

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 31. Dezember 2026 erbeten und können auf postalischem Weg an

Martin Lukarevski, Kosta Novakovik 46, 3-7, 1000 Skopje, Nordmazedonien

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Anhang auch über die E-Mail-Adresse [martin.lukarevski@ugd.edu.mk](mailto:martin.lukarevski@ugd.edu.mk) eingereicht werden.

Lösungen und neue Aufgaben können auf Deutsch oder auf Englisch abgefasst sein.

### New problems

Solutions are requested by 31 December 2026 and may be sent by post to

Martin Lukarevski, Kosta Novakovik 46, 3-7, 1000 Skopje, North Macedonia.

Solutions prepared in a commonly used format may also be submitted as an attachment to the email address [martin.lukarevski@ugd.edu.mk](mailto:martin.lukarevski@ugd.edu.mk).

The language in which the solutions and the new problem proposals are written may be either German or English.

**Problem 1473:** For a natural number  $n \geq 2$ , consider the polynomial

$$P_n(x) = x^n - x - n.$$

Prove that,

- (a) for each  $n \geq 2$ , the polynomial  $P_n(x)$  has a unique positive zero  $x_n$  and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_n - \sqrt[n]{n}) = 1;$$

- (b) the sequence of the zeroes  $\{x_n\}_{n \geq 2}$  is monotonically decreasing.

Dan Ștefan Marinescu, Hunedoara, RO and Eugen Păltănea, Brașov, RO

**Problem 1474:** Find the best constant  $C > 0$  such that, for all  $x \in \mathbb{R}$ , the following inequality holds:

$$\frac{1}{2 + \sin^2 x \cos^2 x} + \frac{1}{2 + 3 \sin^2 x} + \frac{1}{2 + 3 \cos^2 x} \geq C + \frac{1}{2 + \sin^4 x} + \frac{1}{2 + \cos^4 x}.$$

Mihály Bencze, Braşov, RO

**Aufgabe 1475 (Die einfache dritte Aufgabe):** Im endlichen Körper

$$\text{GF}(p) = \{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$$

(rechnen modulo  $p$ ) für die Primzahlen  $p = 3, 5, 7, 11, \dots$  betrachtet man die Gleichung

$$x^5 + x + 1 = 0.$$

Für welche Primzahlen hat diese eine Doppelwurzel?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

## Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2025

**Aufgabe 1461.** Gegeben ist ein beliebiges Dreieck  $ABC$  mit Umkreis  $u$ . Die äussere Winkelhalbierende  $w_\gamma^*$  in  $C$  schneide  $u$  in einem weiteren Punkt  $D$ . Ferner sei  $H$  ein beliebiger Punkt auf der inneren Winkelhalbierenden  $w_\gamma$ . Die zu  $HA$  senkrechte Gerade durch  $A$  schneide  $w_\gamma^*$  in  $E$ , die zu  $HB$  senkrechte Gerade durch  $B$  schneide  $w_\gamma^*$  in  $F$ . Zeige, dass  $D$  die Strecke  $EF$  halbiert.

Bernhard Ruh, Zuchwil, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von folgenden 12 Lesern sind Lösungen eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Leser lösen die Aufgabe mit analytischer Geometrie. Es gibt alternative Lösungen in Bezug auf das Koordinatensystem und das Dreieck, von denen wir die eleganteste von Roland Wyss vorstellen. Wir wählen in der  $xy$ -Ebene ein Koordinatensystem so, dass die Ecke  $C$  im Ursprung liegt, die innere Winkelhalbierende  $w_\gamma$  mit der  $x$ -Achse und die äussere Winkelhalbierende  $w_\gamma^*$  mit der  $y$ -Achse zusammenfällt. Dann haben die Eckpunkte die Koordinaten

$$A\left(b \cos \frac{\gamma}{2}, b \sin \frac{\gamma}{2}\right), \quad B\left(a \cos \frac{\gamma}{2}, -a \sin \frac{\gamma}{2}\right), \quad C(0, 0).$$

Mit elementaren Berechnungen erhält man den Mittelpunkt  $M = (M_x, M_y)$  des Umkreises  $u$ :

$$M = \left( \frac{a+b}{4 \cos(\gamma/2)}, \frac{b-a}{4 \sin(\gamma/2)} \right).$$

Da der Umkreis durch den Ursprung  $C$  verläuft, ist sein Radiusquadrat gleich  $M_x^2 + M_y^2$ . Die Kreisgleichung liefert

$$y^2 - 2y \frac{b-a}{4 \sin(\gamma/2)} = 0$$

beim Nullsetzen von  $x$ . Somit ist  $y = 0$ , also der Punkt  $C$ , oder der zweite Schnittpunkt  $D$  des Umkreises mit der äusseren Winkelhalbierenden  $w_\gamma^*$  ( $y$ -Achse):

$$D\left(0, \frac{b-a}{2 \sin(\gamma/2)}\right).$$

Für den zweiten Teil sei  $H = (h, 0)$  ein beliebiger Punkt auf der inneren Winkelhalbierenden  $w_\gamma$  ( $x$ -Achse). Im Punkt  $A$  wird das Lot zur Richtung  $\overrightarrow{HA} = (b \cos \frac{\gamma}{2} - h, b \sin \frac{\gamma}{2})$  errichtet. Eine Parameterdarstellung dieser Geraden ist

$$\vec{r} = \left(b \cos \frac{\gamma}{2}, b \sin \frac{\gamma}{2}\right) + \rho \left(-b \sin \frac{\gamma}{2}, b \cos \frac{\gamma}{2} - h\right).$$

Ihr Schnittpunkt  $E$  mit der  $y$ -Achse, also mit  $w_\gamma^*$ , entsteht durch Einsetzen von  $x = 0$  und ist

$$E\left(0, \frac{b - h \cos(\gamma/2)}{\sin(\gamma/2)}\right).$$

Für das Lot im Punkt  $B(a \cos \frac{\gamma}{2}, -a \sin \frac{\gamma}{2})$  zur Richtung  $\overrightarrow{BH} = (h - a \cos \frac{\gamma}{2}, a \sin \frac{\gamma}{2})$  erhält man analog die Parameterdarstellung

$$\vec{r} = \left(a \cos \frac{\gamma}{2}, -a \sin \frac{\gamma}{2}\right) + \tau \left(-a \sin \frac{\gamma}{2}, h - a \cos \frac{\gamma}{2}\right).$$

Der Schnittpunkt  $F$  mit der  $y$ -Achse ist daher

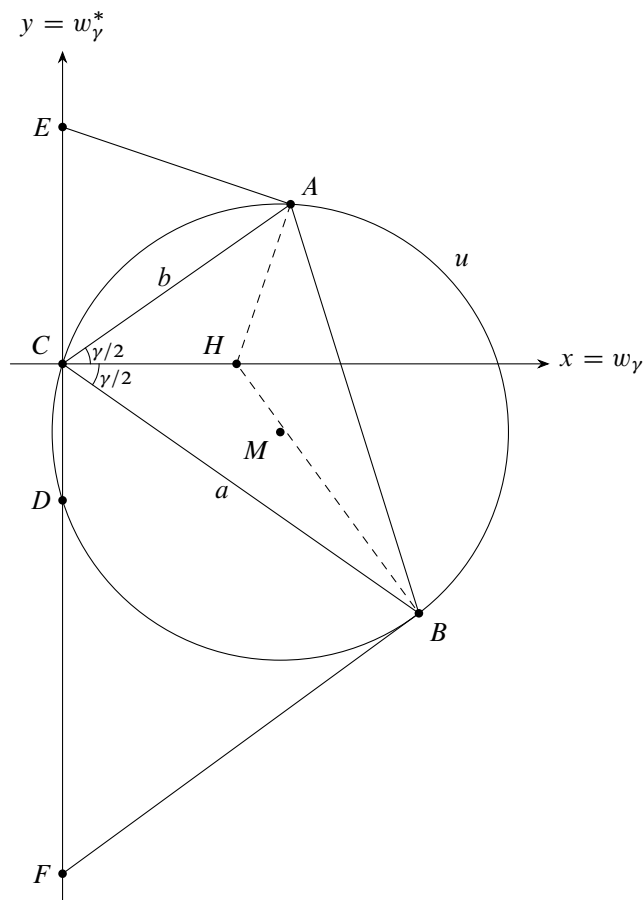
$$F\left(0, \frac{h \cos(\gamma/2) - a}{\sin(\gamma/2)}\right).$$

Das arithmetische Mittel der  $y$ -Koordinaten von  $E$  und  $F$  ist

$$\frac{1}{2} \left( \frac{b - h \cos(\gamma/2)}{\sin(\gamma/2)} + \frac{h \cos(\gamma/2) - a}{\sin(\gamma/2)} \right) = \frac{b-a}{2 \sin(\gamma/2)}.$$

Dies ist genau die  $y$ -Koordinate von  $D$ . Da  $D, E, F$  alle auf der  $y$ -Achse liegen, halbiert  $D$  die Strecke  $EF$ .

**Bemerkung.** Roland Wyss und Hans Brandstetter bemerken, dass wenn der Punkt  $H$  auf dem Umkreis  $u$  liegt, so fallen  $E$  und  $F$  mit  $D$  zusammen, denn  $u$  wird dann zum Thaleskreis über  $AH$  bzw.  $BH$ . Der zweite Spezialfall, bemerkt von Gerhard Wanner, ist wenn  $H$  der Inkreismittelpunkt von  $ABC$  ist. Dann ist  $ABC$  das Höhenfusspunkt-dreieck von  $EFG$ ,  $G$  in der Verlängerung von  $EA$  und  $FB$ . Somit ist  $u$  der Neun-Punkte-Kreis (Feuerbach-Kreis) von  $EFG$ . Dieser geht bekanntlich durch die Mittelpunkte der drei Dreiecksseiten und daher ist  $D$  der Halbierungspunkt von  $E$  und  $F$ .



**Aufgabe 1462.** Berechne den Wert des Integrals

$$I(a) = \int_0^\pi \frac{x}{1 + a \sin x} dx, \quad a > 1.$$

Michael Vowe, Therwil, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind Zuschriften von folgenden 16 Lesern eingegangen: Ulrich Abel (Friedberg, D) und Vitaliy Kushnirevych (Friedberg, D), Necdet Batır (Nevşehir, TR), Hans Brandstetter (Wien, A), Frieder Grupp (Bergheimfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Raymond Mortini (Luxembourg, LU) und Rudolf Rupp (Nürnberg, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Seán M. Stewart (Thuwal, SA), Gerhard Wanner (Genève, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Unter Beachtung der Fallunterscheidungen des Parameters  $a$  ergeben sich die folgenden Formeln für das Integral:

$$I(a) = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} \arccos(a), & |a| < 1, \\ \pi, & a = 1, \\ \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arcosh}(a), & a > 1. \end{cases}$$

Die meisten Löser gehen ähnlich vor wie *Christian Schindler*, dessen Lösung unten abgedruckt ist und die sich von den anderen Lösungen dadurch abhebt, dass der Fall  $|a| < 1$  vom Fall  $a > 1$  abgeleitet wird. Es gilt

$$I(a) = \int_0^\pi \frac{x}{1+a \sin x} dx = \int_0^\pi \frac{\pi-x}{1+a \sin x} dx,$$

daher

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{1}{1+a \sin x} dx$$

und da der Integrand symmetrisch um  $\pi/2$  ist, gilt

$$I(a) = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a \sin x} dx.$$

Letzteres Integral geht mit der bekannten Substitution

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

in das Integral der folgenden rationalen Funktion über:

$$I(a) = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{1+2at+t^2} dt.$$

Im speziellen Fall  $a = 1$  folgt sofort  $I(1) = \pi$ .

Für  $a > 1$  gilt

$$\frac{1}{1+2at+t^2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \left( \frac{1}{t+a-\sqrt{a^2-1}} - \frac{1}{t+a+\sqrt{a^2-1}} \right),$$

und folglich

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+2at+t^2} dt &= \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \log \left( \frac{t+a-\sqrt{a^2-1}}{t+a+\sqrt{a^2-1}} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \log(a + \sqrt{a^2-1}) = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arcosh}(a). \end{aligned}$$

Falls  $-1 < a < 1$ , hat man

$$a + \sqrt{a^2-1} = a + i\sqrt{1-a^2} = \exp(i \arccos a),$$

und daher

$$I(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} \arccos(a).$$

**Aufgabe 1463 (Die einfache dritte Aufgabe).** Die beiden endlichen Körpererweiterungen  $\mathbb{Z}_5(\sqrt{2})$  und  $\mathbb{Z}_5(\sqrt{3})$  haben jeweils 25 Elemente und sind daher zueinander isomorph. Man konstruiere einen Isomorphismus  $\varphi: \mathbb{Z}_5(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Z}_5(\sqrt{3})$  (mit den üblichen Eigenschaften  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ,  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ ) unter Benutzung des Elements  $\alpha = 2 + \sqrt{2}$ , welches den erstgenannten Körper durch fortlaufendes Potenzieren erzeugt.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind Zuschriften von folgenden 7 Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Christian Schindler (Allschwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Michael Vowe (Therwil, CH).

Wir folgen der Lösung von *Fritz Siegerist* und *Christian Schindler*. Es gibt genau zwei Isomorphismen  $\varphi: \mathbb{Z}_5(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Z}_5(\sqrt{3})$ . Sei  $\varphi(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{3}$ . Wegen  $\varphi(2) = \varphi(1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) = 2$ , gilt dann

$$(\varphi(\sqrt{2}))^2 = (a + b\sqrt{3})^2 = 2 \pmod{5}.$$

Somit muss  $a^2 + 3b^2 = 2 \pmod{5}$  und  $2ab = 0 \pmod{5}$  gelten. Letztere Gleichung impliziert  $a = 0$  oder  $b = 0$ . Der zweite Fall ist unmöglich, da sonst  $a^2 = 2 \pmod{5}$  sein müsste. Daher gilt  $3b^2 = 2 \pmod{5}$  mit den Kandidaten 0, 1, 2, 3, 4 für  $b$ . Man findet  $b = 2$  oder  $b = 3$  und man hat genau zwei Lösungen:

$$\boxed{\varphi_1(\alpha) = 2 + 2\sqrt{3} \quad \text{oder} \quad \varphi_2(\alpha) = 2 + 3\sqrt{3}}.$$

**Korrigendum.** *Raymond Mortini* hat bemerkt, dass der letzte Schritt in der Lösung der **Aufgabe 1459** im letzten Heft nicht korrekt ist. Wir geben hier eine Lösung adaptiert von der Lösung der Aufgabensteller, in der die Simpsonregel mit Restglied angewandt wird. Nach der Regel für  $h \in C^4([a, b])$  existiert ein  $\theta \in (a, b)$ , so dass

$$\int_a^b h(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[ h(a) + 4h\left(\frac{a+b}{2}\right) + h(b) \right] - \frac{(b-a)^5}{2880} h^{(4)}(\theta).$$

Wir definieren

$$g(x) = f\left(\frac{b+x}{2}\right) - f\left(\frac{a+x}{2}\right), \quad x \in [a, b].$$

Dann ist  $g \in C^4([a, b])$  und

$$\begin{aligned} g(a) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a), & g(b) &= f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right), \\ g\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{a+3b}{4}\right) - f\left(\frac{3a+b}{4}\right). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Annahmen

$$f(a) = f(b), \quad f\left(\frac{a+3b}{4}\right) = f\left(\frac{3a+b}{4}\right)$$

folgt

$$g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) = 0.$$

Die Simpsonregel angewendet auf  $g$  ergibt somit

$$\int_a^b g(x) dx = -\frac{(b-a)^5}{2880} g^{(4)}(\theta)$$

für ein  $\theta \in (a, b)$ .

Aus

$$g^{(4)}(x) = \frac{1}{24} \left[ f^{(4)}\left(\frac{b+x}{2}\right) - f^{(4)}\left(\frac{a+x}{2}\right) \right]$$

folgt

$$\int_a^b g(x) dx = -\frac{(b-a)^5}{46080} \left[ f^{(4)}\left(\frac{b+\theta}{2}\right) - f^{(4)}\left(\frac{a+\theta}{2}\right) \right].$$

Nach dem Mittelwertsatz angewendet auf  $f^{(4)}$  existiert ein

$$c \in \left( \frac{a+\theta}{2}, \frac{b+\theta}{2} \right) \subset (a, b),$$

so dass

$$f^{(4)}\left(\frac{b+\theta}{2}\right) - f^{(4)}\left(\frac{a+\theta}{2}\right) = \frac{b-a}{2} f^{(5)}(c).$$

Somit

$$\int_a^b g(x) dx = -\frac{(b-a)^6}{92160} f^{(5)}(c).$$

Wir bemerken, dass

$$\int_a^b f\left(\frac{b+x}{2}\right) dx = 2 \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(u) du, \quad \int_a^b f\left(\frac{a+x}{2}\right) dx = 2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(v) dv.$$

Folglich

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx = -\frac{1}{2} \int_a^b g(x) dx.$$

Mit der Formel für  $\int_a^b g(x) dx$  folgt

$$\left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right| = \frac{(b-a)^6}{184320} |f^{(5)}(c)|$$

und schliesslich

$$\left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^6}{184320} \sup_{x \in [a, b]} |f^{(5)}(x)|.$$

**Bemerkung.** *Dan Ștefan Marinescu* hat eine verspätete Lösung der **Aufgabe 1458** geschickt, in der er die Ungleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq 1 + \frac{R}{r}$$

beweist. Mit der Substitution  $a = y + z$ ,  $b = z + x$ ,  $c = x + y$ , mit  $x, y, z > 0$ , ist die zu beweisende Ungleichung äquivalent zu  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \leq 1 + \frac{R}{r}$ . Da

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} = \frac{\sum_{\text{cyc}} a^2 c}{abc},$$

erhalten wir mit der Substitution

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} = \frac{\sum_{\text{cyc}} (y+z)^2 (x+y)}{abc}.$$

Nun gilt die Identität

$$\sum_{\text{cyc}} (y+z)^2 (x+y) = (x+y+z)^3 - \sum_{\text{cyc}} xy^2 = s^3 - \sum_{\text{cyc}} xy^2.$$

Aus der AM-GM-Ungleichung folgt  $\sum_{\text{cyc}} xy^2 \geq 3xyz$ . Daher ist

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \leq \frac{s^3 - 3xyz}{abc}.$$

Mit den Standardidentitäten  $abc = 4Rrs$ ,  $xyz = r^2s$  folgt

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \leq \frac{s^3 - 3r^2s}{4Rrs} = \frac{s^2 - 3r^2}{4Rr}.$$

Nach der Ungleichung von Gerretsen gilt  $s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ . Damit erhalten wir

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \leq \frac{4R^2 + 4Rr}{4Rr} = 1 + \frac{R}{r}.$$