Elemente der Mathematik 81 (2026), 83–83
DOI 10.4171/EM/583

Rezensionen

Manuel Kauers:
Rechnen mit gigantischen Zahlen – Wenn Computer mit Plus und Mal an ihre Grenzen stoßen. Springer Verlag 2025, 141 Seiten, Softcover. ISBN 978-3-662-71215-3, (978-3-662-71216-0 eBook). Preis: Fr. 25.50.

Dieses Buch stellt nur wenige Anforderungen. Es richtet sich an Interessierte, welche die Bereitschaft mitbringen, sich auf kleinere mathematische Deduktionen einzulassen. Eigentliche Beweise fehlen; das ist aber mit Blick auf das angezielte Publikum vollkommen unproblematisch.

Das Buch geht der Frage nach, wie effizient ganze Zahlen miteinander multipliziert werden können, idealerweise so, dass der Aufwand nur linear in der Anzahl der Ziffern wächst. Das ist von praktischer Bedeutung, wenn die Zahlen sehr gross werden und Computer mithin an ihre Grenzen stossen. Doch schön der Reihe nach.

Der Text beginnt mit den frühesten dokumentieren Aufzeichnungen über das Rechnen, also bei den alten Ägyptern, und erläutert ausführlich das Sechziger-Zahlensystem der Babylonier. Es wird auch kurz auf die Frage eingegangen, wieso 60 als Basis gewählt worden sein könnte und nicht etwa 30, das ja dieselben Primfaktoren aufweist (mit Blick auf die seither gebräuchliche Einteilung von Stunden in Minuten und Sekunden bzw. Winkelgrade in Bogenminuten und -sekunden hat die Frage eine gewisse Alltagsrelevanz).

Es werden verschiedene Techniken des Multiplizierens von Zahlen vorgestellt, darunter eine schnellere als die typischerweise in der Schule gelehrte Form; diese geht auf Karatsuba, einen Schüler Kolmogorows, zurück. Mögliche Effizienzgewinne durch Kombination verschiedener Methoden werden ausführlich besprochen. Selbstverständlich hat der Autor dabei die ungeheure Rechenleistung moderner Prozessoren im Blick.

Ab Kapitel 3 werden dann, ausgehend von der Frage «Was heisst hier Rechnen?», einige Grundzüge der modernen Algebra behutsam eingeführt, namentlich der Begriff des (kommutativen) Rings, der an zahlreichen Beispielen exemplifiziert wird (am Schluss werden auch Matrizenringe besprochen). Homomorphismen werden in Kapitel 4 als «Schattenbildung» bezeichnet und homomorphe Bilder als «mathematische Schatten». An dieser Stelle darf die Erläuterung des chinesischen Restsatzes nicht fehlen. Das Verfahren zur Multiplikation ganzer Zahlen geht nun, summarisch gesprochen, so: Man repräsentiert die zu multiplizierenden Zahlen im Ziffernsystem zur Basis 2^{64} und interpretiert sie als Polynome in $\mathbb{Z}[X]$ (mit $X = 2^{64}$). Die Polynome werden nach $\mathbb{Z}/(p_k)[X]$ projiziert für drei geeignete Primzahlen p_1, p_2, p_3. In diesen Polynomringen können die homomorphen Bilder der Polynome effizient multipliziert werden, und der chinesische Restsatz ermöglicht die Rekonstruktion des Ergebnisses in $\mathbb{Z}[X]$ (die Auswertung bei $X = 2^{64}$ im Ziffernsystem zur Basis 2^{64} ist nicht aufwendig).

Wieso die Polynommultiplikation in den Restklassenringen $\mathbb{Z}/(p_k)[X]$ effizient durchgeführt werden kann, wird am Schluss des Buches behandelt. Zunächst ist dies wegen der mit der Polynommultiplikation unweigerlich auftretenden Konvolutionsprodukte ein nichttriviales Problem. Dessen Lösung erfolgt über die diskrete Fouriertransformation, die in Kapitel 5 eingeführt wird.

Gelegentliche Ausschweifungen in die allgemeine Geschichte machen die Lektüre zusätzlich reizvoll. Beispielsweise beginnen die Ausführungen über Sortieralgorithmen mit einer Bemerkung über die von der Römerzeit überlieferte politische Handlungsmaxime des *divide et impera*.

Der Inhalt wird ergänzt durch Literaturhinweise am Ende jedes Kapitels. Dabei wird einige Male auf Donald E. Knuths Klassiker «The Art of Computer Programming», insbesondere auf Band 2 «Seminumerical Algorithms», verwiesen. Dort wird das Thema des Buchs in Kapitel 4.3.3 («How fast can we multiply») ebenfalls behandelt.

Nach Ansicht des Rezensenten kann das Buch, namentlich Kapitel 4 und 5, im gymnasialen Unterricht der Anwendungen der Mathematik, aber auch der Informatik und ihrer Grundlagen, sehr bereichernd herangezogen werden.

Martin Jakob, Olten