Elemente der Mathematik 81 (2026), 179–184
DOI 10.4171/EM/597

© 2026 Swiss Mathematical Society
Published by EMS Press
This work is licensed under a CC BY 4.0 license

# Aufgaben

## Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2027 erbeten und können auf postalischem Weg an

Martin Lukarevski, Kosta Novakovik 46, 3–7, 1000 Skopje, Nordmazedonien

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Anhang auch über die E-Mail-Adresse martin.lukarevski@ugd.edu.mk eingereicht werden.

Lösungen und neue Aufgaben können auf Deutsch oder auf Englisch abgefasst sein.

## New problems

Solutions are requested by 10 May 2027 and may be sent by post to

Martin Lukarevski, Kosta Novakovik 46, 3-7, 1000 Skopje, North Macedonia.

Solutions prepared in a commonly used format may also be submitted as an attachment to the email address martin.lukarevski@ugd.edu.mk.

The language in which the solutions and the new problem proposals are written may be either German or English.

**Aufgabe 1476:** Es sei $p$ eine Primzahl mit $p \equiv 1 \pmod 6$. Die Gleichung

$$\frac{3}{p-2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

hat genau dann eine einzige Lösung mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $a < b$, wenn $p-2$ eine Primzahl ist. Das Paar $(p-2, p)$ ist also ein Primzahlzwillingspaar.

Frieder Grupp, Bergrheinfeld, D

**Problem 1477:** Show that, for every positive integer $n$, there exists a polynomial $P \in \mathbb{Z}[x]$ of degree $n$, all of whose coefficients have absolute value at most $n$, such that 1 is a root of $P$ with multiplicity at least $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Mohammed Aassila, Strasbourg, F

**Problem 1478 (The simple third problem):** Let $n$ be any positive integer. Show that there is a unique permutation $\pi_n \in S_n$ such that all the numbers $k + \pi_n(k)$, $k = 1, \ldots, n$, are powers of two.

George Stoica, Saint John, CA

## Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2025

**Aufgabe 1464.** Man betrachte alle räumlichen Fünfecke mit lauter gleich langen Seiten und vier gleich grossen Winkeln und bestimme, wie gross der übrige Winkel maximal sein kann.

Moritz Adelmeyer, Zürich, CH und Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind Lösungen von 8 Lesern eingetroffen: Klaus Bickel (Freiburg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D), Karl Wirth (Zürich, CH).

Die Lösungsvorschläge, welche die Cayley-Menger-Determinante verwenden, sind besonders elegant. Wir folgen *Volkhard Schindler*, der solche Lösung eingereicht hat. Im Fünfeck $P_1P_2P_3P_4P_5$ bezeichne $a_{ik}$ den Abstand $P_iP_k$. Offenbar gilt $a_{ik} = a_{ki}$. Der Fünfpunktesatz von Euler besagt, dass die Abstände zwischen beliebigen fünf Punkten in einem dreidimensionalen euklidischen Raum ($\mathbb{R}^3$) nicht unabhängig voneinander sind. Sie müssen stets eine bestimmte algebraische Bedingung erfüllen. Mathematisch wird diese Bedingung ausgedrückt, indem die Cayley-Menger-Determinante dieser fünf Punkte auf null gesetzt wird:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 & a_{15}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 & a_{25}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2 & a_{35}^2 \\ 1 & a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & 0 & a_{45}^2 \\ 1 & a_{51}^2 & a_{52}^2 & a_{53}^2 & a_{54}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die genannten vier gleich grossen Winkel $t$ ordnen wir den Ecken $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ und den übrigen Winkel $\alpha$ der Ecke $P_1$ zu. Wir setzen o. B. d. A.

$$a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{34} = a_{43} = a_{45} = a_{54} = a_{51} = a_{15} = 1.$$

Den Abstand zwischen den Punkten $P_2$ und $P_5$ bezeichnen wir mit $e$, $a_{25} = a_{52} = e$, und bemerken, dass der Winkel $\alpha$ genau dann maximal ist, wenn die Diagonale $e = P_2P_5$ maximal ist. Die vier gleich grossen Winkel $t$ bedingen, dass die 4 Abstände zwischen den 4 Punkten $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ und ihren jeweiligen übernächsten Nachbarn gleich sind. Diese Abstände bezeichnen wir mit $d$:

$$a_{13} = a_{31} = a_{24} = a_{42} = a_{35} = a_{53} = a_{41} = a_{14} = d.$$

Mit dem Cosinus-Satz gilt $d^2 = 2(1-\cos t)$ und $e^2 = 2(1-\cos\alpha)$. Das Obige setzen wir nun in die Determinante ein. Wir berechnen und faktorisieren sie und erhalten

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & d^2 & d^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & d^2 & e^2 \\ 1 & d^2 & 1 & 0 & 1 & d^2 \\ 1 & d^2 & d^2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & e^2 & d^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1-d^2+e)(-1+d^2+e) \\ (5-14d^2+d^4-e^2+4d^2e^2) = 0.$$

Wenn einer der ersten zwei Faktoren null ist, $e^2 = (d^2-1)^2$, dann sind die Punkte $P_2, P_3, P_4, P_5$ koplanar wegen ihrer Cayley-Menger-Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & d^2 & e^2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & d^2 \\ 1 & d^2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & e^2 & d^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2(-2d^2+e^2-1)(e^2-(d^2-1)^2),$$

die in diesem Fall verschwindet. Betrachtet man die Cayley-Menger-Determinante des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & d^2 & d^2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & d^2 \\ 1 & d^2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & d^2 & d^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2(d^2+1)(d^4-3d^2+1) \geq 0,$$

so findet man leicht, dass

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq d \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi,$$

wobei $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ der goldene Schnitt ist.

Die Randwerte von $d$ liefern die $e$-Maximalwerte $e = \frac{\sqrt{5}\pm1}{2}$. Wegen

$$\alpha = \arccos\Big(1-\frac{e^2}{2}\Big) \quad \text{und} \quad \arccos\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Big) = 108^\circ,\ \arccos\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big) = 36^\circ$$

sind die Fünfecke mit maximalem übrigem Winkel ebene Fünfecke und das sind das reguläre Pentagon und das Pentagramm.

Der interessantere dritte Faktor auf null gesetzt liefert

$$e^2 = f(d) = \frac{d^4-14d^2+5}{1-4d^2},$$

und hat wegen

$$f'(d) = -\frac{4d(2d^2-3)(d^2+1)}{(1-4d^2)^2}$$

ein Maximum für $d = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Für diesen Wert ist $e^2 = f(\sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{11}{4}$ und daher ist der zugehörige grösste Winkel $\alpha = \arccos(-\frac{3}{8}) \approx \mathbf{112.024}°$. Dieser Winkel ist tatsächlich etwas grösser als 108°, welcher beim ebenen regulären Fünfeck auftritt. Die übrigen vier Winkel sind $t = \arccos\frac{1}{4} \approx 75.522°$.

**Bemerkung.** *Bernhard Ruh* konstruiert ein Fünfeck mit diesen Winkeln und lauter gleich langen Seiten. Die Punkte

$$P_1 = \Big(0, 0, \frac{\sqrt{5}}{2}\Big), \quad P_2 = \Big(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{10}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{4}\Big), \quad P_3 = \Big(-\frac{1}{2}, 0, 0\Big),$$
$$P_4 = \Big(\frac{1}{2}, 0, 0\Big), \qquad P_5 = \Big(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{10}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{4}\Big)$$

bilden ein Fünfeck mit Seitenlängen 1, Winkel $t = \arccos(\frac{1}{4}) \approx 75.52°$ bei den Punkten $P_2, P_3, P_4, P_5$ und maximalem Winkel $\alpha = \arccos(-\frac{3}{8}) \approx 112.02°$ bei $P_1$.

**Aufgabe 1465.**

(a) Man bestimme die maximale Länge $l$ einer nicht konstanten arithmetischen Folge von Quadratzahlen, unter denen sich die Zahl 2025 befindet.

(b) Man gebe alle derartigen Folgen mit Länge $l$ an.

Walther Janous, Innsbruck, A

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind Lösungen von 6 Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH).

Zur vollständigen Lösung ist der 1780 bewiesene Satz von Euler nötig, wonach es keine vier verschiedenen Quadratzahlen in einer arithmetischen Folge geben kann. Diese Behauptung ist bereits 1640 ohne Beweis von Fermat aufgestellt worden. Ein Artikel dazu mit einem schönen Beweis ist sehr aktuell erschienen: G. J. O. Jameson, Equally spaced squares and some impossible identities. *Math. Gaz.* **108** (2024), no. 572, 201–208.

Die folgende Lösung setzt sich aus den Beiträgen von *Bernhard Ruh* und *Frieder Grupp* zusammen.

Für $N_i \in \mathbb{N}$ mit $N_1 < N_2 < N_3$ bestimmen wir alle Lösungen von

$$N_2^2 - N_1^2 = N_3^2 - N_2^2,$$

wobei $N_i^2 = 2025 = 45^2$ für ein $i$ gilt.

Es sei zunächst $N_1^2 = 2025 = 45^2$, also $N_3^2 + 45^2 = 2N_2^2$. Rechnen wir diese Gleichung modulo 5, so folgt $N_2 \equiv N_3 \equiv 0 \pmod 5$, da Quadratzahlen modulo 5 nur die Werte 0, 1 oder 4 annehmen. Analog findet man $N_2 \equiv N_3 \equiv 0 \pmod 9$. Mit $N_3^2 = 45^2 x^2$, $N_2^2 = 45^2 y^2$, $x, y \in \mathbb{N}$, erhalten wir somit die negative Pellsche Gleichung

$$x^2 - 2y^2 = -1.$$

Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen

$$x_n + \sqrt{2}\, y_n = (1 + \sqrt{2})^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die ersten vier Lösungen $(x_n, y_n)$ sind $(1,1)$, $(7,5)$, $(41,29)$, $(239,169)$. Daher sind die ersten drei Lösungen einer arithmetischen Folge $(45^2, N_2^2, N_3^2)$ von unendlich vielen:

$$\begin{aligned}(45^2, 225^2, 315^2), &\qquad d = 48600,\\ (45^2, 1305^2, 1845^2), &\qquad d = 1701000,\\ (45^2, 7605^2, 10755^2), &\qquad d = 57834000.\end{aligned}$$

Es sei nun $N_2^2 = 2025 = 45^2$, also $N_1^2 + N_3^2 = 2N_2^2 = 4050$. Die Zahlen $N_1$ und $N_3$ haben dieselbe Parität. Beide müssen ungerade sein, denn $4 \nmid 4050$. Wegen $N_3 < \sqrt{4050} \approx 63.64$ kommen für $N_3$ nur die ungeraden Zahlen zwischen 47 und 63 in Betracht. Man prüft leicht, dass $N_3 = 63$ und $N_1 = 9$ die einzige Lösung ist. Folglich ist

$$(9^2, 45^2, 63^2), \quad d = 1944$$

die gesuchte arithmetische Folge $(N_1^2, 45^2, N_2^2)$.

Als letzte Möglichkeit sei $N_3^2 = 2025 = 45^2$, also $N_1^2 + 2025 = 2N_2^2$. In diesem Fall prüft man einfach rechnerisch nach, dass in der Folge

$$\Big(N_1^2, \frac{45^2 + N_1^2}{2}, 45^2\Big), \quad 1 \le N_1 \le 44,\ N_1 \text{ ungerade},$$

die mittlere Zahl nie ein Quadrat ist.

Nun lassen wir die Bedingung $d > 0$ weg und fassen zusammen: Wegen Fermat ist $\ell = 3$. Es gibt unendlich viele Folgen, die mit 2025 beginnen. Sie haben die Form

$$(2025, 2025y_i^2, 2025x_i^2),$$

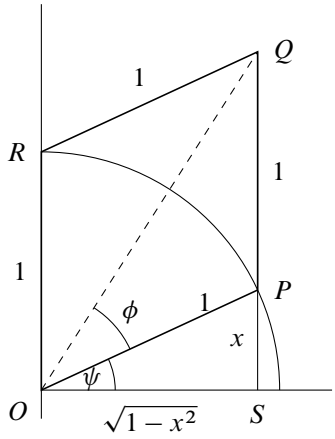
wobei $(x_i, y_i)$ die bekannten Lösungen der Pellschen Gleichung $x^2 - 2y^2 = -1$ sind. Des Weiteren gibt es zwei Folgen mit 2025 als mittlerem Glied, nämlich $(81, 2025, 3969)$ und $(3969, 2025, 81)$. Schliesslich gibt es wiederum unendlich viele Lösungen mit 2025 als drittem Glied, alle mit $d < 0$, die man einfach durch Umkehrung der Lösungen aus dem ersten Fall erhält.

**Aufgabe 1466 (Die einfache dritte Aufgabe).** Man vereinfache für $|x| < 1$ den Ausdruck

$$D(x) = \cos\Big(2\arctan\Big(\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\Big) - 2\arctan\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big)\Big).$$

Raymond Mortini, Metz, F und Rudolf Rupp, Nürnberg, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von 17 Lesern sind Beiträge eingegangen: Ulrich Abel (Friedberg, D) und Vitaliy Kushnirevych (Friedberg, D), Klaus Bickel (Freiburg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Frieder Grupp (Bergrheinfeld, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Seán M. Stewart (Thuwal, SA), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D), Roland Wyss (Flumenthal, CH).




Es ist $D(x) = x$. Die Lösungsvorschläge lassen sich in drei Kategorien einteilen. Die erste umfasst geometrische Lösungen und in der zweiten werden trigonometrische Identitäten verwendet. Wir folgen zunächst der Lösung von *Gerhard Wanner*, dessen Beitrag der ersten Kategorie zuzurechnen ist. Dann präsentieren wir auch die einzige analytische Lösung von *Bernhard Ruh*, die zur dritten Kategorie gehört.

Die Differenz der beiden arctan Ausdrücke ist der Basiswinkel $\phi$ des gleichschenkligen Dreiecks $OPQ$. Um den Winkel $2\phi$ zu erhalten, spiegeln wir dieses Dreieck an seiner Basislinie und erhalten den Rhombus $OPQR$. Da $PQ$ senkrecht steht, tut das auch $RO$. Somit gilt $2\phi + \psi = \frac{\pi}{2}$, und wir erhalten

$$D(x) = \cos 2\phi = \sin \psi = x.$$

Für die zweite Lösung sei $f(x)$ das Argument des Kosinus. Man leitet einfach ab:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da dies auch die Ableitung von $\arccos(x)$ ist, folgt $f(x) = \arccos(x) + C$. Einsetzen von $x = 0$ ergibt $C = 0$ und damit

$$D(x) = \cos(\arccos(x)) = x.$$

Licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License CC BY 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/), which permits use, sharing, adaptation, and redistribution with appropriate credit, a link to the license, and indication of changes.