schon seit Apollonius bekannt ist, wie *Gerhard Wanner* ausführt. Sind die zwei Tangenten senkrecht zueinander, lässt sich die Behauptung der Aufgabe wesentlich kürzer zeigen. Wir folgen den Ausführungen von *Oliver Gloor*.

Seien P_1 und P_2 die Berührungspunkte der Tangenten mit der Ellipse und seien einerseits d und e und andrerseits f und g die Abstände von P_1 und P_2 zu den Ellipsenbrennpunkten (Abbildung 2).

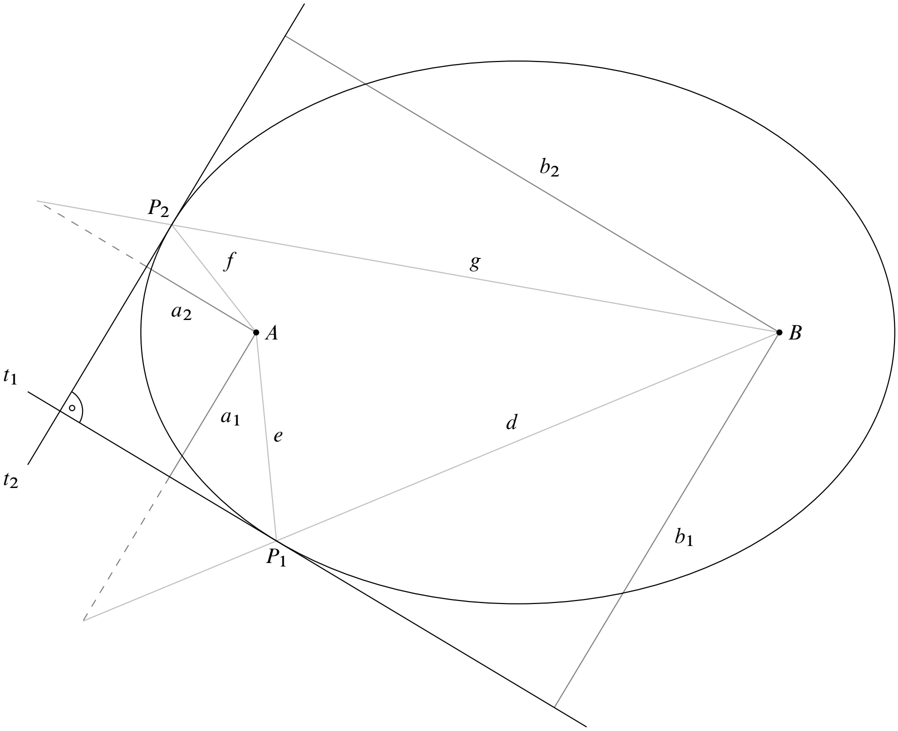

Abbildung 2

Aufgrund der Ellipseneigenschaft gilt $d + e = f + g$. Spiegelt man den Punkt A an t_1 bzw. t_2, so kann das Quadrat der linken Seite mittels Pythagoras geschrieben werden als

$$(d+e)^2 = (a_1+b_1)^2 + (b_2-a_2)^2,$$

das Quadrat der rechten Seite als

$$(f+g)^2 = (a_2+b_2)^2 + (b_1-a_1)^2.$$

Somit gilt für die Differenz dieser beiden Quadrate

$$\begin{aligned} 0 = (d+e)^2 - (f+g)^2 &= (a_1+b_1)^2 + (b_2-a_2)^2 - (a_2+b_2)^2 - (b_1-a_1)^2 \\ &= 4a_1b_1 - 4a_2b_2, \end{aligned}$$

was die Behauptung der Aufgabe beweist.

Bemerkung. Mit der gleichen Idee kann auch gezeigt werden, dass das Produkt der Abstände der Brennpunkte von der Tangente unabhängig von der Tangente ist. Hat die Ellipse die Halbachsen $a \geq b$ und ist $2c$ der Abstand der beiden Brennpunkte, so gilt

$$(2a)^2 = (d+e)^2 = (a_1+b_1)^2 + (2c)^2 - (b_1-a_1)^2.$$

Wird $b^2 = a^2 - c^2$ eingesetzt, so ergibt sich $a_1b_1 = b^2$.