

---

---

## Moufang-Ebenen. Ruth Moufang und ihr Beitrag zu den Grundlagen der Geometrie\*

---

---

Andrea Blunck

Andrea Blunck wurde 1963 in Bad Segeberg (Schleswig-Holstein) geboren. Ihr Mathematikstudium an der Universität Hamburg schloß sie 1988 mit einer Diplomarbeit über Moufang-Ebenen ab; 1990 folgte die Promotion, ebenfalls in Hamburg. Von 1989 bis 1998 war sie zuerst als wissenschaftliche Mitarbeiterin, später als wissenschaftliche Assistentin an der Technischen Universität Darmstadt tätig. Im Jahre 1997 habilitierte sie sich mit einer Arbeit aus dem Bereich der geometrischen Algebra über Ringen. Sie war damit die erste Frau, die sich überhaupt am Fachbereich Mathematik der TU Darmstadt habilitierte. Seit März 1999 arbeitet Andrea Blunck als Lise-Meitner-Forschungsstipendiatin des FWF (Austrian Science Fund) am Institut für Geometrie der Technischen Universität Wien.

Ruth Moufang (1905–1977) wurde 1957 zur ersten ordentlichen Professorin für Mathematik in Deutschland ernannt. Ihr Forschungsgebiet waren die Grundlagen der Geometrie. Insbesondere beschäftigte sie sich mit Schließungssätzen in projektiven Ebenen sowie mit den algebraischen Strukturen, die diesen Ebenen zugrunde liegen. Eine gewisse Klasse projektiver Ebenen trägt heute ihren Namen.

Der vorliegende Aufsatz soll dem Leser diese “Moufang-Ebenen” und auch Ruth Moufang selbst etwas näher bringen. Er gliedert sich in drei Teile, die sich an den verschiedenen Definitionsmöglichkeiten für Moufang-Ebenen orientieren:

Der folgende Beitrag von A. Blunck knüpft an ein bekanntes Ergebnis der Elementargeometrie an: den Satz von Desargues. Zu Ehren von Ruth Moufang wird eine projektive Ebene Moufang-Ebene genannt, wenn in ihr der Satz von Desargues gilt. Es werden weiter gleichwertige Charakterisierungen von Moufang-Ebenen diskutiert, und wir lernen den Zusammenhang zwischen Moufang-Ebenen und gewissen algebraischen Strukturen, den sogenannten Alternativkörpern – einer Verallgemeinerung der Schiefkörper – kennen. Nebenbei erfahren wir Wissenswertes zum Leben von Ruth Moufang, z.B. dass sie im Jahr 1957 zur ersten ordentlichen Professorin für Mathematik in Deutschland ernannt wurde. *jk*

---

\*) Dieser Aufsatz ist eine Ausarbeitung der am 18. Juli 1997 an der TH Darmstadt gehaltenen Antrittsvorlesung der Autorin. Ich danke Martin Bulach für die Erstellung der Figuren.

In Abschnitt 1 werden einige Schließungssätze vorgestellt. Einer von ihnen charakterisiert die Moufang-Ebenen, ein anderer – im wesentlichen äquivalenter – wurde von Ruth Moufang selbst verwendet. In Abschnitt 2 kommt der Zusammenhang zwischen Geometrie und Algebra zur Sprache. Wir geben einen Koordinatisierungssatz für Moufang-Ebenen an, den Ruth Moufang in den dreißiger Jahren bewies. In diesem Zusammenhang gehen wir außerdem auf den Lebenslauf von Ruth Moufang ein. Der letzte Abschnitt erläutert dann eine heute gebräuchliche und verallgemeinerbare Definition von Moufang-Ebenen mittels sogenannter Zentralkollineationen.

## 1 Schließungssätze

Wir wollen Moufang-Ebenen mit Hilfe eines Schließungssatzes definieren. Um überhaupt Schließungssätze formulieren zu können, benötigen wir zunächst den Begriff der projektiven Ebene.

Ein Tripel  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$  heißt **projektive Ebene**, wenn  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{G}$  nichtleere Mengen sind (die Mengen der **Punkte** bzw. **Geraden** von  $\mathbb{P}$ ) und  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{G}$  eine Relation (die **Inzidenzrelation**), so daß folgende Axiome erfüllt sind:

- (P1) Zu je zwei (verschiedenen) Punkten  $P, Q \in \mathcal{P}$  gibt es genau eine **Verbindungsgerade**, d.h. eine Gerade  $g =: PQ \in \mathcal{G}$  mit  $P \mathcal{I} g, Q \mathcal{I} g$ .
- (P2) Zu je zwei (verschiedenen) Geraden  $g, h \in \mathcal{G}$  gibt es genau einen **Schnittpunkt**, d.h. einen Punkt  $P =: g \cap h \in \mathcal{P}$  mit  $P \mathcal{I} g, P \mathcal{I} h$ .
- (P3) Es existiert ein **Viereck**, d.h. vier Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{P}$ , so daß keine drei von ihnen **kollinear** sind (also gemeinsam auf einer Geraden liegen).

Wir brauchen im folgenden ab und zu eine Zusatzbedingung, die mit den Vierecken in  $\mathbb{P}$  zu tun hat: Zu einem Viereck wie in Axiom (P3) gehören nicht nur die vier Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , sondern auch ihre sechs Verbindungsgeraden sowie die drei Schnittpunkte einander “gegenüberliegender” Vierecksseiten. Diese Punkte  $D_1, D_2, D_3$  heißen die **Diagonalepunkte** des Vierecks (siehe Figur 1).

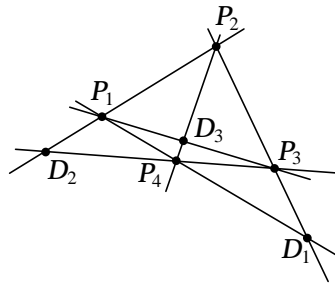


Fig. 1

Es kann nun vorkommen, daß die drei Punkte  $D_1, D_2, D_3$  kollinear sind. Dann sprechen wir von einer **Fano-Konfiguration** (nach dem italienischen Mathematiker Gino Fano, 1871–1952).

Wir wollen in einigen Sätzen das Auftreten solcher Fano-Konfigurationen ausschließen, also nur projektive Ebenen betrachten, in denen das sogenannte **Anti-Fano-Axiom** (AF) erfüllt ist:

(AF) Die Diagonalepunkte jedes Vierecks in  $\mathbb{P}$  sind **nicht** kollinear.

Man spricht dann auch von **Anti-Fano-Ebenen**. (Achtung: viele Autoren vertauschen die Begriffe Fano- und Anti-Fano-Ebene, nennen also die hier betrachteten Ebenen Fano-Ebenen, z.B. Lenz in [6].)

Moufang-Ebenen sind nun projektive Ebenen, in denen ein Schließungssatz erfüllt ist, nämlich der "kleine Satz von Desargues". Zuerst stellen wir den (wahrscheinlich bekannteren) "großen Desargues" vor.

In der projektiven Ebene  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$  gilt der **Satz von Desargues**, wenn für jedes Paar  $(Z, a) \in \mathcal{P} \times \mathcal{G}$  folgende Aussage erfüllt ist (siehe Figur 2):

- (D) Seien  $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$  drei Geraden durch  $Z$  und  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{P}$  sechs Punkte mit  $A_i \mathcal{I} g_i, B_i \mathcal{I} g_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), so daß für die Schnittpunkte  $P := A_1 A_2 \cap B_1 B_2$  und  $Q := A_1 A_3 \cap B_1 B_3$  die Bedingung  $P \mathcal{I} a, Q \mathcal{I} a$  gilt. Dann gilt auch  $R := A_2 A_3 \cap B_2 B_3 \mathcal{I} a$ .

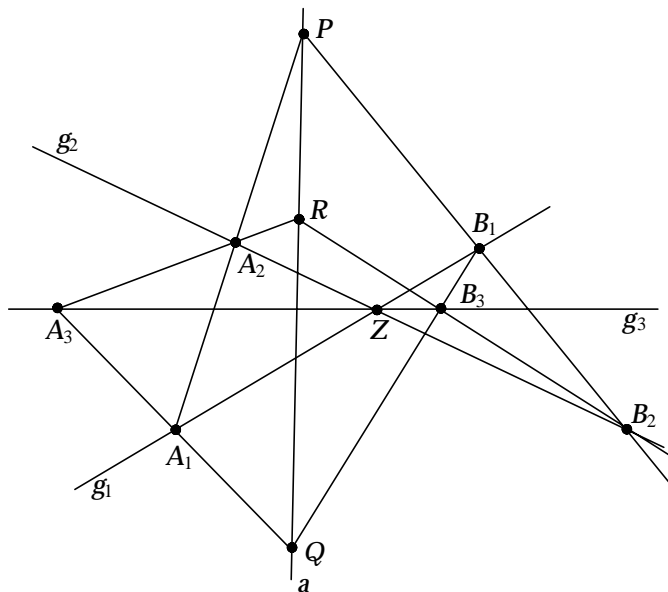


Fig. 2

Die Gerade  $a$  heißt die **Achse**, der Punkt  $Z$  das **Zentrum** der obigen **Desargues-Konfiguration**.

Man sagt, die Konfiguration **schließt sich** im Punkte  $R$ . Daher kommt die Bezeichnung "Schließungssatz" für diese Art von Aussagen.

Die **Desarguesschen** projektiven Ebenen (also die, in denen der Satz von Desargues gilt) lassen sich besonders schön auch algebraisch beschreiben, nämlich als Koordinatenebenen über Schiefkörpern (also nicht notwendigerweise kommutativen Körpern; siehe z.B. [17], Kapitel 7/8). Eine Desarguessche Ebene ist übrigens genau dann Anti-Fano-Ebene, wenn ihr Koordinatenschiefkörper eine von 2 verschiedene Charakteristik hat.

Jetzt kommen wir zum “kleinen Desargues”.

In  $\mathbb{P}$  gilt der **kleine Satz von Desargues**, wenn Bedingung (D) für alle  $Z \in \mathcal{P}$ ,  $a \in \mathcal{G}$  mit  $Z \mathcal{I} a$  gilt (siehe Figur 3):

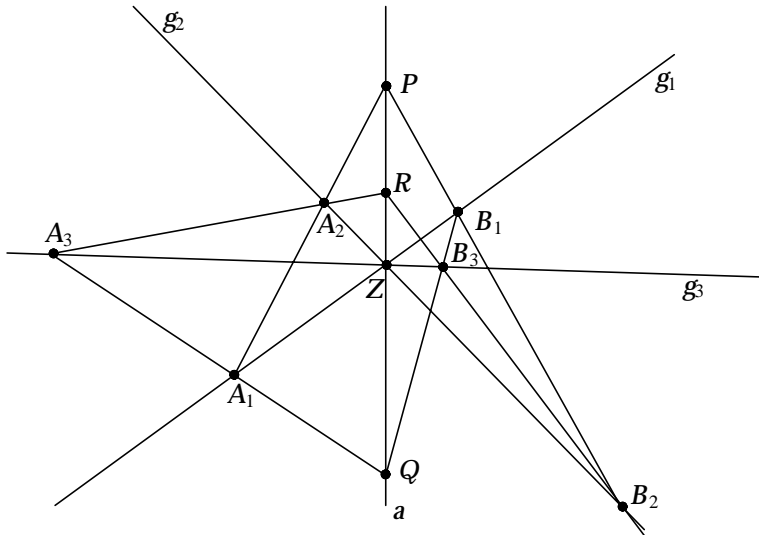


Fig. 3

Eine projektive Ebene  $\mathbb{P}$  heißt **Moufang-Ebene**, wenn in  $\mathbb{P}$  der kleine Satz von Desargues gilt.

Damit ist jede Desarguessche Ebene schon einmal eine Moufang-Ebene. Es gibt aber noch andere, wie wir später sehen werden.

Wir werden drei weitere Definitionsmöglichkeiten für Moufang-Ebenen kennenlernen, die zumindest im Anti-Fano-Fall alle zur obigen äquivalent sind (die obige Definition findet man z.B. auch bei Pickert [10]).

Zum besseren Verständnis des kleinen Desargues geben wir jetzt noch eine “affine Version” an. Dazu legen wir die Achse  $a$  und das Zentrum  $Z$  der Konfiguration ins Unendliche.

Sei also  $a$  die Ferngerade und  $Z$  ein Fernpunkt ( $Z$  soll ja auf  $a$  liegen). Das bedeutet, daß je zwei Geraden, die sich auf  $a$  schneiden, in der zugehörigen affinen Ebene parallel sind, was ja in der “projektiven Version” nicht vorkommt. Insbesondere bilden die Geraden durch  $Z$  eine Parallelschar. (Zum Zusammenhang zwischen projektiven und affinen Ebenen siehe z.B. [7].)

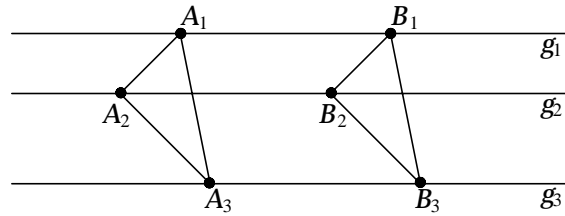


Fig. 4

Der kleine Desargues lautet dann (siehe Figur 4):

Ist  $A_1A_2$  parallel zu  $B_1B_2$  und  $A_1A_3$  parallel zu  $B_1B_3$ , so sind auch  $A_2A_3$  und  $B_2B_3$  parallel.

Der nächste Schließungssatz ist nun derjenige, mit dem Ruth Moufang selbst hauptsächlich gearbeitet hat, der sogenannte ‘‘Satz vom vollständigen Vierseit’’.

In der projektiven Ebene  $\mathbb{P}$  gilt der **Satz vom vollständigen Vierseit**, wenn zu je drei gegebenen kollinearen Punkten  $A, B, C$  der unten konstruierte Punkt  $D$  unabhängig ist von der Wahl des Vierecks  $P, Q, R, S$  (siehe Figur 5):

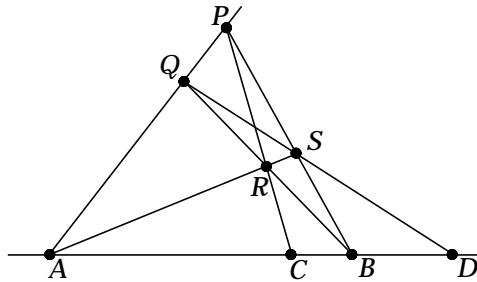


Fig. 5

Wähle  $P \notin g := AB$  und  $Q \notin AP$ ,  $A \neq Q \neq P$ . Setze  $R := CP \cap BQ$ ,  $S := AR \cap BP$ . Dann sei  $D := QS \cap g$ .

Der Punkt  $D$  heißt **vierter harmonischer Punkt** zu  $A, B, C$ .

Den Satz vom vollständigen Vierseit kann man als Schließungssatz interpretieren, denn seine Aussage besagt, daß für ein beliebiges anderes Viereck  $P', Q', R', S'$  mit  $P' \notin g$ ,  $Q' \notin AP'$ ,  $A \neq Q' \neq P'$ ,  $R' = CP' \cap BQ'$ ,  $S' = AR' \cap BP'$  sich die Konfiguration im Punkte  $D$  schließt (siehe Figur 6):

Die Diagonalepunkte des Vierecks  $P, Q, R, S$  sind die Punkte  $A, B, E := QS \cap PR$ . Sie sind offenbar genau dann kollinear, wenn  $E = C = D$  ist. Ist also  $\mathbb{P}$  eine Anti-Fano-Ebene, so tritt stets der Fall  $D \neq C$  ein.

Ruth Moufang arbeitete im wesentlichen mit einem Spezialfall dieses Satzes, und zwar mit dem Fall, daß die Punkte  $P$  und  $P'$  zusammenfallen. Den entstehenden Schließungssatz bezeichnete sie mit **(D9)**. Wir haben dann die Konfiguration von Figur 7.

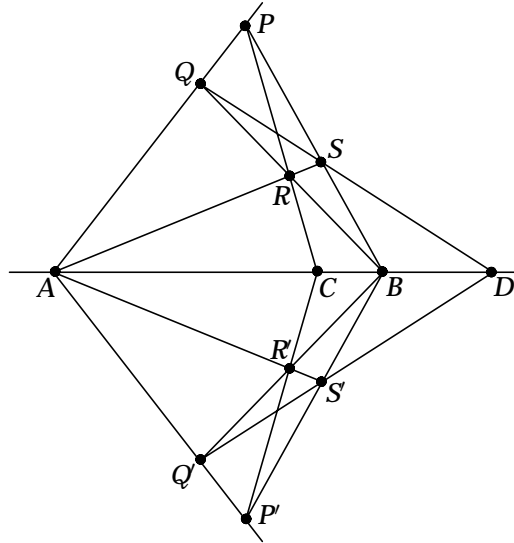


Fig. 6

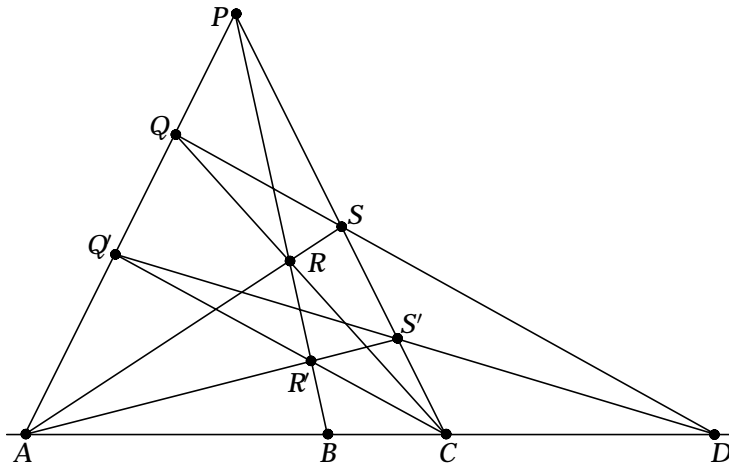


Fig. 7

Der Satz (D9) besagt also, daß sich die obige Figur im Punkt  $D$  schließt.

Dies kann man als Desargues-Konfiguration interpretieren, mit der Achse  $PC$ , dem Zentrum  $D$  sowie den Dreiecken  $(Q, Q', B)$  und  $(S, S', A)$ . Es handelt sich um eine spezielle Version (eine "Ausartung") des Desargues, denn je ein Dreieckspunkt liegt auf einer Seite des anderen Dreiecks.

Ruth Moufang bewies in [8], daß für Anti-Fano-Ebenen die drei letztgenannten Schließungssätze (also der kleine Desargues, der Satz vom vollständigen Vierseit und der Satz (D9)) gleichwertig sind. Die Anti-Fano-Bedingung kommt bei ihr nur implizit vor, sie

setzt nämlich voraus, daß jeder vierte harmonische Punkt eines kollinearen Punktetripels  $(A, B, C)$  von  $C$  verschieden ist.

**Satz 1** Sei  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$  eine Anti-Fano-Ebene. Dann sind äquivalent:

- (i)  $\mathbb{P}$  ist Moufang-Ebene.
- (ii) In  $\mathbb{P}$  gilt der Satz vom vollständigen Vierseit.
- (iii) In  $\mathbb{P}$  gilt der spezielle Satz vom vollständigen Vierseit (D9).

Im allgemeinen Fall (also  $\mathbb{P}$  nicht notwendig Anti-Fano-Ebene) gilt immerhin noch die Implikation (i)  $\Rightarrow$  (ii) (und natürlich (ii)  $\Rightarrow$  (iii)), denn eine Moufang-Ebene, die keine Anti-Fano-Ebene ist, muß schon Fano-Ebene sein, d.h. jedes Viereck hat kollineare Diagonalepunkte (siehe [6], I.5.6). Dann ist aber der Punkt  $D := C$  stets der eindeutig bestimmte vierte harmonische Punkt zu dem kollinearen Punktetripel  $(A, B, C)$ .

Heute beweist man Satz 1 meist nicht direkt, sondern geht den Umweg über die anderen Charakterisierungen von Moufang-Ebenen (siehe Abschnitte 2 und 3).

## 2 Ruth Moufang und ihr Koordinatisierungssatz

Ruth Moufang bewies nicht nur die Äquivalenz des kleinen Desargues mit dem Satz vom vollständigen Vierseit in Anti-Fano-Ebenen, sie koordinatisierte auch die Ebenen, in denen einer dieser (und damit beide) Schließungssätze gelten.

Bevor wir aber zu diesem wichtigen Koordinatisierungssatz kommen, soll jetzt erst einmal einiges aus dem Leben von Ruth Moufang berichtet werden. Man vergleiche hierzu auch die Artikel [11], [12] von I. Pieper-Seier sowie [16] von B. Srinivasan, an denen wir uns orientiert haben.

**Ruth Moufang** wurde am 10. Januar 1905 in Darmstadt geboren. Sie hatte noch eine Schwester namens Erika. Beide Schwestern kamen schon in der Schule (in Bad Kreuznach) intensiv mit der Geometrie in Berührung. Ihr Mathematiklehrer war nämlich der Geometer Friedrich Wilhelm Schwan (bekannt durch die nach ihm benannte Koordinatisierungsmethode [14], siehe auch [5]). Schwan schrieb in den zwanziger Jahren ein Lehrbuch zur Geometrie (Elementare Geometrie, [15]), für das Ruth und Erika Moufang die Zeichnungen anfertigten. In Figur 8 sehen wir eine besonders schöne Zeichnung (Figur 300 aus [15]), sie leitet das Kapitel über Parallelprojektion ein.

Da Erika Moufang später Künstlerin wurde, liegt die Vermutung nahe, daß diese Zeichnung aus ihrer Feder stammt.

Ruth Moufang studierte dann von 1925 bis 1930 an der Universität Frankfurt am Main Mathematik. Sie promovierte 1930 bei Max Dehn mit einer Arbeit "Zur Struktur der projektiven Geometrie der Ebene".

Es schlossen sich Forschungsaufenthalte zuerst in Rom (1931/32) und dann in Königsberg (1932/33) bei Kurt Reidemeister an. Danach kehrte sie nach Frankfurt zurück.

In den Jahren 1930 bis 1937 schrieb Ruth Moufang acht Arbeiten zu den Grundlagen der Geometrie. Uns interessiert hier besonders folgender Satz aus [9]:



Fig. 8

**Satz 2** (Moufang 1933). Sei  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$  eine Anti-Fano-Ebene. Dann sind äquivalent:

- (i) In  $\mathbb{P}$  gilt der Satz vom vollständigen Vierseit.
- (ii)  $\mathbb{P}$  läßt sich durch einen Alternativkörper der Charakteristik  $\neq 2$  koordinatisieren.

Hierbei bedeutet “koordinatisieren”, daß die Punkte und Geraden von  $\mathbb{P}$  mit Koordinaten (in unserem Fall aus einem Alternativkörper) versehen werden, und daß sich die Inzidenz algebraisch beschreiben läßt – mit Hilfe von “Geradengleichungen”, ähnlich wie man sie für die reelle Ebene kennt.

Übrigens war Ruth Moufang die erste, die überhaupt nicht-Desarguessche Ebenen koordinatisiert hat. Sie lehnte sich dabei an Hilberts erstmals im Jahre 1899 veröffentlichte “Streckenrechnung” für Desarguessche Ebenen an (siehe [3]).

Der Begriff des Alternativkörpers war erst wenige Jahre zuvor durch Max Zorn geprägt worden (vgl. hierzu [5]). Im Unterschied zum Schiefkörper hat man hier nur ein abgeschwächtes Assoziativgesetz:

Die algebraische Struktur  $(K, +, \cdot)$  heißt **Alternativkörper**, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (A1)  $(K, +)$  ist abelsche Gruppe mit Neutralelement 0.
- (A2) Für alle  $a, b, c \in K$  gelten die Distributivgesetze  $a(b+c) = ab+ac$  und  $(a+b)c = ac+bc$ .
- (A3)  $(K, \cdot)$  besitzt Neutralelement  $1 \neq 0$ .
- (A4) Für alle  $a \in K \setminus \{0\}$  existiert ein  $a^{-1} \in K \setminus \{0\}$  mit  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ , so daß für jedes  $b \in K$  die Kürzungsregeln  $a^{-1}(ab) = b$  und  $(ba)a^{-1} = b$  gelten.

Die Charakteristik eines Alternativkörpers wird genauso definiert wie für Körper üblich.



Natürlich ist jeder Schiefkörper ein Alternativkörper. Der bekannteste echte (also nicht assoziative) Alternativkörper ist der Alternativkörper  $\mathbb{O}$  der **Cayleyschen Oktaven**, welcher aus Hamiltons Quaternionenschiefkörper  $\mathbb{H}$  mit demselben Verdopplungsverfahren entsteht wie  $\mathbb{H}$  aus dem Körper der komplexen Zahlen (siehe z.B. [2]). Man kann sogar zeigen, daß jeder echte Alternativkörper eine “verallgemeinerte Oktavenalgebra” ist (Satz von Bruck und Kleinfeld, hierzu vergleiche man [5]; ein Beweis findet sich in [10]).

Wie schon bei Satz 1 benutzt Ruth Moufang das Anti-Fano-Axiom auch bei Satz 2 nur implizit. Es ist leicht einzusehen, daß ihr Koordinatenalternativkörper eine von 2 verschiedene Charakteristik haben muß. Hat nämlich der Alternativkörper die Charakteristik 2, so besitzt jedes Viereck kollineare Diagonalepunkte.

Satz 2 sagt in Kombination mit Satz 1, daß die Anti-Fano-Moufang-Ebenen genau die Ebenen über Alternativkörpern der Charakteristik  $\neq 2$  sind. Man kann zeigen, daß entsprechendes auch ohne die Anti-Fano-Bedingung gilt (siehe [17], 14.2.5):

**Satz 3** *Sei  $\mathbb{P}$  eine projektive Ebene. Dann sind äquivalent:*

- (i)  $\mathbb{P}$  ist Moufang-Ebene.
- (ii)  $\mathbb{P}$  läßt sich durch einen Alternativkörper koordinatisieren.

Die projektiven Ebenen über echten Alternativkörpern sind Moufang-Ebenen, in denen der große Satz von Desargues nicht gilt. Die Ebene über den Oktaven  $\mathbb{O}$  ist eine solche. Satz 3 liefert eine Möglichkeit, Moufang-Ebenen nicht durch die Gültigkeit von bestimmten Schließungssätzen zu definieren, sondern durch den Koordinatenbereich (so macht es z.B. Stevenson in [17]). Meistens wird dies aber nicht als Definition gewählt, sondern als Charakterisierungssatz. Man erkennt hier das Zusammenspiel von Geometrie und Algebra, rein geometrische Sachverhalte lassen sich in algebraische Aussagen umformulieren und umgekehrt.

Dies war eines der wesentlichen Anliegen von Ruth Moufang in ihren in den dreißiger Jahren geschriebenen Arbeiten über projektive Ebenen.

Sie untersuchte einerseits verschiedene Schließungssätze, ihre Ausartungen und ihre Abhängigkeiten untereinander, andererseits aber auch ihre Auswirkungen auf den Koordinatenbereich entweder der ganzen zugrundeliegenden Ebene oder einer von wenigen Punkten erzeugten Unterebene.

Allerdings sah sie sich bald gezwungen, ihre Forschungen in diesem Bereich aufzugeben. Zunächst beendete sie ihre Habilitationsschrift über geordnete Schiefkörper. Diese treten in der Geometrie in natürlicher Weise als Koordinatenbereiche angeordneter Desarguesscher Ebenen auf.

Ruth Moufang wurde 1936 an der Universität Frankfurt am Main habilitiert, dann aber nicht zur öffentlichen Lehrprobe zugelassen, welche im Dritten Reich notwendige Bedingung für die Erteilung der Lehrbefugnis und die Ernennung zum Dozenten war. Ruth Moufang wurde nicht zugelassen, da es nach Ansicht der Nationalsozialisten dem “Führerprinzip” widersprach, daß eine Frau die vorwiegend männlichen Studenten unterrichten und “führen” sollte. Damit nahm man ihr jede Chance, weiter in der Lehre tätig

zu sein. Forschen durfte sie allerdings schon noch, und so arbeitete sie in den Jahren 1938 bis 1946 im Krupp-Forschungsinstitut in Essen. In dieser Zeit veröffentlichte sie vier Arbeiten aus dem Bereich der Mechanik.

Nach Kriegsende kehrte Ruth Moufang an die Universität Frankfurt zurück. Sie erhielt 1946 endlich die Lehrbefugnis, wurde 1947 zunächst außerplanmäßige Professorin und erhielt dann 1951 ein Extraordinariat. Im Jahre 1957 wurde Ruth Moufang ordentliche Professorin in Frankfurt. Damit war sie die erste Frau in Deutschland überhaupt, die ordentliche Professorin für Mathematik wurde.

Ruth Moufang war jetzt in erster Linie in der Lehre tätig. Sie hatte 16 Doktoranden, die zum Teil im Bereich der Geometrie, zum Teil aber auch in ganz anderen Gebieten arbeiteten. Sie selbst veröffentlichte aber – bis auf einen Nachruf auf ihren Lehrer Max Dehn – nichts mehr. Im Jahr 1970 ging sie in den Ruhestand, am 26. November 1977 starb Ruth Moufang in Frankfurt.

### 3 Zentralkollineationen

In diesem Abschnitt kommen wir zur heute gebräuchlichsten Definitionsmöglichkeit für Moufang-Ebenen. Hierbei werden Eigenschaften der Automorphismengruppe herangezogen. Diese lassen sich auch für andere Geometrien formulieren, so daß man heute z.B. auch von “Moufang-Gebäuden” spricht (siehe unten).

In den vierziger und fünfziger Jahren beschäftigten sich viele Geometer mit projektiven Ebenen (zur Geschichte siehe [5]). In dieser Zeit setzte sich auch der Begriff “Moufang-Ebene” durch, den z.B. Pickert in seinem 1955 erschienenen Lehrbuch [10] schon verwendet.

Im Jahr 1943 führte M. Hall den Begriff des Ternärkörpers ein, dies ist der Koordinatenbereich einer allgemeinen projektiven Ebene. Der Ternärkörper einer Moufang-Ebene ist der (in Abschnitt 2 erwähnte) zugehörige Koordinatenalternativkörper. Je “schöner” die projektive Ebene, desto mehr algebraische Gesetze erfüllt der Ternärkörper. Entscheidend sind hierbei immer gewisse Transitivitätseigenschaften der Automorphismengruppe der projektiven Ebene. Diese Untersuchungen führten auch zur sogenannten Lenz-Barlotti-Klassifikation der projektiven Ebenen (siehe [5]). Der wichtigste Begriff ist hierbei derjenige der Zentralkollineation.

Eine **Kollineation** einer projektiven Ebene  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$  ist einfach ein Automorphismus dieser Struktur, also eine Permutation  $\gamma$  von  $\mathcal{P} \cup \mathcal{G}$ , welche Punkte auf Punkte, Geraden auf Geraden abbildet und dabei die Inzidenz überträgt, d.h. es gilt  $P\mathcal{I}g$  genau dann, wenn  $P^\gamma\mathcal{I}g^\gamma$  ist (wir verwenden hier – wie in der Geometrie üblich – die Exponentialschreibweise für Abbildungen).

Sei  $\gamma$  eine Kollineation von  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ . Eine Gerade  $a \in \mathcal{G}$  heißt **Achse** von  $\gamma$ , wenn jeder Punkt  $P$  auf  $a$  Fixpunkt von  $\gamma$  ist (wenn also  $P^\gamma = P$  gilt). Ein Punkt  $Z \in \mathcal{P}$  heißt **Zentrum** von  $\gamma$ , wenn jede Gerade  $g$  durch  $Z$  Fixgerade ist (wenn also  $g^\gamma = g$  gilt).

Man kann zeigen, daß die Kollineation  $\gamma$  genau dann ein Zentrum besitzt, wenn sie eine Achse hat (siehe [4]), und daß  $\gamma$  höchstens ein Zentrum bzw. eine Achse haben kann (außer im trivialen Fall  $\gamma = id$ ).

Die Kollineation  $\gamma$  heißt **Zentralkollineation**, wenn  $\gamma$  ein Zentrum  $Z$  und damit auch eine Achse  $a$  hat. In diesem Fall nennen wir  $\gamma$  auch  **$(Z, a)$ -Kollineation**.

Liegt das Zentrum  $Z$  auf der Achse  $a$ , so wird die  $(Z, a)$ -Kollineation  $\gamma$  als **Elation** bezeichnet, andernfalls als **Homologie**.

Eine Elation  $\tau$  ist aus affiner Sicht eine **Translation** (also eine Parallelverschiebung). Wählt man nämlich die Achse  $a$  als Ferngerade, so geht jede Gerade in eine Parallele über, und eine Parallelschar (die durchs Zentrum  $Z$ ) bleibt als Ganzes fest.

Eine Homologie kann man entsprechend als zentrische Streckung deuten, wenn man wieder die Achse als Ferngerade wählt.

Gibt man sich in einer projektiven Ebene  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$  ein beliebiges Punkt-Geraden-Paar  $(Z, a)$  vor, so existiert höchstens dann eine  $(Z, a)$ -Kollineation  $\gamma$ , die einen Punkt  $P$  auf einen Punkt  $Q$  abbildet, wenn  $P, Q, Z$  kollinear sind. In diesem Fall ist  $\gamma$  durch die Bedingung  $P^\gamma = Q$  eindeutig bestimmt, wie man in der Figur 9 ablesen kann.

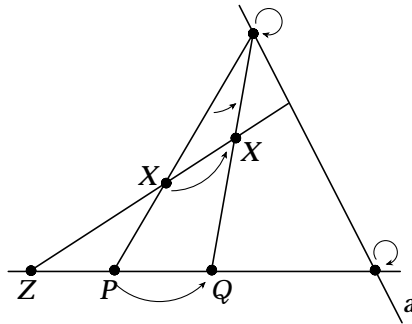


Fig. 9

(Hier haben wir stillschweigend angenommen, daß  $P$  und  $Q$  von  $Z$  verschieden sind und nicht auf  $a$  liegen; sonst müßte natürlich  $P = Q$  sein, und jede  $(Z, a)$ -Kollineation würde  $P$  in  $Q$  überführen.)

Die Konstruktion von  $\gamma$  wie in der Skizze liefert aber gar nicht immer eine (wohldefinierte) Kollineation; das hängt von der zugrundeliegenden projektiven Ebene ab. Gibt es zu jedem Paar  $(P, Q)$  wie in der Skizze eine  $(Z, a)$ -Kollineation  $\gamma$  mit  $P^\gamma = Q$ , so heißt die Ebene  $(Z, a)$ -**transitiv** (die Gruppe aller  $(Z, a)$ -Kollineationen operiert dann so transitiv wie nur möglich). Je mehr Paare  $(Z, a)$  es gibt, für welche die Ebene  $(Z, a)$ -transitiv ist, desto "homogener", also in gewissem Sinne "schöner", ist die Ebene. Dies ist die Grundlage der oben erwähnten Lenz-Barlotti-Klassifikation projektiver Ebenen.

Unser Ziel ist eine Charakterisierung von Moufang-Ebenen mit Hilfe des Begriffs der  $(Z, a)$ -Transitivität. Dazu benutzen wir den folgenden Satz von Baer. Er stellt einen Zusammenhang her zwischen  $(Z, a)$ -Transitivität und dem Satz von Desargues (siehe [4], Thm. 4.29, oder [1]):

**Satz 4** (Baer 1942) Sei  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$  eine projektive Ebene und sei  $(Z, a) \in \mathcal{P} \times \mathcal{G}$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $\mathbb{P}$  ist  $(Z, a)$ -transitiv.
- (ii) In  $\mathbb{P}$  gilt der  $(Z, a)$ -Desargues (d.h. Axiom (D) mit festem  $(Z, a)$ ).

Aus diesem Satz folgt sofort eine neue Charakterisierung der Moufang-Ebenen, denn in Moufang-Ebenen gilt ja der  $(Z, a)$ -Desargues für alle  $(Z, a)$  mit  $Z\mathcal{F}a$ .

**Satz 5** Sei  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$  eine projektive Ebene. Dann sind äquivalent:

- (i)  $\mathbb{P}$  ist Moufang-Ebene.
- (ii)  $\mathbb{P}$  ist  $(Z, a)$ -transitiv für alle  $(Z, a) \in \mathcal{P} \times \mathcal{G}$  mit  $Z\mathcal{F}a$ , d.h. in  $\mathbb{P}$  existieren alle nur denkbaren Elationen.

Diese Beschreibung der Moufang-Ebenen benutzt Eigenschaften der Automorphismen-Gruppe. Sie wird heute meist als Definition für Moufang-Ebenen genommen (z.B. in [6], [7]). Nach den Sätzen 5 und 2 sind der kleine Desargues, die Existenz sämtlicher Elationen und die Koordinatisierbarkeit durch einen Alternativkörper gleichbedeutend. Der Satz vom vollständigen Vierseit folgt aus jeder dieser Bedingungen (vgl. die Bemerkung im Anschluß an Satz 1) und ist im Anti-Fano-Fall sogar äquivalent zu ihnen.

Satz 5 ist relativ leicht einsichtig, wenn man sich wieder ein affines Bild macht: Wählt man  $a$  als die Ferngerade und  $Z$  als einen Fernpunkt, so ist zu zeigen, daß der kleine affine Desargues mit Trägergeraden  $g_1, g_2, g_3$  durch  $Z$  äquivalent ist zur Existenz aller Translationen in Richtung  $Z$  (siehe Figur 10).

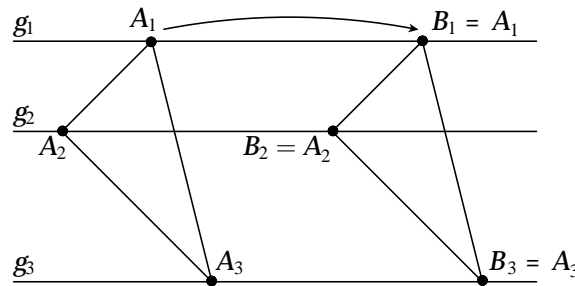


Fig. 10

Existiert eine Translation  $\tau$  mit  $A_1^\tau = B_1$ , so gilt im Fall  $A_1A_2 \parallel B_1B_2$  und  $A_1A_3 \parallel B_1B_3$  auch  $A_2^\tau = B_2$  und  $A_3^\tau = B_3$ . Demnach muß  $A_2A_3$  parallel zu  $B_2B_3 = (A_2A_3)^\tau$  sein, denn Translationen bilden jede Gerade auf eine Parallele ab.

Die Umkehrung ist etwas schwieriger. Mit Hilfe des kleinen Desargues gelingt es zu zeigen, daß die in Figur 11 angedeutete Zuordnung eine Translation  $\tau$  ist mit  $P^\tau = Q$ . Insbesondere ist der Bildpunkt  $X^\tau$  eines Punktes  $X$  auf der Geraden  $PQ$  unabhängig von der Wahl des Hilfspunktes  $A$  außerhalb von  $PQ$ .

Ein Vorteil der Definition von Moufang-Ebenen durch die Existenz von Elationen ist die Tatsache, daß sie sich relativ leicht auf andere geometrische Strukturen verallgemeinern läßt. Auch in ganz allgemeinen Geometrien – wie den von Jacques Tits eingeführten “Gebäuden” – lassen sich “Elationen” definieren, und zwar als Automorphismen, die gewisse Objekte der Geometrie festlassen (wie in der projektiven Ebene die Punkte auf  $a$  und die Geraden durch  $Z$ ). Operieren nun die Gruppen dieser Elationen so transitiv wie nur möglich, so spricht man von einem “Moufang-Gebäude” (siehe z.B. [13], S. 66).

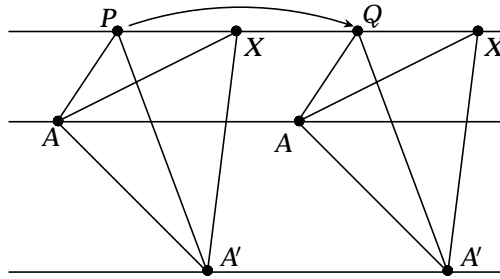


Fig. 11

Moufang-Gebäude allgemein oder auch gewisse Klassen von Moufang-Gebäuden wie z.B. “Moufang-Polygone” sind heute ein aktueller Forschungsgegenstand in der Geometrie. Dagegen dürfen Moufang-Ebenen schon längst als etwas “Klassisches” gelten.

Ich hoffe, dem Leser durch den vorliegenden Aufsatz einen kleinen Einblick in dieses heute klassische Teilgebiet der Geometrie gegeben zu haben, dessen Entstehung ganz wesentlich auf den Arbeiten einer Frau beruht.

### Literatur

- [1] R. Baer: Homogeneity of projective planes, *Amer. J. Math.* **64** (1942), 137–152.
- [2] H.-D. Ebbinghaus et al.: *Zahlen*, Springer, Berlin 1983.
- [3] D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie* (9. Aufl.), Teubner, Stuttgart 1972.
- [4] D.R. Hughes, F.C. Piper: *Projective Planes*, Springer, New York 1972.
- [5] H. Karzel, H.-J. Kroll: *Geschichte der Geometrie seit Hilbert*, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1988.
- [6] H. Lenz: *Vorlesungen über projektive Geometrie*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965.
- [7] R. Lingenberg: *Grundlagen der Geometrie*, Bibliographisches Institut, Zürich 1978.
- [8] R. Moufang: Die Schnittpunktsätze des projektiven speziellen Fünfecknetzes in ihrer Abhängigkeit voneinander (Das A-Netz), *Math. Annalen* **106** (1932), 755–795.
- [9] R. Moufang: Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **9** (1933), 207–222.
- [10] G. Pickert: *Projektive Ebenen*, Springer, Berlin 1955.
- [11] I. Pieper-Seier: Zwei erfolgreiche Frauen in der Mathematik: Ruth Moufang (1905–1977) und Hel Braun (1914–1986), *Mitt. Math. Ges. Hamburg* **16** (1997), 25–38.
- [12] I. Pieper-Seier: Ruth Moufang (1905–1977): Eine Mathematikerin zwischen Industrie und Universität, in: *Aller Männerkultur zum Trotz* (Hrsg.: R. Tobies), Campus, Frankfurt 1997, S. 181–202.
- [13] M. Ronan: *Lectures on Buildings*, Academic Press, San Diego 1989.
- [14] W. Schwan: Streckenrechnung und Gruppentheorie, *Math. Zeitschrift* **3** (1919), 11–28.
- [15] W. Schwan: *Elementare Geometrie*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1929.
- [16] B. Srinivasan: Ruth Moufang, 1905–1977, *Math. Intelligencer* **6** (1984), 51–55.
- [17] F.W. Stevenson: *Projective Planes*, Freeman, San Francisco 1972.

Andrea Blunck  
 Institut für Geometrie  
 Technische Universität Wien  
 Wiedner Hauptstraße 8-10  
 A-1040 Wien, Austria  
 e-mail: blunck@geometrie.tuwien.ac.at