
Manchmal dauert es länger. Saly Ruth Struiks Artikel in „Elemente der Mathematik“

Klaus Volkert

Klaus Volkert studierte in Heidelberg und Saarbrücken Mathematik, Physik und Philosophie. Er erlangte die Promotion in Saarbrücken und die Habilitation für Geschichte der Mathematik in Heidelberg. Nach dem Schuldienst in Völklingen (Saar) und Verlagstätigkeit beim Bibliographischen Institut wurde er Akademischer Rat an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg. Es folgten Professuren in Frankfurt a. M., Köln und Wuppertal. 2020 führte ihn ein Forschungsaufenthalt ans FIM der ETH Zürich. Seit 2020 ist Klaus Volkert im Ruhestand, pflegt aber weiter einen Lehrauftrag für Geschichte der Mathematik an der Universität Luxemburg.

1 Wie alles anfang

Im September 1955 erhielt Prof. Paul Bernays, wohnhaft in der Bodmerstraße 11 in Zürich 2, einen Brief aus den USA.¹

Dear Prof. Bernays

A rather long time, since we last got in touch with each other – in fact a life time, because my children are all grown up. May I impose on you with the following

¹Der Briefwechsel von Saly Ruth Struik und Paul Bernays befindet sich im Hochschularchiv der ETH Hs 975 : 4428–4487. Daneben gibt es unter der Signatur Hs 974 : 257 Manuskripte von Ruth Struik. Weitere Dokumente finden sich im Nachlass von Dirk Struik im Archiv des MIT in Boston (MC-0418), Boxes 38 und 39.

Im Heft 6 der «Elemente der Mathematik», ausgegeben am 10. November 1977, erschien ein Artikel von Saly Ruth Struik mit dem Titel «Flächengleichheit und Cavalierische Gleichheit von Dreiecken» – die letzte von Paul Bernays vor seinem Tod betreute Publikation. Dieser Artikel hatte eine bemerkenswerte Vorgeschichte. Sie zeigt, wie sich eine Mathematikerin außerhalb der Community stehend ab Mitte der 1950er Jahre um eine Publikation ihrer Ideen bemühte. Dabei war ihr Paul Bernays eine große Hilfe. In der vorliegenden Arbeit geht der Autor auch auf die bislang verschollene Dissertation von Saly Ruth Ramler und einige ihrer mathematischen Inhalte ein, die zum Artikel von 1977 führen. Schließlich werden zwei interessante Sätze über maßgleiche Dreiecke von R. Struik und ihre Ideen, wie die Begriffe flächen- und volumengleich gefasst werden können, vorgestellt.

question: Hilbert in the new edition of the “Grundlagen” [siebte Auflage von 1930, K. V.] only mentions Dehn’s proof on the tetrahedron with the remark that the 3dimensional problem will, as Dehn says, have to be treated differently from the 2dimensional, t. i. with the help of the Cavalieri principle.

Coming Christmas I like to go before the Amer. Math. Soc. with an affine axiomatics of equality of area and volume (triangle and tetrahedron). Some of it, that leads to the formulation I spoke on in Kingston (1953), Canada, and Pittsburgh (1954). Brouwer was then in Kingston visiting the Canadian congress.

Whatever I find in literature on affine axiomatics is, when it comes to area & volume or evasive or hopping over conveniently to Euclidean notions.

Could you advise me otherwise? This seems to me an obvious gap in the affine literature and an obvious gap in general too – because the theory of equality of area & volume does not need the right angle – nor the qualities of a solid body, being cut up into parts and moved around in order to show the equality of volume with an other body. [...]

I hope this finds you in good health as we both are in spite the merciless habit to add every year a unit to one’s age which one, if truthful, has to confess to. And I hope seeing you one of these days in Cambridge – lecturing at Harvard or M.I.T. at any rate before “uns im Herbst der Sensenmann ruft”.

Most cordially yours

Ruth Struik



Abbildung 1. Dr. Saly Ruth Ramler 1921 (Quelle: Tschechisches Nationalarchiv). Es handelt sich um ein Passfoto (vgl. Bečvářová, M.: Saly Ruth Struik, 1894–1993 (The Mathematical Intelligencer 40, No. 4 (2018), 81)).

Es gibt eine Anmerkung unter diesem Brief, das entsprechende Anmerkungszeichen fehlt allerdings im Text. „1.) Veblen & Young, Hölder, Artin, Enriques, Pickert.“ Offensichtlich bezog sich diese Notiz auf die Literatur, von der im Brief die Rede war.

Verfasst hatte diesen Brief die in Kolomea (Galizien, heute Kolomyja in der Ukraine) geborene und in Prag aufgewachsene Saly (Rufname: Salča) Ruth Ramler (1894–1993), verheiratete Struik (vgl. Abbildung 1), Ehefrau des Mathematikers und Mathematikhistorikers Dirk Struik (1894–2000).² Sie entstammte einer nicht orthodoxen jüdischen Kaufmannsfamilie; ihre Muttersprache war Deutsch. Nach dem Besuch der Sekundarschule für Mädchen in Prag legte sie dort das Abitur („Matura“) ab und studierte dann von 1914 bis 1919 Mathematik und Physik an der Deutschen Universität Prag, wo sie 1919 mit der Dissertation „Geometrische Darstellung und Einteilung der Affinitäten in der Ebene und im Raume. Dreiecks- und Tetraederinhalt“ promovierte. Gutachter waren Georg Pick (1849–1942) und Gerhard Kowalewski (1876–1950); am 19. November legte sie ihre Prüfung in Mathematik ab, Prüfer waren Pick, Kowalewski und der Physiker und Philosoph Philipp Frank (1884–1966), Arbeit und Prüfung wurden mit ausgezeichnet bewertet. Das Rigorosum in Philosophie nahmen am 11. Dezember 1919 Christian von Ehrenfels (1859–1932) und Oskar Krause (1872–1942) ab, auch hier lautete das Prädikat ausgezeichnet.³

2 Die Dissertation

Die Vorgeschichte ihrer Dissertation deutete die Autorin in einem Brief an Bernays vom 22. März 1976 an⁴:

Over 50 years ago giving a talk on axiomatics of affine geometry, Prof. Georg Pick said “It will serve as dissertation, if I add the same in 3 dimensions.” I did and he and Prof. Gerhard Kowalewski accepted the paper as dissertation summa cum laude.

G. Pick arbeitete, u. a., teilweise zusammen mit W. Blaschke, im Bereich der affinen Differentialgeometrie⁵, eine Publikation von seiner Seite zur Axiomatik ist allerdings

²Vgl. Bečvářová, M.: Saly Ruth Struik, 1894–1993 (The Mathematical Intelligencer 40, No. 4 (2018), 79–85) sowie dieselbe: Women and Mathematics at the Universities of Prague. In: Against all Odds, herausgegeben von E. Kaufholz-Soldat und N. Oswald (Cham: Springer, 2020), 173–211. Der Sensenmann bewies Geduld bei Ruth Struik – und erst recht bei ihrem Ehemann.

³Vgl. Bečvářová, M.: Saly Ruth Struik, 1894–1993 (The Mathematical Intelligencer 40, No. 4 (2018), 79–85), 81, wo das entsprechende Dokument abgebildet ist. Als Namen nennt dieses Saly Ramler, die Heiratsurkunde kennt Dr. Salča Ruth Ramlerová, die Briefe an Bernays unterzeichnete sie mit Ruth Struik und die Publikation 1977 erfolgte schließlich unter Saly Ruth Struik. Im Folgenden wird die Autorin der Dissertation Saly Ruth Ramler genannt, für spätere Zeiten dient dann Ruth Struik als Namen. Diesen Vornamen verwandte auch ihr Ehemann.

⁴Bibliothek ETH-Hochschularchiv Hs 975 : 4468.

⁵Vgl. Blaschke, W.: Differentialgeometrie II. Affine Differentialgeometrie, herausgegeben von K. Reidemeister (Berlin: Springer, 1923). Weitere Namen zur affinen Differentialgeometrie sind K. Reidemeister und L. Berwald, die Gruppe traf sich anfänglich im Prager Mathematischen Kränzchen, weil Blaschke 1913–1915 in Prag lehrte. Das Problem der axiomatischen Kennzeichnung affiner Räume war eines, das die Forschung einige Zeit beschäftigte; vgl. Karzel, H./Kroll, H.: Geschichte der Geometrie seit Hilbert (Darmstadt: WB, 1988), 16. Eine Liste der Publikationen von Pick findet sich in der Diplomarbeit Ludvíková, J.: Georg Pick (1859–1942): Život a hlavní směry jeho činnosti, Diplomová práce, Pedagogick 8 fakulta, Univerzita Karlova, Praha, 1997.

nicht bekannt. Im Briefwechsel Bernays – Ruth Struik wird nie wirklich deutlich gesagt, was denn affine Geometrie sei, z. B. indem entsprechende Axiome angegeben werden. Wichtigstes Beispiel für eine Begriffsbildung der affinen Geometrie sind bei Ruth Struik die Schrägspiegelungen, die sie affine Spiegelungen oder – in ihrer Dissertation – einfach nur Spiegelungen nennt. Wie wir sehen werden, war ihre Dissertation hinsichtlich der Axiomatik der affinen Geometrie viel klarer als ihr Briefwechsel.

Die Dissertation von Saly Ruth Ramler galt bislang als verschollen. Im Nachlass, der sich im Archiv des MIT befindet⁶, von Dirk Struik konnte ein Exemplar derselben ermittelt werden. Dabei handelt es sich um einen nicht-gebundenen, einseitig beschriebenen Durchschlag vermutlich des maschinengeschriebenen Originals der Dissertation, Formeln und Zeichnungen sind händig eingetragen, Titelblatt und Lebenslauf fehlen. Das ungebundene Exemplar diente Ruth Struik als Handexemplar, es enthält zahlreiche Kommentare und Korrekturen, die meist datiert sind. Die früheste stammt vom 19. März 1925, die Bemerkung ist in Deutsch verfasst. Spätere Kommentare besonders aus den Jahren 1952 und 1953 sind auf Englisch. Diese Anmerkungen zeigen, dass sich Ruth Struik trotz der Anforderungen, die ihre Familie mit drei Töchtern an sie stellte, und trotz gesundheitlicher Probleme⁷ bemühte, mit der Mathematik in Fühlung zu bleiben.

In der Vorbemerkung zu ihrer Dissertation nahm Saly Ruth Ramler ausdrücklich Bezug auf Hilberts Axiomatik. Die affine Geometrie beruhte für sie auf den Inzidenzaxiomen, den Anordnungsaxiomen und dem Parallelenaxiom (S. 1). Die Relation „ist parallel“ ist transitiv, wie die Autorin beweist. Oft wird „parallel sein“ bei ihr auch aufgefasst als „denselben Fernpunkt besitzen“; sie arbeitet somit auch in der projektiv erweiterten affinen Ebene. Als zusätzliches Axiom kommt im ebenen Fall noch der Desarguessche Satz in seiner affinen Form hinzu (S. 4). In einer handschriftlichen Notiz vom 19. März 1923 (S. 4r) finden sich einige Überlegungen Ramlers zu diesem Axiom, u. a. die Bemerkung, dass es im Raume – da dort beweisbar – nicht erforderlich ist, und dass es durch andere Formulierungen ersetzt werden könnte. Das sei wünschenswert, „da der Desarguesche Satz als Axiom zu kompliziert erscheint“ (S. 4r). Im Folgenden betrachten wir den ersten Teil der Dissertation und beschränken uns damit auf den ebenen Fall.

Wichtig ist der Begriff der Streckengleichheit. Er wird zuerst definiert für Strecken AB und $A'B'$ auf parallelen Geraden. Diese heißen streckengleich (modern: parallelgleich), wenn AA' parallel zu BB' ist, kurz (von uns) notiert als $AB \equiv A'B'$. Diese Relation ist transitiv, was erlaubt, den Begriff auf Strecken einer Geraden zu erweitern: Die kollinearen Strecken AB und $A'B'$ sind streckengleich, wenn es eine Strecke CD auf einer parallelen Geraden gibt, so dass $AB \equiv CD$ ist und $A'B' \equiv CD$. Die Autorin beweist dann einige Grundeigenschaft der Streckengleichheit. Es ist nun mit Hilfe von Parallelogrammen möglich, Strecken auf einer Geraden von einem gegebenen Punkt aus abzutragen: allerdings nur im Fall von Parallelen sowie auf ein und derselben Geraden.

Als nächstes wird die Gleichheit von Verhältnissen eingeführt. Liegen die Strecken AB , BC bzw. AB' , $B'C'$ auf zwei sich schneidenden Geraden, so ist die Bedingung für

⁶Dirk Struik Papers (MC-0418), Boxes 38 und 39. Die Dissertation findet sich in Box 39. Die Seitenangaben im Folgenden beziehen sich auf dieses Exemplar.

⁷Vgl. Bečvářová, M.: Saly Ruth Struik, 1894–1993 (The Mathematical Intelligencer 40, No. 4 (2018), 79–85), 84.

die Verhältnisgleichheit $AB : BC = A'B' : B'C'$, dass BB' parallel zu CC' ist (S. 3). Die Beziehung der Verhältnisgleichheit ist transitiv, zum Beweis benötigt man das Desarguesche Axiom (S. 3).

Mit der Transitivität der Verhältnisgleichheit kann man die Gleichheit $AB : AC = AC : AD$ erklären im Falle, dass A, B, C und D auf einer Geraden liegen (in dieser Reihenfolge). Zudem kann man wie gewohnt den Begriff (zentrische) Streckung einführen (S. 11). Schließlich ist es möglich, den Mittelpunkt einer Strecke zu definieren und damit den der Spiegelung (S. 18). Eine Spiegelung wird festgelegt durch ihre Spiegelachse s und die Richtung des projizierenden Parallelenbüschels, repräsentiert durch den Fernpunkt p , und kurz geschrieben als (s, p) .

Spiegelungen und Streckungen dienen als Grundbestandteile der ebenen Affinitäten: Eine solche wird definiert als „eine Paarung der Punkte der Ebene vermöge einer Spiegelung, einer Streckung oder der Aufeinanderfolge mehrerer solcher Operationen.“ (S. 18) Die Klassifikation der ebenen Affinitäten ist das Hauptziel des ersten Teils der Dissertation, die entsprechende Klassifikation im Falle des Raumes wird im zweiten, deutlich längeren Teil behandelt. Dabei werden Begriffe der projektiven Geometrie wie Projektivität, Involution und harmonisches Verhältnis verwendet sowie der Satz über die harmonische Teilung auf den Diagonalen eines vollständigen Vierecks (S. 18). Affinitäten bilden Punkte im Endlichen auf Punkte im Endlichen und Fernpunkte auf Fernpunkte ab, also können diese Punkte getrennt von denjenigen der Ferngerade betrachtet werden.

Ein erstes Ergebnis ist das folgende (S. 22–23):

Im Vorhergehenden ist durch Konstruktionsangabe folgendes bewiesen worden: Liegt eine Paarung der Punkte der Ebene vor, so dass Punkte eineindeutig in Punkte, Gerade in Gerade, parallele Gerade in parallele Gerade übergehen – und diese ist ja schon durch drei Punktepaaire, die nicht kollinear sind, festgelegt – so kann diese Zuordnung durch eine Streckung und mehrere Spiegelungen herbeigeführt werden, ist also definitionsgemäß eine Affinität.

Kurz: Jede Kollineation der Ebene ist eine Affinität. Die Klassifikation der Affinitäten beruht wesentlich auf der Betrachtung ihrer Fixpunkte. Es kann entweder keinen Fixpunkt geben, einen oder unendlich viele. Eine Affinität mit drei Fixpunkten ist die Identität, es sei denn diese Fixpunkte sind kollinear (dann gibt es eine Fixpunktgerade) oder erfüllen die ganze Ebene (im Falle der Identität). Die Fixpunkte können endliche Punkte sein oder solche der Ferngeraden. Weitere Merkmale, die zur Klassifikation herangezogen werden, sind die Erhaltung/Umkehrung der Orientierung sowie die Erhaltung des Flächeninhaltes (i. w. eine Verkettung von Spiegelungen). Neben den Grundbausteinen Spiegelungen und Streckungen treten in Ramlers Klassifikation (S. 24–44) u. a. die Verschiebung (zwei Spiegelungen mit parallelen Achsen und identischem Fernpunkt), die Punktspiegelung (ein endlicher Fixpunkt, alle Fernpunkte sind Fixpunkte) und die Affindrehung (mit nur einem Fixpunkt im Endlichen) auf; die Affindrehung führt zu einer Definition der Ellipse [S. 37]). Die Affinitäten, die den Flächeninhalt nicht erhalten, gehen aus denjenigen, die ihn erhalten, hervor, indem man eine geeignete Streckung nachschaltet.

Bleibt nachzutragen, was Saly Ruth Ramler in ihrer Dissertation zum Flächeninhalt sagt. Dieser Begriff wird für Dreiecke definiert: Zwei Dreiecke heißen flächengleich, wenn sie durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Spiegelungen ineinander überführt wer-

den können. Sehr viel mehr sagt die Dissertation nicht zu diesem Thema, insofern kann der Artikel von 1977 als eine sinnvolle Ergänzung derselben gelten. Allerdings führt Ramler in ihrer Dissertation noch eine Maßzahl für den Flächeninhalt von Dreiecken ein. Hierzu ist zuerst ein Einheitsdreieck auszuzeichnen. Dann kann man ein beliebiges Dreieck vermöge Schrägspiegelungen (siehe unten) in ein flächengleiches verwandeln, das dem Einheitsdreieck ähnlich ist. Das gesuchte Maß ist der Streckfaktor – der jetzt als Zahl aufgefasst wird – derjenigen Streckung, die das Einheitsdreieck auf das andere abbildet, nachdem man diese in eine geeignete Position gebracht hat.

Die von S. R. Ramler gegebene Definition des Flächeninhalts wird plausibel durch den Satz, dass zwei im Sinne von Grundseite mal Höhe maßgleiche Dreiecke mit gleicher Orientierung durch höchstens zwei affine Spiegelungen aufeinander abgebildet werden können. Bei entgegengesetzter Orientierung benötigt man drei Spiegelungen. Dieser Satz findet sich explizit u. a. in einem Manuskript von R. Struik, das auf den 21. Februar 1976 datiert ist. Er trägt dort die No. 7 und liefert laut Verfasserin die „Grundlage einer rein affinen Theorie und Axiomatik von Dreiecken gleichen Inhalts.“⁸ Einen Beweis gibt sie an dieser Stelle nicht. Wohl aber findet er sich bei S. R. Ramler in der Dissertation, nämlich als Sonderfall im Rahmen ihres Beweises, dass i. a. zwei Spiegelungen und eine Streckung genügen, um ein Dreieck auf ein anderes Dreieck abzubilden – und folglich alle Dreiecke affin verwandt sind. Da der spezielle Fall ihre konstruktive Vorgehensweise gut verdeutlicht, sei er wiedergegeben.

Gegeben seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit gleichem Flächenmaß und gleicher Orientierung (vgl. Abbildung 2). Man ziehe durch A die Parallele zu $A'B'$ und trage von A aus die Strecke $A'B'$ ab, Endpunkt sei D . Weiterhin verlängere man $A'B'$ zur Geraden. Ziehe jetzt DB , Schnittpunkt mit der verlängerten Geraden sei B_1 . Durch A konstruiere man die Parallele zu DB , Schnittpunkt mit der verlängerten Geraden $A'B'$ sei A_1 . Dann sind offensichtlich die Strecken $A'B'$, AD und A_1B_1 gleichlang. Durch die Mittelpunkte der Strecken AA_1 und BB_1 lege man die Spiegelachse s_1 . Die Richtung der zugehörigen Schrägspiegelung p_1 wird gegeben durch AA_1 oder auch BB_1 . Nun konstruiere man den Bildpunkt C_1 von C unter der fraglichen Schrägspiegelung. Die Höhe des Dreiecks $A_1B_1C_1$ bezüglich der Grundseite A_1B_1 stimmt mit der Höhe des Dreiecks $A'B'C'$ bezüglich der Grundseite $A'B'$ überein. Weiterhin verbinde man C_1 mit C' und lege durch die Mittelpunkte der Strecken C_1C' und A_1A' die Spiegelachse s_2 . Die Richtung der entsprechenden Schrägspiegelung p_2 wird gegeben durch A_1A' oder auch C_1C' . Aufgrund der Gleichheit der Höhen ist nämlich C_1C' parallel zu A_1A' . Diese zweite Schrägspiegelung bildet also C_1 auf C' ab, aber auch A_1 auf A' und B_1 auf B' . Die Orientierung kehrt sich zweimal um, kehrt also zum Anfang zurück. Wären die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ entgegengesetzt orientiert, so bräuchte man noch zusätzlich eine dritte Spiegelung. Die Darstellung bei S. R. Ramler (S. 15–17) ist recht knapp und lückenhaft, so erläutert sie z. B. gar nicht, wie der Punkt D zustande kommt. Die damaligen Gutachter haben daran keinen Anstoß genommen, vermutlich entsprach Ramlers Präsentation dem Stile der Zeit.

Der nachfolgende Teil der Dissertation widmet sich dann Fragen der Raumgeometrie. Er wird hier nicht im Detail betrachtet. Auf den Seiten 94 bis 97 gibt die Autorin eine

⁸Vgl. Brief an Bernays vom 25. Februar 1976 (Hs 975 : 4467), in dem R. Struik das Manuskript ankündigt.

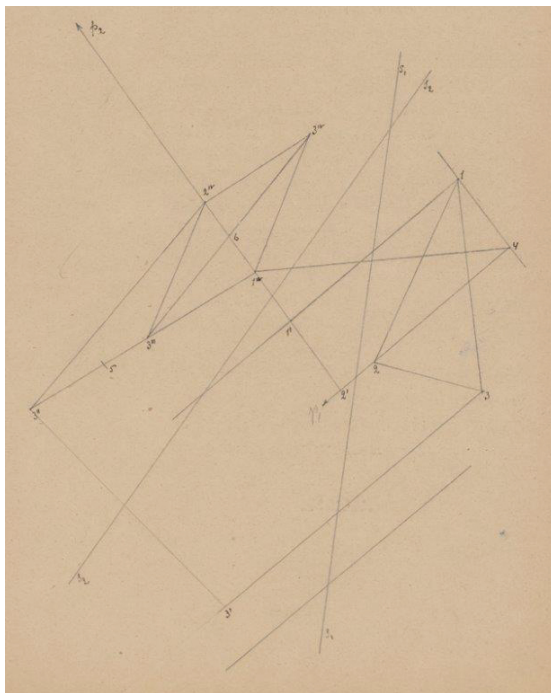


Abbildung 2. Zwei flächenmaßgleiche Dreiecke gleicher Orientierung können durch zwei Schrägspiegelungen aufeinander abgebildet werden (S. 16).

Zusammenfassung zu den Affinitäten des Raumes – ihr Hauptergebnis. Einen Ausschnitt aus dieser Klassifikation zeigt Abbildung 3.

Allerdings bleibt (ohne Beweis sozusagen) festzuhalten, dass der Anspruch, den Ruth Struik im zitierten Brief an P. Bernays erhob, nämlich die Axiomatik des affinen Raumes ausgearbeitet zu haben, doch recht missverständlich war: Sie arbeitete weniger an der Axiomatik als vielmehr mit ihr. Ihre Idee, Volumina vermöge von affinen Spiegelungen zu behandeln, wurde nicht gänzlich übersehen. Im Buch „Unvergängliche Geometrie“ von H. S. M. Coxeter heißt es:

Nach Saly Ruth Struik verfährt man kurz folgendermaßen: Man findet, daß zwei beliebige Tetraeder durch eine einzige affine Kollineation, die Parallelen in Parallelen überführt, aufeinander bezogen sind. [...] Man nennt zwei Tetraeder volumengleich, wenn sie durch eine äquivalente Kollineation, das ist eine gerade Anzahl affiner Spiegelungen, ineinander übergeführt werden können. Dies ist leicht vom Tetraeder auf ein Parallelepipiped auszudehnen, da ein solches Parallelepipiped in sechs volumengleiche Tetraeder zerlegt werden kann.⁹

⁹H. S. M. Coxeter: Unvergängliche Geometrie (Basel/Stuttgart: Birkhäuser, 1963), 273. Das englischsprachige Original „Introduction to Geometry“ erschien erstmals 1961. H. S. M. Coxeters Begriff von affiner Geometrie ist dem von R. Ramler ähnlich, insofern auch er die Anordnung voraussetzt.

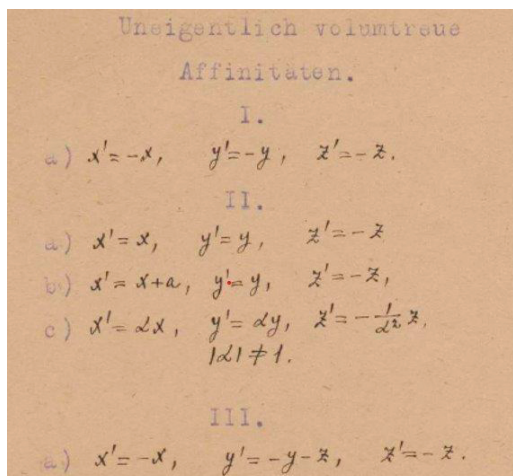


Abbildung 3. Ausschnitt aus der Liste der orientierungsumkehrenden und volumentreuen Affinitäten des Raumes (S. 95).

Coxeter weist in diesem Zusammenhang ausdrücklich auf die von Dehn aufgezeigten, beim geschilderten Zugang aber vermiedenen Schwierigkeiten der Lehre vom Volumen bei Polyedern hin (Stichwort: Dehnsche Invariante) – genauso, wie das R. Struik in ihrem ersten Brief an Bernays tat. Vermutlich hat sie Coxeters Bemerkung nicht gekannt. Andernfalls hätte sie sich den Hinweis auf sie wohl kaum in ihrem Briefwechsel mit Bernays entgehen lassen. Coxeter und das Ehepaar Struik kannten sich.¹⁰ Das geht aus dem Dank hervor, den Dirk Struik seinen „Lectures on Analytic and Projective Geometry“ voranstellte. „In preparing the manuscript I have had the advice of Mr. L. Cross, Dr. Ruth Struik, and especially of Professor H. S. M. Coxeter, to whom many thanks.“¹¹ In diesem Buch verteidigte er vehement die altmodische Geometrie und betonte ihren hohen Bildungswert.

Erst im Frühjahr 1977 erhielt Bernays eine Kopie der Dissertation von Saly Ruth Ramler. Es handelte sich allerdings nicht um eine des Originals¹², sondern um eine einer englischen Übersetzung, die Ruth Struik angefertigt hatte. Bernays studierte diese und gab Rückmeldung:

At regarding a bit your dissertation, I am missing a more strong reference to HILBERT's Streckenrechnung [...]. This Streckenrechnung amounts to a geometrical foundation of the calculus with segments (without reference to analysis) – and even based only on the suppositions of affine geometry. I have the impression that by a stronger reference to this Streckenrechnung, your dissertation would have become essentially simplified.

¹⁰H. S. M. Coxeter, geborener Brite, lebte und lehrte seit 1936 in Toronto.

¹¹D. Struik: Lectures on Analytic and Projective Geometry (Reading (Mass.)/Palo Alto/London: Addison Wesley, 1953), IV.

¹²Eine solche – damals sprach man von „a Xerox“ – findet sich im Nachlass von Dirk Struik, sie ist in weiten Teilen schwer lesbar und wurde vermutlich deshalb nicht an Bernays gesandt.

It is true that at the time when you wrote your dissertation, the Streckenrechnung had not yet the simplified form in which it was brought by ARNOLD SCHMIDT for the seventh edition of the “Grundlagen der Geometrie”.

It would be very welcome for me if you could indicate me the places in your dissertation where you are proving the theorems on affine reflections which you are mentioning in your new paper.¹³

Hätte Bernays die Dissertation früher erhalten, so wäre wohl manche Frage aus dem Briefwechsel gar nicht erst aufgetaucht.

In einem recht kurzen Abschnitt (S. 7–10) ihrer Dissertation entwickelte Saly Ruth Ramler auf der Basis der Strecken- und Verhältnisgleichheit sowie der Streckenabtragung eine Streckenrechnung (Addition, Subtraktion, Multiplikation von Strecken)¹⁴. Sie kommt zu dem Schluss (S. 10): „Damit ist ein axiomatischer Aufbau der Affingeometrie skizziert.“

Allerdings war es ein Ziel von Saly Ruth Ramler, die Streckenrechnung bei der Behandlung des Flächeninhalts zu vermeiden, wie sie mehrfach hervorhebt. Zudem lag ihr Interesse weder in den algebraischen Aspekten des Themas noch in einer axiomatischen Untersuchung, obwohl sie oft davon spricht. Ramler ging es vor allem um konkrete Konstruktionen ganz im Sinne der klassischen Geometrie.

3 Der weitere Gang der Dinge

1921 begann Saly Ruth Ramler nach Erwerb des Staatsexamens als Mathematiklehrerin an einer Prager Sekundarschule für Mädchen zu unterrichten, 1923 heiratete sie in ihrer Heimatstadt den in Delft ansässigen Differentialgeometer Dirk Struik¹⁵, den sie vermutlich bei der Jahrestagung der DMV im Vorjahr in Leipzig kennen gelernt hatte. Das Paar bereiste später mit Hilfe eines Rockefeller Stipendiums die Niederlande, Italien, Deutschland und Frankreich. In Italien arbeitete Ruth Struik beim dritten Band von F. Enriques' Euklid-Ausgabe „Gli Elementi d'Euclide e la Critica Antica e Moderna. Libro X“ (Bologna: Zanichelli, 1932) mit: „Traduzione di Maria Teresa Zapelloni. Note di Ruth Struik“. Sie verfasste somit die zahlreichen Anmerkungen im Textteil des Buches, eine beachtliche Leistung. In Deutschland hielten sich die Struiks in Göttingen auf. Im Vorwort zu Kleins „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert“ danken die Herausgeber R. Courant und O. Neugebauer Dirk Struik für Hilfe bei der Korrektur.

Im Jahr 1926 erschien „Die vierte Dimension“ von Henrik de Vries in deutscher Übersetzung bei Teubner in Berlin und Leipzig. Die Übersetzung hatte Ruth Struik erarbeitet.

¹³Brief Bernays an Ruth Struik 26. März 1977, Hs 975 : 4480. Die siebte Auflage der „Grundlagen“ erschien 1930, Hilbert dankte in seiner Vorrede Arnold Schmid für seine zahlreichen Beiträge.

¹⁴In einer handschriftlichen Notiz vom 13. Juli 1941 (notiert Echo Lake Camp) vermerkte sie dazu: „How could that sketchy part be treated more elaborately. Or should a projective geometry put ahead of the axiomatics.“ (S. 9r)

¹⁵Laut Heiratsurkunde waren beide Brautleute „ohne Religion“, vgl. Bečvářová, M.: Saly Ruth Struik, 1894–1993 (The Mathematical Intelligencer 40, No. 4 (2018), 79–85), 83.

Im Vorwort des Verfassers heißt es: „Frau Dr. Ruth Struik, die scharfsinnige Gemahlin des bekannten holländischen Differentialgeometers, hat aus eigenem Antrieb dem Verfasser den schmeichelhaften Vorschlag gemacht, die im Jahr 1926 erschienene zweite vermehrte und verbesserte Auflage der holländischen Originalausgabe ins Deutsche zu übertragen; [...]“. Im gleichen Jahr nahm Dirk Struik einen Ruf an das MIT in Boston an, das Paar lebte fortan in Belmont, einem Ortsteil von Boston. Ruth Struik stellte ihre Beschäftigung mit Mathematik zurück¹⁶ und widmete sich ihrer Familie, insbesondere den drei Töchtern Ruth Rebekka¹⁷, Anne und Gwendolyn¹⁸. Heute würde man vielleicht sagen, dass sich Ruth Struik nach der Familienphase in den 50er Jahren wieder verstärkt der Mathematik zuwandte, wovon der bereits zitierte Brief an Bernays aber auch ihre Teilnahme inklusive Vorträgen an Versammlungen der AMS zeugen.¹⁹

Die Struiks und Bernays²⁰ kannten sich aus gemeinsamen Tagen in Göttingen, wo letzterer ab 1919 mit Hilbert an mathematischen Grundlagenfragen und Logik arbeitete und sich die ersten im Rahmen ihrer Europareise längere Zeit aufhielten.²¹

Warum wohl wandte sich Ruth Struik gerade an Bernays? Wie wir gesehen haben, kannte man sich. Darüber hinaus hat Bernays nach Hilberts Tod dessen „Grundlagen der Geometrie“ für Neuauflagen bearbeitet, ergänzt und herausgegeben.²² Er war also gut informiert über dieses Werk und die darin angesprochenen Gebiete, hatte auch selbst eine Arbeit in diesem Umkreis publiziert: 1953 erschien sein Artikel „Über die Verwendung des Polygoninhaltes an Stelle eines Spiegelungsaxioms in der Geometrie (Planimetrie)“²³ –, was allerdings Ruth Struik noch nicht wusste, als sie den zu Beginn dieses Artikels zitierten Brief an Bernays schrieb.

¹⁶Dieser Entschluss fiel ihr nicht leicht, vgl. Bečvářová, M.: Saly Ruth Struik, 1894–1993 (The Mathematical Intelligencer 40, No. 4 (2018), 79–85), 84.

¹⁷Sie wurde Mathematikprofessorin an der Universität von Colorado. Vgl. ihren Artikel „Some Remarks on the Concept of Limit“ in: For Dirk Struik, herausgegeben von Cohen, Stachel und Wartofsky (Dordrecht: Reidel, 1974), 121–130.

¹⁸Sie ging nach Neuseeland und wirkte dort im Bildungswesen. Vgl. ihren Artikel „Pre-School Education and Its Role in Social Change: A New Zealand Example“ in: For Dirk Struik, herausgegeben von R. S. Cohen, J. J. Stachel und M. W. Wartofsky (Dordrecht: Reidel, 1974), 635–644.

¹⁹Nach Ruth Struiks Angaben. Diese lassen sich allerdings nicht anhand des Bulletins der AMS verifizieren. Vielleicht waren die Vorträge von Ruth Struik nicht Bestandteil des offiziellen Programms der Tagungen; an einer Stelle (Hs 975 : 4432) spricht sie selbst von einem „pre-Congress“ in Kingston (Kanada) im Jahr 1953.

²⁰Zu Bernays vgl. man Kahle, R./Sommaruga, G.: Paul Bernays: Eine Schlüsselfigur der Logik und Grundlagen der Mathematik (Leipzig: Hentrich und Hentrich, 2023). Bernays blieb immer im Singular, sprich: lebenslanger Jungeselle. Er lebte in Zürich mit seiner Schwester Marta zusammen, die im Sozialbereich bei der Stadt eine Anstellung fand und längere Zeit für das nötige Einkommen sorgte. Nach Zürich gezogen war Bernays, der die schweizerische Staatsbürgerschaft besaß, mit Mutter, zwei Schwestern und einer Tante.

²¹Vgl. Rowe, D.: Interview with Dirk Jan Struik (The Mathematical Intelligencer 11, No. 1 (1988), 14–26), 19. Dieses Interview enthält zahlreiche Informationen über Dirk Struik und einige über seine Ehefrau Ruth. Dirk Struik erzählte u. a., dass sich Ruth und er in Göttingen mit Bernays zu einem Spaziergang am Sonntagmorgen verabreden wollten. Dieser erklärte, er müsse erst Hilbert, genannt „Herr Geheimrat“, fragen, ob er ihn entbehren könne.

²²Ob Ruth Struik hiervor wusste, ist unklar. Die erste dieser von Bernays offiziell bearbeiteten Auflagen, die achte, erschien 1956. Am 13. Dezember 1957 bestätigte Ruth Struik, dass sie diese neue Ausgabe in Boston gefunden habe.

²³Elemente der Mathematik 8 (1953), 102–107.

4 Der Artikel und seine Vorläufer

Bernays antwortete am 5. Oktober 1955 mit einiger Verspätung auf den eingangs zitierten Brief von R. Struik.²⁴ Er pflichtete Ruth Struik hinsichtlich des Interesses der von ihr gestellten Fragen bei. Offensichtlich erwartete er eine Abhandlung, die ähnlich wie sein Artikel von 1953 auf den axiomatischen Rahmen Hilberts direkt Bezug nahm, also eine axiomatische Untersuchung.

Soviel ich sehe, muss man in der affinen Begründung manches axiomatisch festlegen, was in der Kongruenzgeometrie beweisbar ist. Ich nehme an, dass die von Ihnen ausgeführte Axiomatik eine explizite Heranziehung des Zahlbegriffes vermeidet – entsprechend wie die Hilbert'sche Begründung der Flächeninhaltslehre dies im Rahmen der Kongruenztheorie leistet.

Es sollte aber anders kommen. Weil er selbst sich mit dem Thema nicht ausgiebig beschäftigt habe, riet Bernays, sich an Prof. Wilhelm Süss in Freiburg zu wenden. Dieser organisierte Tagungen zur Geometrie am Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach und habe auch selbst zur Inhaltslehre publiziert.²⁵ Es erstaunt vielleicht aus heutiger Sicht, dass Bernays, der selbst als Jude unter dem Dritten Reich zu leiden hatte – er verlor seine Anstellung als Assistent in Göttingen aus rassischen Gründen – Saly Ruth Ramler, deren Bruder in Auschwitz ermordet wurde und deren Lehrer Georg Pick in Theresienstadt starb, den doch hochrangigen Funktionär der NS-Wissenschaft, Leiter des Reichsinstituts für Mathematik und Rektor der Freiburger Universität, Wilhelm Süss als Ansprechpartner empfahl. Bernays selbst unterhielt allerdings nach dem Krieg eine umfangreiche Korrespondenz mit Süss²⁶ und nahm an mehreren Tagungen in Oberwolfach teil, scheint also keine Probleme mit Süss' Vergangenheit gehabt zu haben. Der bereits erwähnte Artikel von Bernays war die Ausarbeitung eines Vortrags, den dieser 1952 bei der oben erwähnten Pfingsttagung gehalten hatte.

Am 25. September 1955 teilte Bernays Ruth Struik mit, dass er ihr Manuskript „On triangles of equal area“ an Louis Locher-Ernst, Begründer und Redakteur der „Elemente der Mathematik“, weitergegeben habe.²⁷ Anscheinend hatte R. Struik mit ihrem ersten Brief einen Entwurf mitgeschickt. Locher-Ernst wünschte eine gründliche Überarbeitung und Abrundung sowie eine Übersetzung ins Deutsche.

²⁴Bibliothek ETH-Hochschularchiv Hs 975 : 4430.

²⁵Vgl. die Dissertation von Süss „Begründung der Inhaltslehre im Raum ohne Benutzung von Stetigkeitsaxiomen“ (Frankfurt, 1921), geschrieben bei L. Bieberbach.

²⁶Bibliothek ETH-Hochschularchiv Hs 973 : 4491–4508. Die Initiative zum Briefwechsel ging von W. Süss aus, der Bernays mit Schreiben vom 23. Januar 1949 zu wissenschaftlichen Besprechungen im März/April 1950 nach Oberwolfach einlud; u. a. ging es ihm darum, Bernays als Mitarbeiter für ein „Handbuch der Mathematik“, das er herausgeben wollte, zu gewinnen (Hs 975 : 4488). Auch eine von Bernays zusammen mit Bachmann geleitete Tagung über Grundlagen der Geometrie, die Pfingsttagung 1952, wurde von Süss initiiert (Brief an Bernays 24. Januar 1952; Hs 975 : 4489). Er bot Bernays an, Teilnehmer einzuladen (auf deren Rechnung, 5,50 DM kostete ein Tag). Die Tagung selbst fand vom 30. Mai bis 8. Juni in Oberwolfach laut Vortragsbuch unter dem Titel „Tagung über Logik und Grundlagenforschung“ statt, Leiter waren Bernays und Fr. Bachmann, Einladungen erhielten u. a. Ackermann, Behmann, Hermes, Lorenzen.

²⁷Dieser Brief fehlt in Bernays' Nachlass, er findet sich nur im Nachlass von D. Struik. Auch das Manuskript ist verschollen, vermutlich hat es Bernays nicht mehr zurückbekommen.

Ruth Struik antwortete schnell (am 14. Oktober 1955)²⁸ und gab einen wichtigen Hinweis, nämlich auf ihre Dissertation. Um zu sehen, was in jüngster Zeit in Deutschland auf dem Gebiet der affinen Geometrie geforscht worden war, hatte sie die FIAT-Reviews²⁹ studiert mit dem Fazit: „But so far I do not see any duplication to my work.“ Vermutlich fehlte es Ruth Struik an Ansprechpartnern, die ihr Informationen über die aktuellen Forschungen im Bereich der affinen Geometrie liefern konnten. Die Idee einer Publikation lag nun nahe. Anfänglich dachte Ruth Struik vielleicht gar nicht in erster Linie an die „Elemente der Mathematik“, sie erwähnte vielmehr die „Comptes rendus“ der Pariser Akademie, deren Mitglied J. Hadamard ihr bekannt war. Bernays selbst war es, der am 17. Januar 1958 die schweizerische Zeitschrift ins Spiel brachte.

Erst viel später, am 2. Januar 1975, erhielt Bernays wieder ein Manuskript: nämlich einen von Dirk Struik in sehr schöner Handschrift niedergeschriebenen Entwurf in englischer Sprache für R. Struiks Veröffentlichung, die schließlich im November 1977 in „Elemente der Mathematik“ erschien. Vermutlich übernahm Dirk Struik die Niederschrift, weil die Handschrift seiner Frau ziemlich unordentlich und sehr raumgreifend war, wie ihre Briefe zeigen. Während der rund 21 Jahre mit fast 70 ausgetauschten Briefen und Karten diskutierten Ruth Struik und Bernays diverse Themen, von denen bei weitem nicht alle mit dem Artikel zusammenhingen, dessen Redaktion schließlich Bernays übernahm. Viele Dinge kamen zur Sprache, etwa die zahlreichen Reisen der Struiks und Dirk Struiks Schwierigkeiten mit der US-Regierung als engagierter Marxist, auch sein zeitweiliges Lehr- und Reiseverbot. Zudem gab es lange Unterbrechungen in der Korrespondenz.

5 Zum Inhalt des Artikels

Das besagte Manuskript enthält zwei interessante und weitgehend unbekannte Sätze nebst einigen Anmerkungen sowie die Beweise der Sätze. Von affiner Geometrie und Axiomatik ist nicht mehr die Rede, nur noch von affinen Spiegelungen, also von Schrägspiegelungen.

Satz 1 besagt: Besitzen zwei Dreiecke t_1 und t_2 das gleiche Flächenmaß (im Sinne von halbes Produkt aus Grundseite mal Höhe), so gibt es gleichlange Strecken m_1 in t_1 und m_2 in t_2 , die jeweils eine Ecke des Dreiecks mit einem Punkt der gegenüberliegenden Seite verbinden und die Schnittpunkte mit den Seiten diese im gleichen Verhältnis teilen.

Satz 2 besagt: Haben zwei Dreiecke t_1 und t_2 das gleiche Flächenmaß, so existieren strikte Zerlegungen der beiden Dreiecke in jeweils zwei Teildreiecke p_1, p_2 bzw. P_1, P_2 , so dass p_i maßgleich P_i ist für $i = 1, 2$ und die Teildreiecke gleichlange Grundseiten und Höhen besitzen

Hiervon gelten offensichtlich auch die Umkehrungen.

²⁸Bibliothek ETH-Hochschularchiv Hs 975 : 4431.

²⁹Die Field Information Agency (FIAT), eine Einrichtung der Alliierten, gab bis 1948 mehrere Schriftenreihen heraus, in denen die wissenschaftliche Forschung in Deutschland in den Bereichen Mathematik, Medizin, Naturwissenschaften und Technik während des Krieges dokumentiert werden sollte. Eine deutsche Teilausgabe erschien unter dem Titel „Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939–1946: für Deutschland bestimmte Ausgabe der FIAT Review of German Science“ (Wiesbaden und Weinheim: Dieterich/Verlag Chemie, 1948). Die die reine Mathematik betreffenden Bände wurden von W. Süss und „seinem“ Forschungsinstitut herausgegeben.

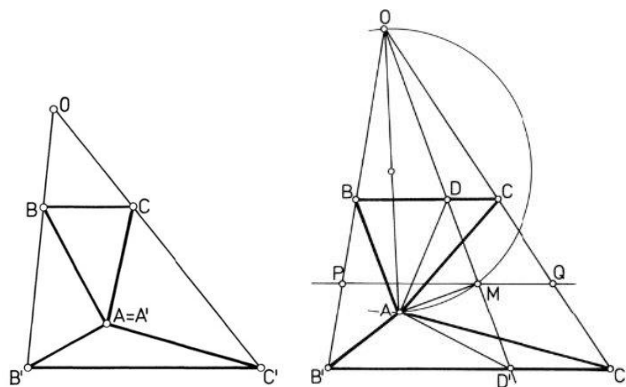


Abbildung 4. Zum Beweis von Satz 1 (Quelle: Struik 1977, 139).

Diese Sätze lassen sich konstruktiv mit Zirkel und Lineal beweisen, was Bernays sowohl in seinen Briefen als auch in der Druckfassung von 1977 am Anfang des Artikels betont. Ruth Struik hat das auch gesehen. Sie wies darauf hin, dass die fraglichen Sätze Nebenprodukte ihrer Beschäftigung mit der affinen Theorie gewesen seien. „But now [Sommer 1965]: After many years of work in the affine field [...] I formed the equivalent of an affine Theorem, to be in eukclidean [sic!] geometry on aera; so that Euclid should have known it, so simple. And Hilbert would not have gone for pages into arithmetisation in the theory of area, if he had known it.“³⁰ Was mit der letzteren Bemerkung gemeint ist – es geht ja um Hilberts Streckenrechnung – erläuterte Ruth Struik an anderer Stelle: „Weil die Flächengleichheit von Dreiecken durch affine Spiegelungen festgestellt werden kann, und das Verhältnis von 2 Dreiecken durch ein Paar paralleler Strecken, so kann die Inhaltstheorie von Dreiecken ohne Arithmetisierung begründet werde.“³¹ Das war allerdings sicherlich nicht Hilberts einziges Motiv bei der Entwicklung seiner Streckenrechnung.

Anfänglich hoffte sie wohl noch, diese Theorie ausarbeiten und veröffentlichen zu können. Sie musste dann aber feststellen:³²

Time is running out! Will you help me to get at least my one theorem known on triangles. Nobody will read or bother to check up on the results by Ruth Struik.

Doch nun zurück zu ihren Sätzen. Der Beweis von Satz 1 verläuft folgendermaßen (vgl. Abbildung 4): Man lege die beiden Dreiecke so, dass sie eine gemeinsame Ecke $A = A'$ bekommen und die gegenüberliegenden Seiten parallel sind. Dann ziehe man zu diesen beiden Parallelen die Mittellinie PQ und die Geraden durch jeweils zwei entsprechende Eckpunkte der beiden Dreiecke. Deren Schnittpunkt sei O . Verbindet man nun A mit O und zieht über dieser Strecke den Thales-(Halb-)Kreis, so schneidet dieser

³⁰Brief an Bernays, Sommer 1965 (genaue Datierung fehlt), Hs 975 : 4444.

³¹Undatiertes Manuskript Hs 974 : 257, S. 17. Analoges leistet bei Hilbert die Zerlegungs-/Ergänzungsgleichheit.

³²Brief an Bernays, Sommer 1967, Hs 975 : 4444.

die Mittelparallele in M . Nun ziehe man OM ; man erhält mit den parallelen Dreiecksseiten die Schnittpunkte D und D' . Dann sind AD und AD' die gesuchten Strecken m_1 bzw. m_2 , wie man mit Hilfe der rechtwinkligen Dreiecke DMA und $D'MA$ zeigt.

Satz 2 folgt nun aus Satz 1, denn die konstruierten Strecken AD und AD' liefern die gewünschten Zerlegungen. Die Gleichheit der Verhältnisse ergibt sich aus dem Strahlensatz. In den zusätzlichen Bemerkungen wird erläutert, wie man mit Hilfe von Schrägspiegelungen die Maßgleichheit zweier Dreiecke überprüfen kann. Man transformiere mit Hilfe einer Schrägspiegelung das eine der beiden maßgleichen Dreiecke in ein solches, dessen eine Seite mit einer Seite des anderen streckengleich ist, lege diese Seiten so, dass sie kollinear sind und die dritten Ecken in einer Halbebene liegen. Zieht man nun die Gerade durch diese beiden Spitzen, so gilt: Ist diese parallel zur Geraden durch die Basen, so sind die Dreiecke maßgleich. Schneidet diese Gerade die Gerade durch die Basen, so gibt das Verhältnis der zugehörigen Höhen das Verhältnis der Flächenmaße wieder.

Am Schluss des Manuskripts heißt es:

The main result of this paper is: Two triangles of equal area consist of two pairs of part triangles of equal base and equal altitude.

Der Bezug zur Cavalierischen Gleichheit³³ ergibt sich direkt aus den obigen Betrachtungen (vgl. Abbildung 5): Legt man die beiden maßgleichen Dreiecke so, dass sie durch eine Schrägspiegelung auseinander hervorgehen, so liefert dies sofort die gesuchten Scharen gleichlanger Strecken in den beiden Dreiecken. Das Problem, auf das Bernays auch wiederholt hinweist,³⁴ ist der Beweis der Umkehrung dieser Aussage: Zwei Cavalierisch gleiche Dreiecke sind auch maßgleich. Das wiederum läuft darauf hinaus, zu zeigen, dass Schrägspiegelungen flächen(maß)treu sind. Ein derartiger Satz würde die Theorie abrunden, denn es wäre bewiesen, dass die Begriffe „maßgleich“ und „durch Spiegelungen aufeinander abbildbar“ austauschbar sind. Bernays meinte, dies sei nur mit analytischen Mitteln möglich, R. Struik ging auf diese Frage nicht näher ein.

6 Der Briefwechsel: Irrungen und Wirrungen

P. Bernays studierte das von D. Struik geschriebene Manuskript umgehend. Am 13. Januar 1975³⁵ antwortete er höflich, aber kritisch, er vermisse im Manuskript die Ergebnisse ihrer bisherigen Diskussionen. Zudem merkte er an, dass beim Beweis von Satz 1 zwei Fälle zu unterscheiden seien hinsichtlich der Lage des Punktes M . Dieser könne innerhalb eines der Ausgangsdreiecke liegen oder außerhalb, was unterschiedliche Argumente erfordere. Das „main theorem“ sei redundant, denn es stimme mit Satz 2 überein. Dieser wiederum sei einfach nachzuweisen mit Hilfe von Stetigkeitsbetrachtungen, weshalb der konstruktive Aspekt – sprich Zirkel und Lineal – hervorgehoben werden solle.

Damit war im Wesentlichen der Weg zur 1977 veröffentlichten Endfassung geebnet. Dirk Struiks Brief mit dem Manuskript markiert in etwa die Mitte unserer Geschichte:

³³Vgl. die Definition dieses Begriffes weiter unten.

³⁴Vgl. z. B. Brief von Bernays an Ruth Struik vom 18. Februar 1977 (Hs 975 : 4477).

³⁵Vgl. Bibliothek ETH-Hochschularchiv Hs 975 : 4451.

Vorher und nachher wurden jeweils etwas mehr als 30 Briefe und Karten gewechselt, vor 1975 gab es allerdings sehr lange Unterbrechungen im Briefwechsel. Die Diskussionen zwischen Ruth Struik und Bernays verliefen keineswegs linear, oft verbesserte die Autorin an einer Stelle etwas, um an anderen Stellen Verschlechterungen oder neue Ideen einzubauen.

Es gibt letztlich vier Begriffe von Flächeninhalt von Dreiecken, die bei Ruth Struik eine Rolle spielen: (1) halbes Produkt aus Grundseite und Höhe, das Flächenmaß; (2) Abbildbarkeit vermöge Schrägspiegelungen; (3) Cavalieri-Gleichheit und (4) gleicher Streckfaktor. Einige Implikationen zwischen diesen Begriffen werden bewiesen, wenn auch nicht alle. S. R. Ramler ging es in erster Linie um die Äquivalenz von (1) und (2).

Am 22. März 1976³⁶ erläuterte Ruth Struik ausführlich die Vorgeschichte ihres Manuskripts. Anscheinend hatte sie Zweifel bekommen an Bernays' Bereitschaft, dieses zu publizieren. Vielleicht hoffte sie, ihn überzeugen zu können, indem sie die Wichtigkeit ihres Projektes gemäß dem Urteil bekannter Mathematiker darlegte. Nachdem sie Picks Vortrag und das daraus hervorgegangene Dissertationsthema erwähnt hatte, fuhr sie fort:

Some years later, when giving a lecture in Canada, Prof. L. E. J. Brouwer happened to attend. He followed my exposition very attentively and repeatedly interrupted it to make remarks. He came to listen to my next talk and again made repeatedly observations.

From that day on we became friends and he came to stay with us for a few days in Belmont. Later, when Dirk was invited to teach in Utrecht one year, Brouwer asked us to celebrate "Old and New" in his beautiful house in Blaricum. [...] Thus I feel encouraged by Pick, Kowalewski and Brouwer, that my work might will be worth publishing.

Hätte R. Struik das Zitat von Coxeter gekannt, das oben erwähnt wurde, wäre dieser Brief die ideale Stelle gewesen, es zu erwähnen.

Das Ganze war ein Missverständnis. Bernays beeilte sich im nächsten Brief zu erklären, dass er nach wie vor bereit sei, einen Artikel von Ruth Struik zu publizieren. Anscheinend sandte Bernays das von D. Struik geschriebene Manuskript an M. Jeger, Mitglied der Redaktion der „Elemente der Mathematik“, mit der Frage, ob er bereit wäre, dieses zu veröffentlichen. Am 20. Dezember 1976 teilte Jeger auf einem Vordruck der Elemente-Redaktion an Bernays mit: „Lieber Herr Kollege! Die Zeitschrift Elemente kann nur auf druckfertig eingereichte Manuskripte eingehen. Frau Struik hat auf entsprechende Schreiben von mir bis jetzt gar nicht geantwortet. Mit freundlichen Grüßen Ihr M. Jeger“

Wenn die Autorin nicht zur Feder greift, muss es eben der Betreuer tun. Vielleicht hat Bernays sich so etwas gedacht.

Nach einigen weiteren Diskussionen zwischen ihm und R. Struik konnte Bernays am 26. Januar 1977 schließlich vermelden: „So I finally resolved to try to make a redaction of your paper which might satisfy Prof. Jeger. This is now nearly finished and I shall send you the text.“³⁷

³⁶Vgl. Bibliothek ETH-Hochschularchiv Hs 975 : 4468.

³⁷Vgl. Bibliothek ETH-Hochschularchiv Hs 975 : 4475. M. Jeger hatte im Übrigen klar gemacht, dass der Artikel in deutscher, nicht in englischer Sprache erscheinen solle. So ändern sich die Zeiten.

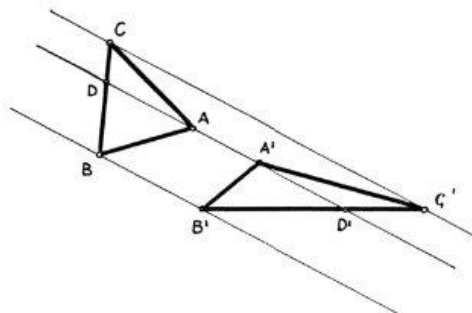


Abbildung 5. Cavalieri-Gleichheit zweier maßgleicher Dreiecke: Jede Gerade aus dem Parallelenbüschel, die die Dreiecke trifft, schneidet diese in gleichlangen Strecken (Quelle: Struik 1977, 142).

Die Druckfassung folgt i. w. der von Bernays vorgeschlagenen Umorganisation des Manuskripts, das D. Struik übersandt hatte. Die Sätze sind solche der Schulgeometrie geworden. Zudem wird der Begriff „Cavalierische Gleichheit“ explizit eingeführt, „wonach zwei Polygone flächengleich sind, wenn sie in eine solche Lage gebracht werden können, dass sie von jeder Geraden aus einer Schar von parallelen Geraden in Strecken gleicher Länge geschnitten werden.“³⁸ Erst am Ende des Artikels wird die affine Spiegelung ins Spiel gebracht, auf die Ruth Struik so viel Wert legte. Positioniert man die fraglichen flächenmaßgleichen Dreiecke so, dass die Strecken m_1 und m_2 aus Satz 1 auf einer Gerade liegen und homologe Ecken in jeweils einer Halbebene bezüglich dieser Geraden (vgl. Abbildung 5), so ist das eine Bild des anderen unter einer Schrägspiegelung.³⁹ Deren Achse geht durch die Mitten derjenigen Strecken, die homologe Punkte verbinden. Die Geraden, auf denen diese Strecken liegen, sind nach dem Satz von Desargues parallel und geben somit die Richtung der Schrägspiegelung an.

Folglich sind zwei maßgleiche Dreiecke auch Cavalierisch gleich, die Schrägspiegelung liefert die gewünschten gleichlangen Strecken. Das ist der Rest von Saly Ruth Ramlers Programm, das sie einmal als Haupterkennnis ihrer Dissertation so formulierte:

As a result was obtained by approaching the axiomatics a theory of area from a purely affine standpoint, which yielded Euclidean equivalent to the definition of equal area.

Eigentlich schade, dass wir darüber nicht mehr erfahren. Paul Bernays, Spezialist für Axiomatik, hat den Hinweis auf die Axiomatik eliminiert. Ruth Struik gab, wie bereits erwähnt, über diese an keiner Stelle des Briefwechsels (wohl aber in ihrer Dissertation) eine erhellende Auskunft – allerdings fragte Bernays auch nie eindringlich danach. Vielleicht hatte er in dieser Hinsicht andere Vorstellungen als Ruth Struik. Gar mancher Herausgeber hätte sich auf ein solches Abenteuer nicht eingelassen. Erstaunlich ist die Geduld und die

³⁸R. Struik: Flächengleichheit und Cavalierische Gleichheit von Dreiecken (Elemente der Mathematik 32 (1977), 137–143), 137. Vgl. Abbildung 5.

³⁹Folglich müssen die beiden Dreiecke entgegengesetzt orientiert sein. Bei gleicher Orientierung bedarf es zusätzlicher Überlegungen.

Mühe, die P. Bernays auf Ruth Struiks Manuskript aufwandte. Offensichtlich war er ihr wohlgesonnen und wollte sie bei ihrer Rückkehr in die Wissenschaft unterstützen.

Am 31. August 1977, nachdem sie die Korrekturfahnen ihres Artikels gesehen hatte, notierte Ruth Struik⁴⁰: „When the paper will meet the day of publication, I shall be very happy.“ Vom 15. Mai 1977 bis zum 15. Juli 1977 hielt sich das Ehepaar Struik auf Einladung in Bielefeld auf und machte einen Abstecher nach Berlin. Über ihre Eindrücke von Deutschland informierte Ruth Struik Paul Bernays auf einer Postkarte und in einem längeren Brief, ein Treffen mit Bernays kam allerdings nicht zustande. Am 18. September 1977 starb Paul Bernays in Zürich.

Im ETH-Archiv findet sich folgende Nachbemerkung zu dem Briefwechsel, der uns hier beschäftigt hat:

Dieser Briefwechsel Struik – Bernays drehte sich in den letzten 24 Jahren praktisch nur um eine Arbeit, die im wesentlichen von Bernays geschrieben worden ist, aber unter STRUIK veröffentlicht wurde.

Ende gut, alles gut, hätte Dr. Saly Ruth Ramler verheiratete Struik vielleicht gesagt, die die Idiome ihrer Muttersprache anscheinend liebte. Leider bleibt der Verfasser dieser Notiz ungenannt. Und vielleicht ist sie doch etwas einseitig; Bernays hat eigentlich die Hebammenkunst ganz im Stile von Sokrates ausgeübt. Und letztlich war Ruth Struik mit dem Ergebnis zufrieden. Es blieb ihre einzige Publikation.

Nachtrag. Abbildung 5 zeigt auch, dass umgekehrt eine Schrägspiegelung das Flächenmaß von Dreiecken erhält. Um dies einzusehen, muss man sich nur überlegen, dass die Strecken DA und $D'A'$ gleichlang sind und dass folglich die Teildreiecke BAD und $B'A'D'$ sowie DAC und $D'A'C'$ maßgleich sind (Euklid I, 38). Für andere Situationen kann man das Argument analog anpassen. Dank an S. Kitz (Wuppertal) für seinen Hinweis auf diesen Sachverhalt.

Danksagung. Der Autor dankt Erhard Scholz (Wuppertal) und den anonymen Gutachtern für ihre hilfreichen Hinweise, Jean-Daniel Voelke (Lausanne) für Informationen über Enriques und Ruth Struik, Maria Reményi (Heidelberg) für ihre Mitteilung zu den Tagungen am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, den MitarbeiterInnen des Hochschularchivs der ETH für ihre freundliche Unterstützung sowie Alisson Schmidt und Jonathan Paul (Archiv des MIT) für ihre Hilfe bei der Beschaffung der Dissertation von Saly Ruth Ramler und sonstiger sie betreffender Dokumente. Martina Bečvářová (Prag) hat mich mit vielen Informationen zu Saly Ruth Ramler und ihrem Werdegang sowie zur Situation in Prag großzügig unterstützt. Pascal Volkert hat mich im Kampf mit $\text{\LaTeX}$ unterstützt.

Klaus Volkert
Hochstraße 48
66450 Bexbach, Germany
fam.volkert@t-online.de

⁴⁰Brief an Bernays Hs 975 : 4487.