Elemente der Mathematik 81 (2026), 40–44
DOI 10.4171/EM/575

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2026 erbeten und können auf postalischem Weg an

Martin Lukarevski, Kosta Novakovik 46, 3-7, 1000 Skopje, Nordmazedonien

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse martin.lukarevski@ugd.edu.mk eingereicht werden. Lösungen und neue Aufgaben können auf Deutsch oder auf Englisch abgefasst sein.

New problems

Solutions are requested by 10 August 2026 and may be sent by post to

Martin Lukarevski, Kosta Novakovik 46, 3-7, 1000 Skopje, North Macedonia.

Solutions prepared in a commonly used format may also be submitted as an attachment to the email address martin.lukarevski@ugd.edu.mk. The language in which the solutions and the new problem proposals are written may be either German or English.

Problem 1467: Let $a \in (0,1)$ be an arbitrary parameter. Consider the sequence $\{x_n\}_{n\geq 0}$ defined by $x_0 = a$ and the recurrence relation

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) x_n (1 - x_n) \quad \text{for any } n \geq 0.$$

Prove that

(a) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$;

(b) $\lim_{n\to\infty} n x_n = 2$.

Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara, RO and Eugen Păltănea, Braşov, RO

Problem 1468: Let ABC be a triangle with $\beta < 90°$ and angle bisector AD. Let E be the foot of the perpendicular from D to the side AB and let E' be a point on the side AB such that $AE' = BE$. If a transversal through E' meets the rays CA and CB at A_1 and B_1, respectively, prove that $CA + AB \leq CA_1 + A_1B_1$.

Yagub Aliyev, Baku, AZ

Aufgabe 1469 (Die einfache dritte Aufgabe): Für eine ungerade Primzahl p betrachtet man die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit a, b, c, d im endlichen Körper $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ (Rechnen modulo p). Welche Bedingungen müssen die Elemente a, b, c, d der Matrix A erfüllen, damit ihre Eigenwerte von null verschieden sind und in $\mathbb{Z}_p$ liegen?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2025

Aufgabe 1455. Beweise, dass

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(x)\log(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{7}{16}\zeta(3) - \frac{\pi}{4}C,$$

wobei

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

die Catalansche Konstante ist, und leite daraus den Wert des folgenden Integrals her:

$$J = \int_0^1 \frac{(\arctan x)^2}{x}\,dx.$$

Raymond Mortini, Metz, F und Rudolf Rupp, Nürnberg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden 10 Lesern eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Seán M. Stewart (Thuwal, SA), Michael Vowe (Therwil, CH).

Die meisten Löser lösen die Aufgabe unter Verwendung einer Fourierreihe wie es auch *Bernhard Ruh* handhabt, dessen Ausführungen wir nun folgen. Die naheliegende Substitution $t = \arctan(x)$ ergibt vorerst

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(x)\log(x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} t\log(\tan t)\,dt.$$

Mit der bekannten Fourierreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n} = -\log(2\sin x) \tag{1}$$

berechnet man

$$\begin{aligned}\log(\tan t) &= \log(\sin t) - \log(\cos t) = \log(2\sin t) - \log(2\cos t)\\ &= -2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\bigl(2(2n+1)t\bigr)}{2n+1}.\end{aligned}$$

Die Reihe

$$t\log(\tan t) = -2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t\cos\bigl(2(2n+1)t\bigr)}{2n+1}$$

ist auf $[0, \pi/4]$ gleichmässig konvergent und daher $\int\sum = \sum\int$. Da $\int t\cos(at)\,dt = t\sin(at)/a + \cos(at)/a^2$, erhält man dann durch Tauschen von Summation und Integral

$$\begin{aligned}I &= -2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/4} t\cos\bigl(2(2n+1)t\bigr)\,dt\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\left(t\sin\bigl(2(2n+1)t\bigr)\Big|_0^{\pi/4} + \frac{\cos\bigl(2(2n+1)t\bigr)}{2(2n+1)}\Big|_0^{\pi/4}\right)\\ &= -\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}.\end{aligned}$$

Die erste Summe ist gemäss Aufgabenstellung gerade C und die zweite Summe lässt sich einfach in $\zeta(3)$ umformen; genauer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = \sum_{m \text{ ungerade}} \frac{1}{m^3} = \zeta(3) - \sum_{m \text{ gerade}} \frac{1}{m^3} = \zeta(3) - \frac{1}{8}\zeta(3) = \frac{7}{8}\zeta(3).$$

Damit folgt sofort der in der Aufgabe angegebene Wert von I:

$$I = \frac{7}{16}\zeta(3) - \frac{\pi}{4}C.$$

Die Berechnung von J erfolgt mit partieller Integration. Man erhält unter Beachtung von $\lim_{x\to 0^+} \arctan(x)\log(x) = 0$, was durch zweimalige Anwendung der Regel von de L'Hôpital folgt,

$$\begin{aligned}J &= \int_0^1 \frac{(\arctan x)^2}{x}\,dx = (\arctan(x))^2\log(x)\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2\arctan(x)}{1+x^2}\log(x)\,dx\\ &= -2I = -\frac{7}{8}\zeta(3) + \frac{\pi}{2}C.\end{aligned}$$

Aufgabe 1456. Seien a, b, c Vektoren des $\mathbb{R}^3$ mit $a^\top b \neq -1$ sowie

$$a \times (b \times c) = a + b + c.$$

Dabei bezeichne $a^\top = (a_1, a_2, a_3)$ den zu a transponierten Vektor und „$\times$" das Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$. Man weise nach, dass c eine eindeutig bestimmte Linearkombination von a und b ist.

Götz Trenkler, Dortmund, D und Dietrich Trenkler, Osnabrück, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 18 Leser haben Lösungen eingesandt: Ulrich Abel (Friedberg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Raymond Mortini (Metz, F) und Rudolf Rupp (Nürnberg, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Mohammad Thoriq (Yogyakarta, ID), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Fast alle Löser benutzen die bekannte Grassmann Identität für das Dreifachprodukt. Wir folgen der eleganten Lösung von *Fritz Siegerist* und *Bernhard Ruh*.

Aufgrund der Grassmann Identität $a \times (b \times c) = (a^\top c)b - (a^\top b)c$ gilt für die gegebene Gleichung

$$a \times (b \times c) - (a + b + c) = (a^\top c - 1)b - (a^\top b + 1)c - a = 0$$

und umgestellt

$$c = -\frac{1}{a^\top b + 1}a + \frac{a^\top c - 1}{a^\top b + 1}b.$$

Das störende c auf der rechten Seite lässt sich eliminieren, indem man die Gleichung $a \times (b \times c) = a + b + c$ skalar mit $a^\top$ multipliziert. Da das Dreifachprodukt senkrecht zu a steht, erhält man $0 = a^\top a + a^\top b + a^\top c$ also $a^\top c = -a^\top a - a^\top b$. Damit folgt sofort

$$c = -\frac{1}{a^\top b + 1}a - \Big(\frac{a^\top a}{a^\top b + 1} + 1\Big)b.$$

Bemerkung. *Christian Schindler* bemerkt, dass die in der Aufgabe gemachte Aussage nicht stimmt, falls a und b linear abhängig sind und gibt als Beispiel

$$a = (2, 0, 0), \quad b = (-1, 0, 0), \quad c = (-1, 0, 0).$$

Dann ist c keine eindeutig bestimmte Linearkombination, z. B. $c = a + 3b = 2a + 5b$.

Aufgabe 1457 (Die einfache dritte Aufgabe). Man gebe diejenige Ellipse an, die einem Rhombus eingeschrieben werden kann, und deren Fläche gleich der Fläche des Inkreises ist. Man gebe eine möglichst einfache Charakterisierung dieser Ellipse an.

Lajos László, Budapest, H

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 15 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Klaus Bickel (Freiburg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Oliver Gloor (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Aufgabe kann auch ohne Verwendung von Trigonometrie und Differentialrechnung gelöst werden, was einige Löser getan haben. Wir folgen der Lösung von *Bernhard Ruh*, der eine besonders einfache Charakterisierung der Ellipse angibt: Die gesuchte Ellipse $\mathcal{E}$ und die Umellipse des Rhombus mit Achsen auf den Diagonalen sind konfokal.

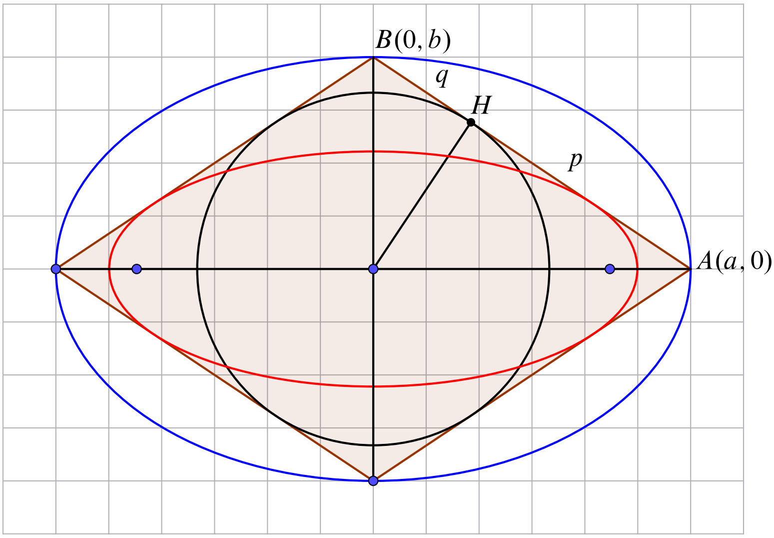

Abbildung 1

In einem Koordinatensystem habe der Rhombus den Mittelpunkt im Ursprung $(0, 0)$ und die Ecken $A(a, 0)$ und $B(0, b)$ (siehe Abbildung 1).

Die Umellipse hat die Gleichung $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, der Inkreis hat Radius

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Der Inkreis berühre die Seite AB in H, die entstehenden Abschnitte seien $p = AH$ und $q = BH$. Dann ist die Ellipse $\mathcal{E} : x^2/p^2 + y^2/q^2 = 1$ die gesuchte Ellipse. Einerseits ist nämlich aufgrund des Höhensatzes $pq = r^2$ und der Nachweis der Flächengleichheit des Inkreises und der Ellipse $\mathcal{E}$ ist elementar. Die Fläche ist

$$pq\pi = r^2\pi = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}\pi.$$

Andererseits folgt aus der bekannten Tangentenbedingung, dass die Gerade AB die Ellipse $\mathcal{E}$ berührt, denn eine Gerade mit der Gleichung $x/a + y/b = 1$ ist genau dann Tangente der Ellipse $x^2/p^2 + y^2/q^2 = 1$, wenn die Bedingung $p^2/a^2 + q^2/b^2 = 1$ erfüllt ist. Aus dem Kathetensatz von Euklid folgt

$$p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad q = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

und damit ist diese Bedingung erfüllt.

Ferner gilt noch

$$p^2 - q^2 = \frac{a^4 - b^4}{a^2 + b^2} = a^2 - b^2,$$

die Ellipse $\mathcal{E}$ und die Umellipse sind also konfokal.