
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2026 erbeten und können auf postalischem Weg an

Martin Lukarevski, Kosta Novakovik 46, 3-7, 1000 Skopje, Nordmazedonien

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse martin.lukarevski@ugd.edu.mk eingereicht werden. Lösungen und neue Aufgaben können auf Deutsch oder auf Englisch abgefasst sein.

New problems

Solutions are requested by 10 November 2026 and may be sent by post to

Martin Lukarevski, Kosta Novakovik 46, 3-7, 1000 Skopje, North Macedonia.

Solutions prepared in a commonly used format may also be submitted as an attachment to the email address martin.lukarevski@ugd.edu.mk. The language in which the solutions and the new problem proposals are written may be either German or English.

Problem 1470: Evaluate the integral

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{3 + \cos x - 2 \sin x \cos y}} dx dy.$$

George Stoica, Vancouver, CA

Problem 1471: The diagonals AC and BD of a variable cyclic quadrilateral $ABCD$ inscribed in a circle with center O intersect at a fixed point P . Suppose that the directed angle φ between the lines AC and BD is fixed with $\varphi \neq 90^\circ$. Let P_1 , P_2 , P_3 , and P_4 be the orthogonal projections of P to the lines AB , BC , CD , and DA , respectively. The lines P_1P_3 and P_2P_4 meet at the point S . Prove that S moves on a fixed circle whose center is collinear with O and P .

Tran Quang Hung, Hanoi, VN and Nikolaos Dergiades, Thessaloniki, GR

Problem 1472 (The simple third problem): For $|z| \leq 1$, let

$$f(z) := \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)^2}.$$

For every $z = e^{it}$, find the exact value of $\operatorname{Re} f(z)$.

Raymond Mortini, Luxembourg, LU and Peter Pflug, Oldenburg, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2025

Aufgabe 1458. Sei P der erste Brocard-Punkt des Dreiecks ABC , d. h., P ist der Punkt im Innern des Dreiecks so, dass

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \omega.$$

Weiter seien R_a, R_b und R_c die Umkreisradien der Dreiecke PBC, PCA und PAB . Schliesslich seien r und R die In- und Umkreisradien des Dreiecks ABC . Man beweise, dass

$$\frac{3}{R} \leq \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \leq \frac{3}{2r}.$$

Yun Zhang, Xi'an, CHN

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 10 Lesern sind Lösungen eingegangen: Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansrudi Widmer (Baden, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D).

Alle Löser bemerken, dass sich die gesuchte Ungleichung als eine Ungleichung für die Seiten des Dreiecks schreiben lässt. Der Sinussatz im Dreieck PBC für $\angle PBC = 180^\circ - \gamma$ und dann der Sinussatz im Dreieck ABC ergeben

$$R_a = \frac{a}{2 \sin \gamma} = R \frac{a}{c}.$$

Analog gilt $R_b = R \frac{b}{a}$ und $R_c = R \frac{c}{b}$. Die behauptete Ungleichung lässt sich nun als

$$3 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{3R}{2r}$$

schreiben. Die linke Seite folgt aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3.$$

Für den Beweis der rechten Seite folgen wir *Michael Vowe* der die Cauchy-Schwarz-Ungleichung anwendet. Mit dieser Ungleichung haben wir

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = a \cdot \frac{1}{b} + b \cdot \frac{1}{c} + c \cdot \frac{1}{a} \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)}.$$

Aus der bekannten Identität (z. B. O. Bottema et al., *Geometric Inequalities*, p. 52, 5.13) $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ folgt

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

Wegen $4(s-b)(s-c) = a^2 - (b-c)^2 \leq a^2$, erhält man

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4} \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)},$$

somit

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{s^2}{4s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{s^2}{4F^2} = \frac{1}{4r^2}$$

und damit

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{3R}{2r}.$$

Bemerkung. *Walther Janous* gibt die schärfere Ungleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq 1 + \frac{R}{r}$$

und beweist sie mit CAS-Unterstützung.

Aufgabe 1459. Sei f eine reellwertige mindestens fünfmal stetig differenzierbare Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ so, dass

$$f(a) = f(b) \quad \text{und} \quad f\left(\frac{a+3b}{4}\right) = f\left(\frac{3a+b}{4}\right).$$

Zeige, dass

$$\left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^6}{184320} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(5)}(x)|,$$

wobei $f^{(5)}$ die fünfte Ableitung von f ist.

Cezar Lupu, Beijing, CHN und Tudorel Lupu, Constanta, RO

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden 9 Lesern eingegangen: Ulrich Abel (Friedberg, D) und Vitaliy Kushnirevych (Friedberg, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Raymond Mortini (Luxembourg, LU) und Peter Pflug (Oldenburg, D) und Rudolf Rupp (Nürnberg, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Leser arbeiten mit der Taylor-Formel und der Simpson-Quadraturformel. Wir folgen der eleganten Lösung von *Bernhard Ruh*, die ohne sie auskommt. Die Funktion f kann man als Summe

$$f(x) = P_4(x) + R_5(x)$$

des Newtonschen Interpolationspolynoms P_4 und des Restgliedes R_5 schreiben. Verwenden wir nun o. B. d. A. anstelle von $[a, b]$ das Intervall $[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$, so ist auf Grund der

Angaben in der Aufgabe $f(-\frac{c}{2}) = f(\frac{c}{2})$ und $f(-\frac{c}{4}) = f(\frac{c}{4})$. Daraus folgt, dass $P_4(x)$ gerade ist und damit

$$\int_{-c/2}^0 P_4(x) dx - \int_0^{c/2} P_4(x) dx = 0.$$

Für das Restglied erhält man unter Verwendung des allgemeinen Mittelwertsatzes von Cauchy für Ableitungen höherer Ordnung die Darstellung

$$R_5(x) = \left(x + \frac{c}{2}\right)\left(x + \frac{c}{4}\right)x\left(x - \frac{c}{4}\right)\left(x - \frac{c}{2}\right) \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}, \quad -\frac{c}{2} < \xi < \frac{c}{2}.$$

Wegen

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)\left(x + \frac{c}{4}\right)x\left(x - \frac{c}{4}\right)\left(x - \frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2^6}(64x^5 - 20c^2x^3 + c^4x)$$

ist R_5 ungerade, und man erhält ohne Schwierigkeiten

$$\begin{aligned} \int_{-c/2}^0 f(x) dx - \int_0^{c/2} f(x) dx &= \int_{-c/2}^0 R_5(x) dx - \int_0^{c/2} R_5(x) dx \\ &= 2 \int_{-c/2}^0 R_5(x) dx \\ &= \frac{c^6}{5! \cdot 2^5 \cdot 48} f^{(5)}(\xi) = \frac{c^6}{184320} f^{(5)}(\xi), \end{aligned}$$

was die in der Aufgabe gegebene Ungleichung nachweist.

Aufgabe 1460 (Die einfache dritte Aufgabe). Für Matrizen über dem Körper \mathbb{C} gilt allgemein der Multiplikationssatz $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ für Determinanten. Man zeige, dass für 2×2 -Matrizen genau dann ein Additionssatz $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ gilt, wenn die Spuren den Multiplikationssatz $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(A) \cdot \text{Spur}(B)$ erfüllen.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 9 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Dietwald Schuster (Regensburg, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D).

Die Aufgabe kann mit direktem Nachrechnen gelöst werden. Wir folgen der klaren Lösung von *Walther Janous*, der eigentlich eine Verschärfung beweist. Für $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ sei

$$\delta = \det(A + B) - \det A - \det B, \quad \sigma = \text{Spur } A \cdot \text{Spur } B - \text{Spur}(AB).$$

Wir zeigen im Folgenden, dass $\delta = \sigma$ gilt, also insbesondere, dass $\delta = 0$ genau dann gilt, wenn $\sigma = 0$. Seien dazu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{C}$.

Dann erhält man $\delta = (a + e)(d + h) - (b + f)(c + g) - (ad - bc) - (eh - fg)$.
Also

$$\delta = ah + de - bg - cf.$$

Andererseits ist $\text{Spur } A \cdot \text{Spur } B = (a + d)(e + h)$ und

$$\text{Spur}(AB) = \text{Spur} \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = ae + bg + cf + dh.$$

Damit

$$\text{Spur } A \cdot \text{Spur } B - \text{Spur}(AB) = (a + d)(e + h) - (ae + bg + cf + dh).$$

Also $\sigma = ah + de - bg - cf$, woraus sich $\delta = \sigma$ ergibt.