

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen der Aufgaben 1174, 1175 und 1176 sind bis zum 10. Mai 2002 erbeten, für die Aufgabe 1177A ist kein Termin gesetzt. Anschrift:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

**Aufgabe 1174:** Wir betrachten Folgen von  $k$  ( $> 2$ ) aufeinanderfolgenden Zahlen:

$$n, n + 1, n + 2, \dots, n + k - 2, n + k - 1.$$

In den meisten derartigen Folgen gibt es mindestens eine Zahl, die zu allen anderen Zahlen der Folge teilerfremd ist. Man finde die kleinste Folge (d.h.  $n \cdot k$  minimal), in der es keine Zahl gibt, die zu allen anderen Zahlen der Folge teilerfremd ist.

Peter Hohler, Aarburg, CH

**Aufgabe 1175:** Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $-1 \neq x \in \mathbb{R}$  sei  $p_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + x^{2^i})$ . Man beweise oder widerlege die Behauptung: Zu jedem  $n$  gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten  $a_j$  ( $j = 2n, 2n + 1, \dots, 2^n$ ) und  $b_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ), so dass

$$1 + \frac{1}{p_n(x)} \cdot \sum_{j=2n}^{2^n} a_j \cdot (1 - x)^{j-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{1 + x^{2^k}}.$$

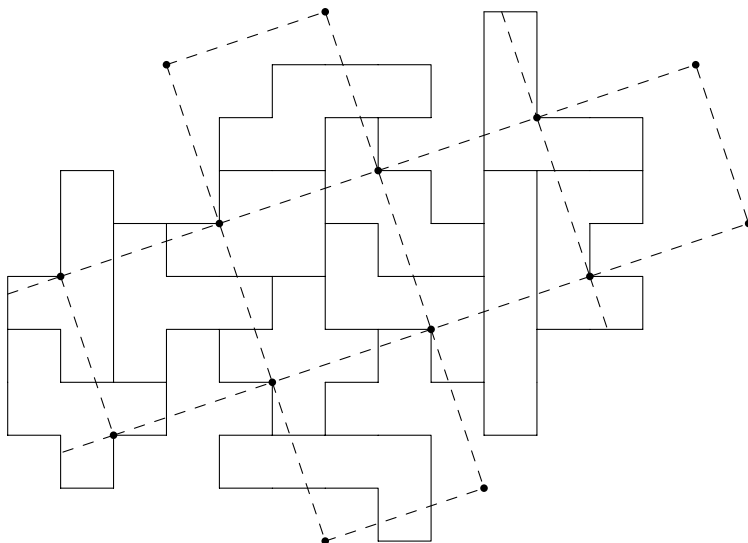
Friedhelm Götze, Jena, D

**Aufgabe 1176 (Die einfache dritte Aufgabe):** Welchen (spitzen) Zentriwinkel hat ein Kreissektor, wenn sich diesem drei kongruente Quadrate einbeschreiben lassen?

Fritz Siegerist, Meilen, CH

**Aufgabe 1177A:** Die 12 (modulo Drehungen und Spiegelungen) verschiedenen Pentominos erhält man aus je 5 identischen Elementar-Quadraten, die über mindestens eine Kante miteinander verbunden sind (s. auch S.W. Golomb, *Polyominos*, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 1994; S. 6,7). Ein Pentomino-Würfel (kurz P-Würfel) ist ein Würfel, der mit den 12 Pentominos bedeckt ist (s. S. 174). Wieviele durch Drehungen und Spiegelungen nicht ineinander überführbare P-Würfel gibt es?

Beispiel: Die Abbildung zeigt einen aufgeklappten P-Würfel.



C.J. Bouwkamp gibt in seinem Artikel "On Benjamin's pentomino cube" (EUT Report, 97-WSK-01, Eindhoven 1997, ii+21pp.; Math. Rev. 98m:00005) die Gesamtzahl der P-Würfel modulo Drehungen und Spiegelungen mit 26358584 an, die in 3 in Bouwkamp's Artikel angegebene Klassen aufgeteilt werden können (Klasse 1: 14755166, Klasse 2: 3249822, Klasse 3: 8353596).

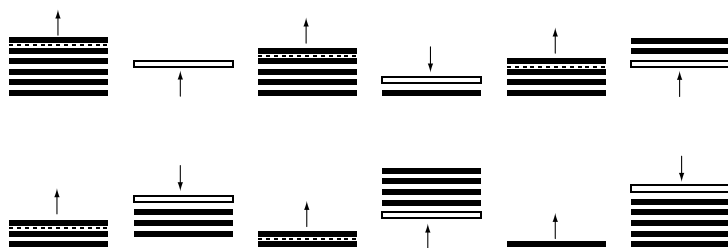
Ohne Bouwkamp's Artikel zu kennen, habe ich mit einem anderen Ansatz die Gesamtanzahl von 44893412 P-Würfeln erhalten (Klasse 1: 25094188, Klasse 2: 5090987, Klasse 3: 14708237).

Welche Anzahl ist richtig?

Wolfgang Müller, Bayreuth, D

### Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2000

**Aufgabe 1162.** Ein Kartenspiel mit  $2m$  Karten ( $m \geq 2$ ) wird auf folgende Art gemischt:



Dieser (in der Skizze für  $m = 3$  beschriebene) Mischprozess wird so lange wiederholt, bis die Karte, die am Anfang zuoberst war, wieder an diesem Platz liegt. Beweise, dass dann alle Karten an ihrem ursprünglichen Platz liegen.

F. J. González Vieli, Lausanne, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 3 Zuschriften eingetroffen: Jean-Jacques Loeffel (Bussigny, CH), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Überlegungen von *O.P. Lossers* und *Roland Wyss* stimmen weitgehend mit jenen des Autors überein und sind unten abgedruckt. J.J. Loeffel's Weg via das Studium der Zyklenstruktur ist viel aufwendiger, liefert aber auch ein Resultat für den Fall einer ungeraden Anzahl Karten im Stapel.

Numerieren wir die Karten im Ausgangsstapel von unten nach oben mit  $1, \dots, 2m$ , so kann der erste Mischvorgang durch die Permutation  $\sigma \in S_{2m}$  mit

$$\sigma(j) = \begin{cases} 2j & \text{falls } 0 < j \leq m \\ 4m + 1 - 2j & \text{falls } m < j \leq 2m \end{cases}$$

beschrieben werden. Diese Permutation lässt sich auch wie folgt charakterisieren:

$$\sigma(j) \in \{1, \dots, 2m\} \quad \text{und} \quad \sigma(j) \equiv \pm 2j \pmod{4m + 1}.$$

Nach  $\ell$  Mischungen liegt am Platz  $j$  (von unten gezählt) die Karte  $\sigma^\ell(j)$ , die durch

$$\sigma^\ell(j) \in \{1, \dots, 2m\} \quad \text{und} \quad \sigma^\ell(j) \equiv \pm 2^\ell j \pmod{4m + 1}$$

beschrieben wird. Insbesondere kehrt die Karte Nummer  $2m$ , die am Anfang zuoberst lag, zu ihrem ursprünglichen Platz zurück, sobald  $2m \equiv \pm 2^\ell \cdot 2m \pmod{4m + 1}$ . Weil  $2m$  invertierbar modulo  $4m + 1$  ist, ist das gleichbedeutend mit  $1 \equiv \pm 2^\ell \pmod{4m + 1}$ , woraus  $\sigma^\ell(j) \equiv \pm j \pmod{4m + 1}$  für alle  $j \in \{1, \dots, 2m\}$  folgt. Aber  $\sigma^\ell(j) \equiv -j \pmod{4m + 1}$  ist unmöglich, weil  $2 \leq \sigma^\ell(j) + j \leq 4m$ . Wir erhalten also für alle  $j \in \{1, \dots, 2m\}$ :  $\sigma^\ell(j) \equiv j \pmod{4m + 1}$ , was zu beweisen war.

**Aufgabe 1163.** a) Zwei auf einer Kreisscheibe zufällig verteilte Punkte werden mit dem Kreiszentrum verbunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das entstehende Dreieck spitzwinklig?

b) Zwei in einem Quadrat zufällig verteilte Punkte werden mit dem Quadratzentrum verbunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das entstehende Dreieck spitzwinklig?

Jon Florin, Chur, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 5 korrekte Lösungen oder Teillösungen eingetroffen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH).

Wir folgen den Überlegungen von *Walter Burgherr*: Aufgabe a): Die zufälligen Punkte  $X_1$  und  $X_2$  im Kreis mit Zentrum  $M$  und Radius 1 werden durch Polarkoordinaten  $r_i, \varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ) beschrieben. Man betrachte die folgenden Ereignisse:

A:  $X_1$  liegt im infinitesimalen Kreisring um  $M$  mit Radius  $r$  und Breite  $dr$ .

B: Das Dreieck  $MX_1X_2$  ist spitzwinklig.

Für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gilt  $P(A) = 2r \cdot dr$  und  $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$ . Die bedingte Wahrscheinlichkeit entspricht dem Flächenanteil eines Streifens mit Breite  $r$  im Kreis mit begrenzenden Parallelen normal zu  $MX_1$  durch  $X_1$  und  $M$  abzüglich des Thaleskreises über  $MX_1$ . Für diese Fläche erhält man nach kurzer Rechnung  $\arcsin(r_1) + r_1\sqrt{1-r_1^2} - \pi/4 \cdot r_1^2$ , und die bedingte Wahrscheinlichkeit beträgt somit

$$P(B|A) = \frac{1}{4\pi} \left( 4 \arcsin(r_1) + 4r_1\sqrt{1-r_1^2} - \pi \cdot r_1^2 \right).$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet sich nun als totale Wahrscheinlichkeit mittels des Integrals

$$P(B) = \int_0^1 \frac{1}{4\pi} \left( 4 \arcsin(r) + 4r\sqrt{1-r^2} - \pi \cdot r^2 \right) \cdot 2r \, dr,$$

welches den Wert  $\frac{1}{4}$  besitzt.

Aufgabe b): Die zufälligen Punkte  $X_1$  und  $X_2$  im Quadrat mit Mittelpunkt  $M(0,0)$  werden durch Koordinaten  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  mit  $-1 \leq x_i, y_i \leq 1$  beschrieben. Man betrachte die folgenden Ereignisse:

A:  $X_1 \in \{x, y \mid (a \leq x \leq a + dx) \wedge (b \leq y \leq b + dy)\}$

B:  $X_1 \in \{x, y \mid (x^2 + y^2 - x + y \leq 0) \wedge (y \geq 0)\}$

C:  $X_1 \in \{x, y \mid (x^2 + y^2 - x + y \geq 0) \wedge (x \geq y) \wedge (x \geq 0)\}$

D: Dreieck  $MX_1X_2$  ist spitzwinklig.

E: Der Winkel in  $M$  ist stumpf.

F: Der Winkel in  $X_1$  ist stumpf.

G: Der Winkel in  $X_2$  ist stumpf.

Der in B und C auftretende begrenzende Kreisbogen ist explizit gegeben durch

$$y^* = \frac{\sqrt{1+4x-4x^2}-1}{2}.$$

Für die Wahrscheinlichkeiten dieser unbedingten Ereignisse gilt:

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot dx \cdot dy, \quad P(E) = \frac{1}{2},$$

$$P(F) = P(G), \quad P(D) = 1 - P(E) - P(F) - P(G) = \frac{1}{2} - 2 \cdot P(F).$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie findet man  $P(F)$  als totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(F) = 8 \cdot (P(F \cap B) + P(F \cap C)) \quad (1)$$

Falls  $B \cup C$  gilt, ist  $F$  dann erfüllt, wenn  $X_2$  rechts von der Geraden  $x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2$  liegt. Gilt  $B$ , so schneidet diese Gerade vom Quadrat ein Trapez mit Flächeninhalt

$$F_B = 2 \cdot \frac{x_1 - x_1^2 - y_1^2}{x_1}$$

ab, gilt  $C$ , so wird ein Dreieck mit der Fläche

$$F_C = \frac{(x_1 + y_1 - x_1^2 - y_1^2)^2}{2x_1y_1}$$

abgeschnitten.

Für  $A \subset B$  ist also

$$P(F \cap A) = P(A) \cdot P(F|A) = \frac{dx \cdot dy}{4} \cdot \frac{x_1 - x_1^2 - y_1^2}{2x_1}$$

und

$$P(F \cap B) = \int_0^1 \left[ \int_0^{y^*} \frac{x - x^2 - y^2}{8x} dy \right] dx.$$

Analog erhält man für  $P(F \cap C)$  das Doppelintegral

$$P(F \cap C) = \int_0^1 \left[ \int_{y^*}^x \frac{(x + y - x^2 - y^2)^2}{32xy} dy \right] dx,$$

und gemäss (1) gilt also

$$P(F) = \int_0^1 \left[ \int_0^{y^*} \frac{x - x^2 - y^2}{x} dy + \int_{y^*}^x \frac{(x + y - x^2 - y^2)^2}{4xy} dy \right] dx.$$

Füttert man diese Integrale einem CAS-System, so findet man

$$P(F) = \frac{37}{576} + \frac{\pi}{48}$$

und schliesslich

$$P(D) = \frac{1}{2} - 2P(F) = \frac{107}{288} - \frac{\pi}{24} \approx 0.24063.$$

**Aufgabe 1164 (Die einfache dritte Aufgabe).** Einem gleichschenkligen Dreieck mit Basis  $b$ , Inkreisradius  $\varrho$  und Umkreisradius  $r$  werden drei weitere Kreise eingelagert: Zwei Kreise mit Radius  $t$  berühren je einen Schenkel, die Basis und den Inkreis; ein Kreis mit Radius  $u$  berührt die beiden Schenkel und den Inkreis.

Man bestimme das kleinste Dreieck, bei dem  $\varrho$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $t$  ist und bei dem  $b$ ,  $\varrho$ ,  $r$ ,  $t$  und  $u$  alle ganzzahlig sind.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

*Auswertung der eingesandten Lösungen.* Es sind 9 Zuschriften eingegangen: Francesco Cavalli (Verscio, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen der Lösung von *Francesco Cavalli*: Bezeichnen wir den halben Basiswinkel mit  $\alpha$  und den halben Winkel an der Spitze mit  $\beta$ , so ergibt sich nach elementarer Rechnung

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{b}{2} \cdot \tan(\alpha), & r &= \frac{b}{2 \cdot \sin(2\beta)}, \\ t &= \varrho \cdot \frac{1 - \sin(\alpha)}{1 + \sin(\alpha)}, & u &= \varrho \cdot \frac{1 - \sin(\beta)}{1 + \sin(\beta)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Es soll eine natürliche Zahl  $n$  geben mit  $\varrho = n \cdot t$ ; der Vergleich mit  $\varrho = \frac{1 + \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)} \cdot t$  liefert

$$n = \frac{1 + \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)},$$

woraus sich

$$\sin(\alpha) = \frac{n-1}{n+1}, \quad \cos(\alpha) = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}, \quad \tan(\alpha) = \frac{n-1}{2\sqrt{n}}$$

ergeben. Aus (1) folgt, dass  $\tan(\alpha)$  rational ist, also muss  $n$  eine Quadratzahl sein. Aus  $0 < \tan(\alpha) < 1$  folgt  $2 \leq n \leq 5$ . Also kommt nur  $n = 4$  in Frage, und das Dreieck ist somit bis auf Ähnlichkeit bestimmt.

Mit dem Wert  $n = 4$  erhält man nun

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{3}{5}, & \cos(\alpha) &= \frac{4}{5}, & \tan(\alpha) &= \frac{3}{4}, \\ \sin(\beta) &= \frac{7}{25}, & \cos(\beta) &= \frac{24}{25}, & \sin(2\beta) &= \frac{336}{625}. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Funktionswerte von  $\beta$  wurden die Beziehung  $\beta = \pi/2 - 2\alpha$  sowie die Doppelwinkelformeln benützt.

Es sei jetzt  $t = 1$ . Durch Einsetzen der gewonnenen Ergebnisse erhält man

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{1 + \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)} = 4, & b &= \frac{2\varrho}{\tan(\alpha)} = \frac{32}{3}, \\ r &= \frac{b}{2 \sin(2\beta)} = \frac{625}{63}, & u &= \varrho \cdot \frac{1 - \sin(\beta)}{1 + \sin(\beta)} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Will man (durch eine zentrische Streckung) die geforderte Ganzzahligkeit erreichen, so ist 252 der kleinstmögliche Streckungsfaktor. Er liefert ein Dreieck mit den Massen  $t = 252$ ,  $\varrho = 1008$ ,  $b = 2688$ ,  $u = 567$  und  $r = 2500$ .

Bemerkung der Redaktion: In diesem Dreieck haben auch alle Ankreise sowie der Feuerbachkreis ganzzahlige Radien.



To access this journal online:  
<http://www.birkhauser.ch>

---