Elemente der Mathematik 80 (2025), 175–180
DOI 10.4171/EM/569

Aufgaben

Editorial Note

Stefan Grieder hat 2010 die Redaktion der Aufgabenrubrik der *Elemente der Mathematik* übernommen. Seither hat er mit sicherem Griff aus dem nicht nachlassenden Strom an eingehenden Aufgaben immer die interessantesten für unsere Leserinnen und Leser ausgewählt. Ebenso methodisch ist er bei der Sichtung der zahlreichen eingesandten Lösungen vorgegangen, hat diese verglichen, nachgeprüft und oft weiter vereinfacht oder sogar verschiedene Ansätze kombiniert. Die ausgewählten LöserInnen konnten sich darauf verlassen, dass die schliesslich abgedruckte Darstellung von Stefan absolut fehlerfrei, von unnachahmlicher Eleganz und gut lesbar war. Dabei spielte es keine Rolle, ob es sich um algebraische, zahlentheoretische, kombinatorische, analytische oder geometrische Probleme handelte. Gerade bei den geometrischen Aufgaben hat Stefan präzise und übersichtliche Figuren mit PSTricks erstellt, welche die jeweiligen Lösungen zusätzlich erhellten. Nach 15 Jahren übergibt Stefan nun die Aufgabenrubrik an Martin Lukarevski von der Goce Delčev Universität in Štip. Als Editor der Elemente konnte ich mich jederzeit darauf verlassen, dass Stefan die Lösungen pünktlich zum Redaktionstermin in einem sauberen LaTeX-File ablieferte, was einen reibungslosen Ablauf der Produktion gewährleistete. Dank Stefans engagiertem Einsatz war die Aufgabenrubrik immer ein besonders attraktiver Bestandteil der Elemente, der unseren Leserinnen und Lesern grossen Genuss bereitet hat. Damit hat Stefan wesentlich zur Ausstrahlung der Zeitschrift beigetragen. Auch im Namen der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft danke ich an dieser Stelle Stefan Grieder für seinen unermüdlichen Einsatz und wünsche ihm alles Gute für die Zukunft. Seinem Nachfolger, Martin Lukarevski, wünsche ich einen guten Start bei seiner neuen Aufgabe und ebenso viel Freude und Erfolg beim Bearbeiten der Aufgaben.

Norbert Hungerbühler

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2026 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse stefan.grieder@hispeed.ch eingereicht werden.

Ab 1. Januar 2026 können die Lösungen per Post an

Martin Lukarevski, Kosta Novakovik 46, 3-7, 1000 Skopje, Nordmazedonien

oder an die E-Mail-Adresse martin.lukarevski@ugd.edu.mk gesandt werden.

Aufgabe 1464: Man betrachte alle räumlichen Fünfecke mit lauter gleich langen Seiten und vier gleich grossen Winkeln und bestimme, wie gross der übrige Winkel maximal sein kann.

Moritz Adelmeyer, Zürich, CH und Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

Aufgabe 1465:

(a) Man bestimme die maximale Länge l einer nicht konstanten arithmetischen Folge von Quadratzahlen, unter denen sich die Zahl 2025 befindet.

(b) Man gebe alle derartigen Folgen mit Länge l an.

Walther Janous, Innsbruck, A

Aufgabe 1466 (Die einfache dritte Aufgabe): Man vereinfache für $|x| < 1$ den Ausdruck

$$D(x) = \cos\Big(2\arctan\Big(\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\Big) - 2\arctan\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big)\Big).$$

Raymond Mortini, Metz, F und Rudolf Rupp, Nürnberg, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2024

Aufgabe 1452. Für zwei Kreise k_1, k_2 mit Radien r_1, r_2 und Abstand $d > r_1 + r_2$ der Kreismittelpunkte seien S_1, S_2, S_3, S_4 die Schnittpunkte von je einer inneren und äusseren gemeinsamen Tangente an die Kreise. Weiter seien $B_1, \ldots, B_8$ die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an die Kreise. Man zeige:

(a) Jeder Schnittpunkt S_i ist gleich weit vom nächstgelegenen Punkt B_j entfernt. Wie gross ist dieser Abstand?

(b) Die zwölf Punkte S_i und B_j liegen auf drei konzentrischen Kreisen, deren Mittelpunkte die Mitte der beiden Kreiszentren von k_1 und k_2 sind. Wie gross sind die Radien dieser Kreise?

Raphael Muhr, Oberammergau, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von den folgenden 14 Lesern eingegangen: Klaus Bickel (Freiburg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser arbeiten in einem Koordinatensystem und zeigen die Behauptungen mit mehr oder weniger Rechenaufwand. Wir folgen den Ausführungen von *Frieder Grupp*, der mehr geometrisch, mithilfe der Konstruktion der gemeinsamen Tangenten an die Kreise, argumentiert.

Sei zuerst $r_1 > r_2$ und seien M_1, M_2 die Mittelpunkte der Kreise k_1, k_2. Seien k_3, k_4 zwei Kreise mit Radien $r_1 - r_2$ resp. $r_1 + r_2$. Mit D werde der Mittelpunkt von M_1M_2 bezeichnet. Der Kreis mit Mittelpunkt D und Radius $\frac{d}{2}$ schneidet k_3 im Punkt $\hat{B}_1$. Also ist $\sphericalangle M_1\hat{B}_1M_2$ ein rechter Winkel. Die Gerade durch $\hat{B}_1$ und M_2 wird nun parallel um r_2 so verschoben, dass diese neue Gerade dann nach Konstruktion die äussere Tangente an die Kreise k_1 und k_2 ist. Die verschobenen Punkte $\hat{B}_1, M_2$ werden nun Berührungspunkte an diese Kreise und mit B_1, B_4 bezeichnet (siehe Abbildung 1).

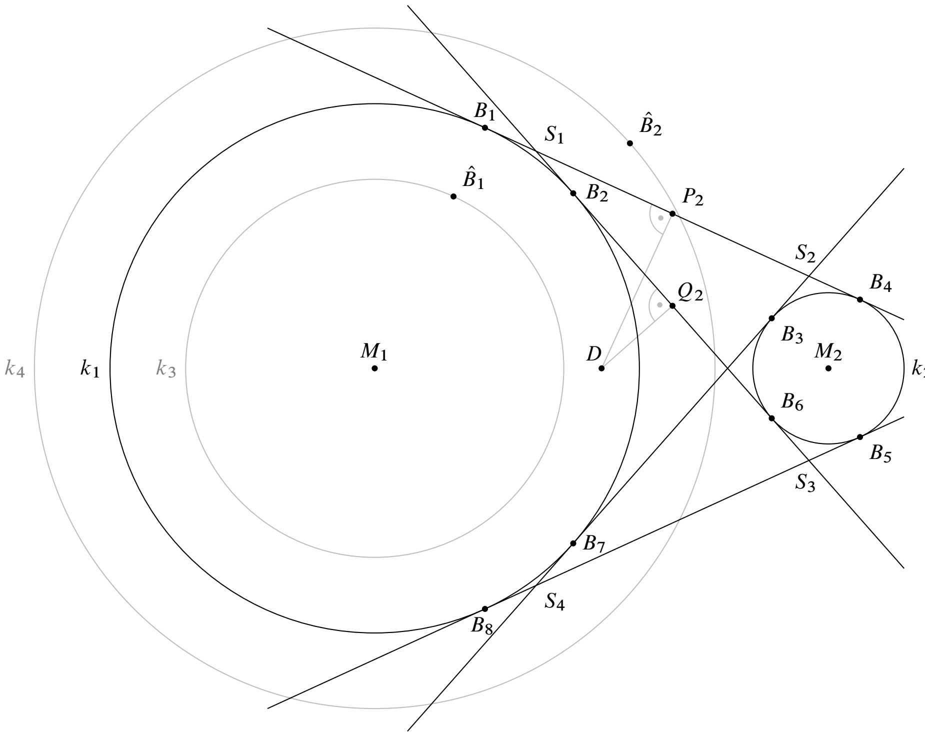

Abbildung 1

Ebenso verschiebt man die Gerade durch M_2 und $\hat{B}_2$ (Schnittpunkt des Kreises k_4 und des Kreises mit Mittelpunkt D und Radius $\frac{d}{2}$) parallel um r_2. Diese Parallele ist nun die innere Tangente an die Kreise k_1 und k_2 mit den Berührungspunkten B_2 und B_6.

Durch Spiegelung an der Geraden durch M_1 und M_2 erhält man nun die andere äussere und innere Tangente an die Kreise k_1 und k_2 mit den Berührungspunkten $B_{9-i} = B_i'$, $i = 1, 2, 4, 6$. Die Schnittpunkte S_i werden nun so bezeichnet, dass sie nahe bei B_{2i-1} und B_{2i}, $i = 1, 2, 3, 4$, liegen.

Dann gilt nach Konstruktion

$$B_1B_4 = \hat{B}_1M_2 = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2} \quad \text{und} \quad B_2B_6 = \hat{B}_2M_2 = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}.$$

Setzt man $d_g = B_1S_1 = S_1B_2$, so erhält man

$$B_2B_6 + d_g = S_2B_6 = S_1B_4 = B_1B_4 - d_g.$$

Setzt man $d_k = B_4S_2 = S_2B_3$, so erhält man

$$B_7B_3 + d_k = S_2B_7 = S_2B_1 = B_1B_4 - d_k$$

und hieraus

$$d_k = d_g = \frac{1}{2}\big(\sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2} - \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}\big),$$

was Teil (a) beantwortet.

Fällt man das Lot von D auf B_1B_4 mit Lotfusspunkt P_2, so ist dies auch das Lot auf $\hat{B}_1M_2$ mit Lotfusspunkt P_1. Deshalb ist P_2 die Mitte von B_1B_4 und die vier Punkte B_1, B_4, B_5, B_8 liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt D. Es gilt $\hat{B}_1M_1 = r_1 - r_2$ und deshalb $DP_1 = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)$ und daraus $DP_2 = \frac{1}{2}(r_1 - r_2) + r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$. Daraus ergibt sich

$$DB_1 = \sqrt{B_1P_2{}^2 + DP_2{}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\big(d^2 - (r_1 - r_2)^2\big) + \frac{1}{4}(r_1 + r_2)^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + r_1r_2}.$$

Wegen $d_g = d_k$ ist P_2 auch die Mitte von S_1S_2 und die vier Punkte S_1, S_2, S_3, S_4 liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt D. Es gilt

$$DS_1 = \sqrt{(B_1P_2 - d_g)^2 + DP_2{}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\big(d^2 - (r_1 + r_2)^2\big) + \frac{1}{4}(r_1 + r_2)^2} = \frac{d}{2}.$$

Fällt man das Lot von D auf B_2B_6 mit Lotfusspunkt Q_2, so ist dies auch das Lot auf $\hat{B}_2M_2$ mit Lotfusspunkt Q_1. Deshalb ist Q_2 die Mitte von B_2B_6 und die vier Punkte B_2, B_3, B_6, B_7 liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt D. Es gilt $\hat{B}_2M_1 = r_1 + r_2$ und deshalb $DQ_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ und daraus $DQ_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) - r_2 = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)$. Daraus ergibt sich

$$DB_2 = \sqrt{B_2Q_2{}^2 + DQ_2{}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\big(d^2 - (r_1 + r_2)^2\big) + \frac{1}{4}(r_1 - r_2)^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} - r_1r_2}.$$

Im Fall $r_1 = r_2$ erhält man die Ergebnisse entweder durch Grenzübergang $r_1 \to r_1$ oder aus einer Skizze. Man entnimmt dieser Skizze direkt

$$DB_1 = \sqrt{\frac{d^2}{4} + r_1^2}, \quad DB_2 = \sqrt{\frac{d^2}{4} - r_1^2}, \quad DS_1 = \frac{d}{2}.$$

Aufgabe 1453. Für reelle $x > 1$ und natürliche Zahlen n beweise man die Ungleichung

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^n \leq 1 - \frac{n}{x + n - 1}.$$

Yagub Aliyev, Baku, AZ

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von den folgenden Lesern sind 22 Lösungen eingetroffen: Ulrich Abel (Friedberg, D), Klaus Bickel (Freiburg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Raymond Mortini (Metz, F) und Rudolf Rupp (Nürnberg, D), Raphael Muhr (Oberammergau, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Amol Sasane (London, UK), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Viele Löser arbeiten mit vollständiger Induktion oder zeigen die Ungleichung mithilfe des binomischen Lehrsatzes. Auch merken einige an, dass die Ungleichung für beliebige reelle $n \geq 1$ richtig ist. Wir folgen der Lösung von *Ulrich Abel*, der das besonders schön zeigt.

Setzen wir $t = (1 - \frac{1}{x})^{-1}$, d. h. $x = \frac{t}{t-1}$, so zeigt eine elementare Rechnung, dass die obige Ungleichung äquivalent zu

$$t^n - nt + n - 1 \geq 0 \quad (t > 1)$$

ist. Setzen wir $f_n(t) = t^n - nt + n - 1$, so folgt die Ungleichung aus

$$f_n(t) = f_n(1) + \int_1^t f_n'(u)\,du = n \int_1^t (u^{n-1} - 1)\,du \geq 0 \quad (t > 1).$$

Aufgabe 1454 (Die einfache dritte Aufgabe). Fasst man die Permutationen der Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ $(n \geq 2)$ als die n Koordinaten von Punkten im $\mathbb{R}^n$ auf, so lässt sich der Abstand zweier solcher Punkte in der üblichen Weise mittels euklidischer Norm berechnen. Genau welche Paare von Punkten mit verschiedenen Koordinaten aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ weisen dabei eine maximale Entfernung voneinander auf und wie gross ist diese ausgedrückt durch n?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Zuschriften von den folgenden Lesern eingegangen: Klaus Bickel (Freiburg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Raphael Muhr (Oberammergau, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Hat man die verdächtigen Punkte mit maximalem Abstand identifiziert, bleibt nur noch die Maximalität zu zeigen. Dies kann man elementar algebraisch oder wie *Wolfgang Seewald*, dessen eleganter Lösung wir folgen, geometrisch zeigen.

Alle Permutationen, als Punktvektoren aufgefasst, haben vom Punkt

$$M\Big(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}, \ldots, \frac{n+1}{2}\Big)$$

denselben Abstand, liegen daher auf einer Kugel mit diesem Punkt als Mittelpunkt. Die Permutationen

$$p = \bigl(p(1), p(2), \ldots, p(n)\bigr) \quad \text{und} \quad q = \bigl(n+1-p(1), n+1-p(2), \ldots, n+1-p(n)\bigr)$$

liegen punktsymmetrisch bezüglich M, bilden also einen Durchmesser; ihr Abstand ist daher maximal. Es gibt also $\frac{n!}{2}$ Paare von Permutationen mit maximalem Abstand.

Dieser Abstand ist

$$\begin{aligned}
2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\Bigl(\frac{n+1}{2} - p(k)\Bigr)^2} &= 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\Bigl(\frac{n+1}{2} - k\Bigr)^2} \\
&= 2\sqrt{n\Bigl(\frac{n+1}{2}\Bigr)^2 - (n+1)\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2} \\
&= 2\sqrt{\frac{n(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}n(n^2-1)}.
\end{aligned}$$