
Eine alternative Methode zur Bestimmung primitiver pythagoreischer Zahlentripel

Claudia Albertini, Martin Huber und Bernhard Keller

Claudia Albertini erwarb 1986 das Primarlehrerpatent, studierte anschliessend Mathematik an der Universität Zürich und doktorierte dort 1996. Zwischen 1996 und 2003 unterrichtete sie Mathematik an der Kantonsschule Zürcher Oberland. Seit 2003 ist sie an der PH Zürich als Dozentin für Mathematik tätig und übernahm 2018 die Leitung des Bereichs Mathematik und Informatik der Sekundarstufe I. Seit 2007 ist sie Lehrbeauftragte an der UZH und hält Vorlesungen für zukünftige Sekundarlehrpersonen.

Martin Huber studierte Mathematik an der ETH Zürich und doktorierte dort 1976. Er arbeitete von 1978 bis 1980 an verschiedenen US-amerikanischen Universitäten im Bereich der Algebra. Von 1980 bis 1985 war er an der Universität Freiburg im Breisgau tätig, wo er sich 1982 habilitierte. Zwischen 1983 und 2013 hielt er Vorlesungen an der Universität Zürich für künftige Sekundarlehrpersonen. Ab 1987 bis zu seiner Pensionierung 2014 wirkte er als Dozent an der FH Winterthur.

Bernhard Keller studierte Mathematik an der ETH Zürich und verfügt über Lehrdiplome für die Primarstufe und für Maturitätsschulen. Seine berufliche Laufbahn begann er als Primarlehrer sowie Seminarlehrer für Mathematikdidaktik. Seit 2002 ist er an der Pädagogischen Hochschule Zürich tätig, unter anderem als Dozent, Lehrmittellautor, Fachbereichsleiter und Abteilungsleiter.

1 Primitive pythagoreische Zahlentripel

Der Satz, dass der Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate übereinstimmt, wird dem griechischen Mathematiker, Philosophen und Musiktheoretiker *Pythagoras*¹ zuge-

¹Pythagoras von Samos, ca. 570–509 v. Chr.

In diesem Artikel wird ein geometrischer Zugang zur Erzeugung von primitiven pythagoreischen Zahlentripeln propagiert. Dieser liefert drei Variablen u , v und x , welche die diophantische Gleichung $x^2 = 2uv$ erfüllen. Jede Lösung dieser Gleichung mit u, v teilerfremd erzeugt ein primitives pythagoreisches Zahlentripel. Äquivalent zu $x^2 = 2uv$ ist die Gleichung $U \cdot V = 1/2$ mit U, V rational. Dies bedeutet, dass pythagoreische Tripel durch einen einzigen rationalen Parameter beschrieben werden können. Spannende Ergebnisse ergeben sich, wenn als Parameter Stammbrüche oder Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$ gewählt werden.

schrieben, obwohl seit Längerem bekannt ist, dass der Satz schon von den Babyloniern um die Zeit von Hammurapi (ca. 1700 v. Chr.) angewendet wurde [13, S. 122ff]. Bezeichnen wir wie üblich die Längen der Katheten mit a bzw. b und die Länge der Hypotenuse mit c , so gilt demnach $a^2 + b^2 = c^2$. Von besonderem Interesse sind diejenigen rechtwinkligen Dreiecke, deren Seitenlängen ganzzahlig sind. In diesem Fall ist das Tripel (a, b, c) eine Lösung der diophantischen Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$. Ein solches Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ wird *pythagoreisches Zahlentripel* (abgekürzt PZT) genannt.

Ein PZT (a, b, c) heisst *primitiv*, falls a , b und c teilerfremd sind. Haben zwei Komponenten eines PZT einen gemeinsamen Teiler d , so teilt d auch die dritte Komponente. Daraus schliessen wir, dass ein PZT schon primitiv ist, wenn nur zwei der drei Komponenten teilerfremd sind. Zudem gilt:

Lemma 1 ([5, S.34/35]). *Die beiden Komponenten a, b eines primitiven PZT (a, b, c) haben verschiedene Parität, und c ist ungerade.* ■

Man sieht leicht, dass jedes Tripel der Form $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ ein PZT ist. Sind m, n ferner teilerfremd und gilt $m \not\equiv n \pmod{2}$, so ist das Tripel primitiv. Umgekehrt gibt es zu jedem primitiven Tripel (a, b, c) mit a ungerade und b gerade zwei teilerfremde Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ und $m \not\equiv n \pmod{2}$, derart dass

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn \quad \text{und} \quad c = m^2 + n^2.$$

Diese Darstellung nennen wir im Folgenden die *klassische*, sie ist bekannt aus Diophants «Arithmetika», doch die drei Koordinatenformeln sind wesentlich älter und werden auch die *babylonischen*² oder *indischen*³ Formeln genannt. Für eine ausführliche Darstellung des klassischen Zugangs siehe z. B. [9, S. 67–74].

2 Ein alternativer Zugang

Als Alternative zum klassischen schlagen wir den folgenden geometrischen Zugang vor. Wir starten mit einem beliebigen PZT (a, b, c) . Wir zeichnen ein Quadrat mit Seitenlänge c und entfernen daraus gemäss Abbildung 1 das Quadrat mit Seitenlänge a .

Es verbleibt eine Fläche, die wir im Folgenden *Winkelfläche* nennen. Ihr Inhalt beträgt $c^2 - a^2 = b^2$. Die Idee ist nun, die Winkelfläche so zu transformieren, dass sie zum Quadrat wird, aber ihren Flächeninhalt beibehält.

Dazu werden gemäss Abbildung 2 zwei kleine kongruente Rechtecke mit Seitenlängen

$$u = c - b \quad \text{und} \quad v = c - a \tag{1}$$

zum Quadrat mit Seitenlänge x zusammengesetzt. Wir bemerken, dass

$$x = c - u - v = a + b - c \tag{2}$$

²So genannt in [5, S. 36].

³So genannt in [12, S. 66].

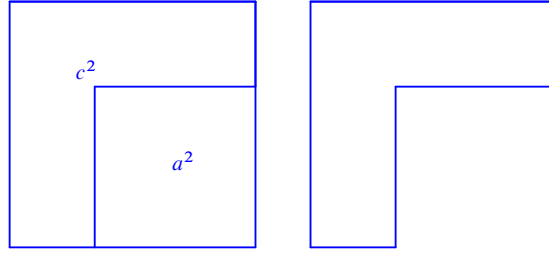


Abbildung 1. Grundquadrat und Winkelfläche

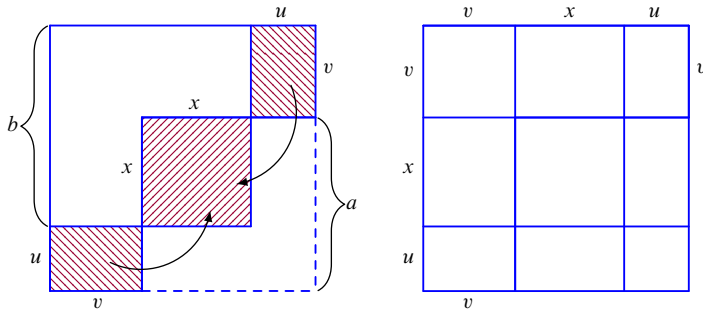


Abbildung 2. Transformierte Winkelfläche und Zerlegung des Grundquadrates

gilt, und dass u , v und x natürliche Zahlen sind. Damit der Flächeninhalt sich bei dieser Transformation nicht verändert, muss die Gleichung

$$x^2 = 2uv \quad (3)$$

erfüllt sein. Diese Gleichung nennen wir im Folgenden *Grundgleichung*. Nach Konstruktion gelten

$$a = u + x \quad \text{und} \quad b = v + x \quad (4)$$

sowie

$$c = u + b = u + v + x$$

Wir fassen zusammen.

Satz 1. Für $u, v, x \in \mathbb{N}$ ist $(u + x, v + x, u + v + x)$ genau dann ein PZT, wenn die Grundgleichung $x^2 = 2uv$ erfüllt ist. ■

Scheffold [11, S. 26/27] und Rukavicka [10, S. 363/364] erhalten mit derselben Methode äquivalente Charakterisierungen der PZT. Den Inhalt von Satz 1 findet man auch schon bei Dickson [4, S. 8], jedoch mit algebraischer Herleitung⁴. Spannend ist, dass O’Loughlins Methode zur Erzeugung pythagoreischer Dreiecke mithilfe des Inkreises auf eine analoge Charakterisierung führt [8, Theorem 1].

⁴Dickson’s Resultat erschien in der allerersten Ausgabe der Zeitschrift «The American Mathematical Monthly» im Januar 1894.

3 Lösung der Grundgleichung $x^2 = 2uv$

Wir stellen im Folgenden zwei unterschiedliche Lösungswege vor.

3.1 Lösung mit Faktorzerlegung

Erfüllt nun das Tripel $(u, v, x) \in \mathbb{N}^3$ die Grundgleichung (3), so ist x^2 eine gerade Zahl, und dasselbe gilt auch für x . Wir erhalten Lösungen der Grundgleichung mit Faktorzerlegung indem wir jeweils die Hälfte einer geraden Quadratzahl in ein Produkt mit zwei Faktoren zerlegen:

$$x^2 = 2uv \iff \frac{x^2}{2} = uv$$

Wenn wir das Produkt so zerlegen, dass $u < v$ ist, hat dies zur Folge, dass auch $a < b$ gilt⁵, denn

$$a \stackrel{(4)}{=} u + x < v + x \stackrel{(4)}{=} b.$$

Wir erhalten damit sämtliche Lösungen mit $a < b$.

Lemma 2. *Das PZT (a, b, c) ist genau dann primitiv, wenn die Parameter u und v teilerfremd sind.*

Beweis. Ist das PZT (a, b, c) nicht primitiv, so gibt es einen gemeinsamen Teiler $d \neq 1$ von a, b und c ; dieser teilt dann auch $v = c - a$ und $u = c - b$.

Sind umgekehrt u und v nicht teilerfremd und ist p ein gemeinsamer Primteiler, so ist p auch ein Teiler von

$$u \cdot (c + b) = (c - b)(c + b) = c^2 - b^2 = a^2$$

und von

$$v \cdot (c + a) = (c - a)(c + a) = c^2 - a^2 = b^2.$$

Als Primzahl teilt dann p auch a und b . ■

Falls wir nur an *primitiven* PZT interessiert sind, so ist also unser Ziel, die Grundgleichung (3) unter der Zusatzbedingung zu lösen, dass u und v teilerfremd sind. Da das Produkt uv stets gerade ist, müssen die beiden Faktoren verschiedene Parität haben (s. Tabelle 1).

3.2 Lösung mit Brüchen

Als Alternative zur Faktorzerlegung bietet sich auch ein Lösungsweg mit Brüchen an. Die Grundgleichung $x^2 = 2uv$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{2} = \frac{u \cdot v}{x^2} = \frac{u}{x} \cdot \frac{v}{x}.$$

⁵Dies steht im Gegensatz zur klassischen Methode, bei der ja a stets als ungerade und b als gerade vorausgesetzt wird.

x	$\frac{x^2}{2}$	u	v	$a = u + x$	$b = v + x$	$c = u + v + x$
2	2	1	2	3	4	5
4	8	1	8	5	12	13
6	18	1	18	7	24	25
		2	9	8	15	17
8	32	1	32	9	40	41
10	50	1	50	11	60	61
		2	25	12	35	37
...	...	...	...	...	...	...

Tabelle 1. PZT mit der alternativen Methode «mit Faktorzerlegung» berechnet

Nun definieren wir

$$U := \frac{u}{x} \in \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad V := \frac{v}{x} \in \mathbb{Q}. \quad (5)$$

Äquivalent zur Grundgleichung $x^2 = 2uv$ ist somit die Bruchgleichung

$$U \cdot V = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Wie im Abschnitt 3.1 nehmen wir hier stets an, dass $u < v$ und somit auch $U < V$ gilt. Daraus folgt $U^2 < U \cdot V = 1/2 < V^2$ und damit

$$U < \frac{1}{\sqrt{2}} < V. \quad (7)$$

Die Methode der Brüche erlaubt somit eine Beschreibung der PZT mit einem einzigen rationalen Parameter. Im Folgenden verwenden wir die Notation

$$U = \frac{r}{s},$$

falls U gekürzt ist; d. h., r und s sind teilerfremd. In diesem Fall gilt (vgl. (6))

$$V = \frac{s}{2r}. \quad (8)$$

Da wir U und V in der Form benötigen, in der sie den gemeinsamen Nenner x haben (vgl. (5)), müssen die Brüche $U = r/s$ und $V = s/(2r)$ gleichnamig gemacht werden. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem ob s gerade oder ungerade ist.

- (1) Falls s gerade ist, ergibt sich $x = \text{kgV}(s, 2r) = \text{kgV}(s, r) = rs$. Wegen (5) gilt $u = U \cdot x$ und $v = V \cdot x$ und somit $u = r/s \cdot r \cdot s = r^2$, $v = s/(2r) \cdot r \cdot s = s^2/2$. Für s gerade haben wir somit

$$x = rs, \quad u = r^2, \quad v = \frac{s^2}{2}. \quad (9)$$

In diesem Fall ist x gerade, u ungerade und v gerade. Wir schliessen daraus, dass $a = u + x$ ungerade, $b = v + x$ gerade und $c = u + v + x$ ungerade ist.

(2) Für s *ungerade* haben wir $x = \text{kgV}(s, 2r) = 2rs$, und somit

$$x = 2rs, \quad u = 2r^2, \quad v = s^2. \quad (10)$$

In diesem Fall sind x und u gerade und v ist ungerade. Also ist $a = u + x$ gerade, und $b = v + x$ und $c = u + v + x$ sind ungerade.

Nach Voraussetzung sind r und s teilerfremd. Gemäss (9) bzw. (10) sind dann auch u und v teilerfremd. Nach Lemma 2 ist das Tripel (a, b, c) somit primitiv⁶. In den nachstehenden Tabellen 2 und 3 wählen wir stets $U = r/s < 1/\sqrt{2}$ mit r und s teilerfremd.

$U = \frac{r}{s}$	$V = \frac{s}{2r}$	$x = rs$	$u = r^2$	$v = \frac{s^2}{2}$	$a = u + x$	$b = v + x$	$c = u + v + x$
$\frac{1}{2}$	1	2	1	2	3	4	5
$\frac{1}{4}$	2	4	1	8	5	12	13
$\frac{1}{6}$	3	6	1	18	7	24	25
$\frac{1}{8}$	4	8	1	32	9	40	41
$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{3}$	24	9	32	33	56	65
$\frac{1}{10}$	5	10	1	50	11	60	61
$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{3}$	30	9	50	39	80	89
...	...	...	...	...	...	...	...

Tabelle 2. Primitive PZT «mit Brüchen» und s gerade berechnet

$U = \frac{r}{s}$	$V = \frac{s}{2r}$	$x = 2rs$	$u = 2r^2$	$v = s^2$	$a = u + x$	$b = v + x$	$c = u + v + x$
$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	6	2	9	8	15	17
$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{2}$	10	2	25	12	35	37
$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{4}$	20	8	25	28	45	53
$\frac{1}{7}$	$\frac{7}{2}$	14	2	49	16	63	65
$\frac{2}{7}$	$\frac{7}{4}$	28	8	49	36	77	85
$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{6}$	42	18	49	60	91	109
$\frac{1}{9}$	$\frac{9}{2}$	18	2	81	20	99	101
...	...	...	...	...	...	...	...

Tabelle 3. Primitive PZT «mit Brüchen» und s ungerade berechnet

Auch mit der Methode der Brüche erhalten wir sämtliche PZT mit $a < b$.

⁶Nebenbei haben wir damit für Lemma 1 einen alternativen Beweis gefunden.

4 Folgen primitiver pythagoreischer Zahlentripel

Wir wenden die Methode der Brüche (s. Abschnitt 3.2) an, um Beispiele interessanter Folgen von primitiven PZT zu erzeugen.

4.1 Die harmonische Folge

Für den Parameter U wählen wir hier die Folge der Stammbrüche. Wie oben unterscheiden wir die zwei Fälle mit geradem Nenner (s. Tabelle 4) bzw. ungeradem Nenner (s. Tabelle 5). Jedem solchen Zahlentripel entspricht ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem die längere Kathete beinahe gleich lang ist wie die Hypotenuse.

U	$V = \frac{s}{2}$	$x = s$	$u = 1$	$v = \frac{s^2}{2}$	$a = u + x$	$b = v + x$	$c = 1 + v + x$
$\frac{1}{2}$	1	2	1	2	3	4	5
$\frac{1}{4}$	2	4	1	8	5	12	13
$\frac{1}{6}$	3	6	1	18	7	24	25
$\frac{1}{8}$	4	8	1	32	9	40	41
$\frac{1}{10}$	5	10	1	50	11	60	61
$\frac{1}{12}$	6	12	1	72	13	84	85
...	...	...	...	...	...	...	...

Tabelle 4. Primitive PZT mit Stammbrüchen mit geradem Nenner berechnet⁷

U	$V = \frac{s}{2}$	$x = 2s$	$u = 2$	$v = s^2$	$a = u + x$	$b = v + x$	$c = 2 + v + x$
$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	6	2	9	8	15	17
$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{2}$	10	2	25	12	35	37
$\frac{1}{7}$	$\frac{7}{2}$	14	2	49	16	63	65
$\frac{1}{9}$	$\frac{9}{2}$	18	2	81	20	99	101
$\frac{1}{11}$	$\frac{11}{2}$	22	2	121	24	143	145
$\frac{1}{13}$	$\frac{13}{2}$	26	2	169	28	195	197
...	...	...	...	...	...	...	...

Tabelle 5. Primitive PZT mit Stammbrüchen mit ungeradem Nenner berechnet

Unsere Berechnungen legen die Gültigkeit des folgenden Resultates nahe.

⁷Wir bemerken, dass $V \stackrel{(8)}{=} \frac{s}{2}$ in diesem Fall stets eine ganze Zahl ist.

Satz 2. Es sei (a, b, c) ein primitives PZT mit $a < b$.

- (a) Es gilt $c - b = 1$ genau dann, wenn das Tripel von einem Stammbruch U mit geradem Nenner erzeugt ist.
- (b) Es gilt $c - b = 2$ genau dann, wenn das Tripel von einem Stammbruch U mit ungeradem Nenner erzeugt ist.

Beweis. Der erzeugende Bruch hat die Form $U = u/x$ mit dem Zähler und Nenner

$$u \stackrel{(1)}{=} c - b \quad \text{bzw.} \quad x \stackrel{(2)}{=} a + b - c.$$

- (a) Gilt $c - b = 1$, so ist

$$U = \frac{c - b}{a + b - c} = \frac{1}{a + b - c}$$

ein Stammbruch. Nach Lemma 1 haben a und b verschiedene Parität und c ist ungerade. Daraus folgt, dass der Nenner $a + b - c$ gerade ist. Es sei umgekehrt $U = 1/s$ ein Stammbruch mit geradem Nenner. Wegen (9) und $r = 1$ haben wir $c - b = u = r^2 = 1$.

- (b) Gilt nun $c - b = 2$, so ist

$$U = \frac{c - b}{a + b - c} = \frac{2}{a + b - c}.$$

Ferner sind b und c nach Lemma 1 ungerade, und a ist gerade. Es gibt also eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $b = 2k - 1$ und $c = 2k + 1$.

Folglich gilt

$$a^2 = (2k + 1)^2 - (2k - 1)^2 = (2k + 1 + 2k - 1)(2k + 1 - 2k + 1) = 4k \cdot 2 = 8k.$$

Also ist a von der Form $a = 4j$. Wir schliessen, dass

$$a + b - c = 4j + (2k - 1) - (2k + 1) = 4j - 2 = 2(2j - 1).$$

Folglich ist

$$U = \frac{2}{a + b - c} = \frac{2}{2(2j - 1)} = \frac{1}{2j - 1}$$

ein Stammbruch mit ungeradem Nenner. Es sei umgekehrt $U = 1/s$ ein Stammbruch mit ungeradem Nenner. Wegen (10) und $r = 1$ haben wir $c - b = u = 2r^2 = 2$. ■

4.2 Die Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$

Wir wollen jetzt noch den Fall untersuchen, in dem das entsprechende rechtwinklige Dreieck beinahe gleichschenkelig ist, d. h., dass die Katheten beinahe gleich lang sind. Wir setzen also voraus, dass $a \approx b$ und damit auch $U \approx V$. Da nach Annahme stets $U < 1/\sqrt{2} < V$ gilt, suchen wir somit Werte von U und V , die nahe bei $1/\sqrt{2}$ liegen. Beispielsweise sind die Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$ solche Werte.

Die Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$ lautet wie folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} = [0, 1, 2, 2, 2, \dots] = [0, 1, \bar{2}]$$

Es sei $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$ die Kettenbruchentwicklung einer beliebigen irrationalen Zahl α . Die Zähler p_k und Nenner q_k der *Näherungsbrüche* $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$ können mithilfe der folgenden Rekursionsformeln berechnet werden ([6, Satz 1], [1, S. 226]):

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_1 a_0 + 1, \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad (k \geq 2), \quad (11)$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (k \geq 2). \quad (12)$$

Für unser Beispiel ergeben sich die Werte in Tabelle 6.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_k	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	...
p_k	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	...
q_k	1	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	...

Tabelle 6. Zähler und Nenner der Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$

Es ist zu beachten, dass die Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung einer irrationalen Zahl α diese Zahl «eingabeln». Genauer bilden die Näherungsbrüche mit geradem Index eine monoton wachsende und gegen α konvergierende, die Näherungsbrüche mit ungeradem Index eine monoton fallende und ebenfalls gegen α konvergierende Folge. In unserem Beispiel gilt also

$$0 < \frac{2}{3} < \frac{12}{17} < \frac{70}{99} < \frac{408}{577} < \frac{2378}{3363} < \dots < \frac{1}{\sqrt{2}} < \dots < \frac{985}{1393} < \frac{169}{239} < \frac{29}{41} < \frac{5}{7} < 1. \quad (13)$$

Aus der Rekursionsformel (12) folgt unmittelbar:

Lemma 3. Alle Nenner der Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$ sind ungerade. ■

Wir betrachten im Folgenden die mit den Näherungsbrüchen der Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$ erzeugten primitiven PZT (a, b, c) . Wir verwenden dabei den Index des entsprechenden Näherungsbruchs.

In Tabelle 7 erscheinen (blau hervorgehoben) wegen der Formeln (7) und (13) die Näherungsbrüche mit geradem Index k in der Spalte von U_k , diejenigen mit ungeradem Index hingegen in der Spalte von V_k .

k	U_k	V_k	x_k	u_k	v_k	a_k	b_k	c_k
1	$\frac{1}{2}$	1	2	1	2	3	4	5
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	12	8	9	20	21	29
3	$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{7}$	70	49	50	119	120	169
4	$\frac{12}{17}$	$\frac{17}{24}$	408	288	289	696	697	985
5	$\frac{41}{58}$	$\frac{29}{41}$	2378	1681	1682	4059	4060	5741
6	$\frac{70}{99}$	$\frac{99}{140}$	13860	9800	9801	23660	23661	33461
7	$\frac{239}{338}$	$\frac{169}{239}$	80782	57121	57122	137903	137904	195025
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabelle 7. Primitive PZT mit der Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$ berechnet

Satz 3. Für ein primitives PZT (a, b, c) mit $a < b$ gilt $b - a = 1$ genau dann, wenn das Tripel von einem Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$ erzeugt ist.

Beweis. (1) Wir zeigen: Für die mit den Näherungsbrüchen der Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$ erzeugten Tripel (a_k, b_k, c_k) gilt

$$b_k - a_k \stackrel{(4)}{=} v_k - u_k = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

(a) Für gerade k ist $U_k = p_k/q_k$ der k -te Näherungsbruch. Nach [6, Satz 11] sind p_k und q_k teilerfremd. Es gilt

$$V_k \stackrel{(6)}{=} \frac{q_k}{2p_k}.$$

Nach Lemma 3 ist q_k ungerade und somit gelten

$$u_k \stackrel{(10)}{=} 2p_k^2 \quad \text{sowie} \quad v_k \stackrel{(10)}{=} q_k^2.$$

Damit haben wir $v_k - u_k = q_k^2 - 2p_k^2$.

(b) Für ungerade k ist $V_k = p_k/q_k$ der k -te Näherungsbruch mit p_k und q_k teilerfremd. Diesmal gilt

$$U_k \stackrel{(6)}{=} \frac{q_k}{2p_k}.$$

Nach Lemma 3 ist q_k ungerade und damit ist $\text{ggT}(q_k, 2p_k) = 1$. Somit gelten

$$u_k \stackrel{(9)}{=} q_k^2 \quad \text{und} \quad v_k \stackrel{(9)}{=} 2p_k^2.$$

Damit haben wir $v_k - u_k = 2p_k^2 - q_k^2$.

Es bleibt zu zeigen, dass die Gleichung $q_k^2 - 2p_k^2 = (-1)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Wir verifizieren zunächst, dass die Formel für $k = 1$ gilt:

$$q_1^2 - 2p_1^2 = 1^2 - 2 \cdot 1^2 = (-1)^1.$$

Für $k \geq 2$ haben wir

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = [0; 1, \bar{2}] = [0; 1, 2, \dots, 2, \rho_{k+1}] \quad \text{mit } \rho_{k+1} = [\bar{2}] = 1 + \sqrt{2}.$$

Stellen wir nun $1/\sqrt{2}$ als «Näherungsbruch» dar (Formeln (11) und (12)), so erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\rho_{k+1}p_k + p_{k-1}}{\rho_{k+1}q_k + q_{k-1}} = \frac{(1 + \sqrt{2})p_k + p_{k-1}}{(1 + \sqrt{2})q_k + q_{k-1}}.$$

Durch Umformen und Verwenden dass $\sqrt{2}$ irrational ist, ergibt sich schliesslich, dass

$$q_k^2 - 2p_k^2 = q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k \quad \text{für alle } k \geq 2.$$

Dabei ist die letztere Gleichung eine wohlbekannte Identität (z. B. [6, Satz 2]). Folglich gilt $b_k - a_k = v_k - u_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(2) Für die Umkehrung benötigen wir auch die Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2} = [1; \bar{2}]$. Bezeichnen p_k bzw. q_k weiterhin die Zähler bzw. die Nenner der Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$ und $p_k^{(1)}$ die Zähler und $q_k^{(1)}$ die Nenner der Näherungsbrüche von $\sqrt{2}$, so folgt mithilfe des starken Induktionsprinzips [2, S. 92], dass

$$p_{k+1} = q_k^{(1)} \quad \text{und} \quad q_{k+1} = p_k^{(1)} \quad \text{für alle } k \geq 0. \quad (14)$$

Es sei nun (a, b, c) ein primitives PZT mit $b - a = 1$. Nach (1) ist dann auch $v - u = 1$. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem ob v gerade oder ungerade ist.

(a) v ist gerade. In diesem Fall ist a ungerade, und b ist gerade.

Nach Voraussetzung gilt $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$. Da sowohl $c + a$ als auch $c - a$ gerade sind, ist

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c + a}{2} \cdot \frac{c - a}{2}$$

eine Gleichung in ganzen Zahlen. Dabei sind $(c + a)/2$ und $(c - a)/2$ teilerfremd, denn ein gemeinsamer Teiler würde auch a und c teilen. Folglich sind $(c + a)/2$ und $(c - a)/2$ Quadratzahlen, da ihr Produkt eine Quadratzahl ist. Wir setzen $(c - a)/2 = p^2$; also ist $v = c - a = 2p^2$. Wegen $(c + b)(c - b) = a^2$ sind $c + b$ und $c - b$ ungerade und somit auch teilerfremd, denn ein gemeinsamer Teiler würde ebenfalls b und c teilen. Folglich sind $c + b$ und $c - b$ ungerade Quadratzahlen. Wir setzen $u = c - b = q^2$. Gemäss Grundgleichung (3) gilt $x^2 = 2uv = 4p^2q^2$, also $x = 2pq$ und somit $V = v/x = 2p^2/2pq = p/q$. Nach Voraussetzung erhalten wir

$$1 = b - a = v - u = 2p^2 - q^2.$$

Das heisst, das Paar (q, p) erfüllt die *negative Pell'sche Gleichung* $x^2 - 2y^2 = -1$. Um zu zeigen, dass $V = p/q$ ein Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$ ist, folgen wir dem Beweis von [7, Theorem 7.24]. Zunächst gilt

$$\frac{1}{2} = p^2 - \frac{1}{2}q^2 = \left(p - \frac{1}{\sqrt{2}}q\right)\left(p + \frac{1}{\sqrt{2}}q\right).$$

Folglich haben wir

$$0 < p - \frac{1}{\sqrt{2}}q = \frac{1}{2(p + \frac{1}{\sqrt{2}}q)} < \frac{\sqrt{2}}{2(p + \frac{1}{\sqrt{2}}q)}$$

und somit

$$0 < \frac{p}{q} - \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{2}}{2q^2(\frac{p}{q} + \frac{1}{\sqrt{2}})} < \frac{\sqrt{2}}{2q^2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{2q^2}. \quad (15)$$

Dabei gilt die dritte Ungleichung wegen $p/q > 1/\sqrt{2}$. Nach [6, Satz 19] ist dann $p/q = V$ ein Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$. Zudem erkennt man, dass $p/q > 1/\sqrt{2}$ wegen (15) gilt.

(b) v ist ungerade. In diesem Fall ist a gerade, und b ist ungerade. Analog zum Fall (a) schliessen wir, dass $u/2 = (c - b)/2$ und $v = c - a$ Quadratzahlen sind. Wir setzen $u = 2p^2$ und $v = q^2$. Wieder gilt $x = 2pq$, doch diesmal erhalten wir $U = u/x = 2p^2/2pq = p/q$. Gemäss Voraussetzung ergibt sich

$$1 = b - a = v - u = q^2 - 2p^2. \quad (16)$$

Das heisst, das Paar (q, p) erfüllt die (*positive*) *Pell'sche Gleichung* $x^2 - 2y^2 = 1$. Mit analogen Überlegungen wie im Fall (a) erhalten wir, dass q/p ein Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ ist. Gemäss (14) ist dann $p/q = U$ ein Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von $1/\sqrt{2}$. Zudem folgt mit (16), dass $q/p > \sqrt{2}$ ist; entsprechend gilt $p/q < 1/\sqrt{2}$. ■

Pythagoreische Tripel mit $|b - a| = 1$ werden auch *Fermat-Tripel* genannt. Interessant ist, dass F. Beatrix die Näherungsbrüche m_k/n_k der Kettenbruchentwicklung von $1 + \sqrt{2}$ verwendet, um mit der klassischen Methode ebenfalls Fermat-Tripel zu erzeugen [3, S. 11].

Literatur

- [1] C. Albertini und M. Huber, *Kalender – Kunstwerke aus Mathematik, Astronomie und Geschichte*. Carl Hanser Verlag, München, 2021
- [2] C. Albertini und M. Huber, *Grundbegriffe der Mathematik*, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage, Carl Hanser Verlag, München, 2023 Zbl [1511.00004](#)
- [3] F. Beatrix, Unlocking a new realm of Pythagorean triples. *Parabola* **2** (2023), 1–33
- [4] L. E. Dickson, [Lowest integers representing sides of a right triangle](#). *Amer. Math. Monthly* **1** (1894), no. 1, 6–11 MR [1513298](#)
- [5] A. Hoehn und M. Huber, *Pythagoras. Erinnern Sie sich? Faszinierendes aus Geometrie, Zahlentheorie und Kulturgeschichte*. Orell Fuessli Verlag, Zürich, 2005
- [6] A. Khintchine, *Kettenbrüche*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1956 Zbl [0071.03601](#) MR [80630](#)

- [7] I. Niven, H. S. Zuckerman und H. L. Montgomery, *An introduction to the theory of numbers*. Fifth edn., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991 Zbl [0742.11001](#) MR [1083765](#)
- [8] M. O’Loughlin, *The circle as generator of Pythagorean triangles*. *Elem. Math.* **79** (2024), no. 2, 71–76 Zbl [1547.11043](#) MR [4733290](#)
- [9] H. Rademacher und O. Toeplitz, *Von Zahlen und Figuren*. Heidelberger Taschenb. 50, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1968. Zbl [0169.29004](#)
- [10] J. Rukavicka, Dickson’s method for generating Pythagorean triples revisited. *Eur. J. Pure Appl. Math.* **6** (2013), no. 3, 363–364 Zbl [1370.11049](#) MR [3093287](#)
- [11] E. Scheffold, Ein Bild der Pythagoreischen Zahlentripel. *Elem. Math.* **50** (1995), 26–27
- [12] H. Scheid und W. Schwarz, *Elemente der Arithmetik und Algebra*. 5. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008 Zbl [1133.00002](#)
- [13] B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*. Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1956 Zbl [0158.00304](#) MR [80581](#)

Claudia Albertini
Pädagogische Hochschule Zürich
Lagerstrasse 2
8090 Zürich, Switzerland
claudia.albertini@phzh.ch

Martin Huber
Trichtenhausenstrasse 86
8053 Zürich, Switzerland
hu_ma@bluewin.ch

Bernhard Keller
Pädagogische Hochschule Zürich
Lagerstrasse 2
8090 Zürich, Switzerland
bernhard.keller@phzh.ch