

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Mai 1999 an:

Hansruedi Widmer, Boldstrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

**Aufgabe 1138:** Es sei

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

Einschlägige Mathematikprogramme zeigen  $S = 1.1334\dots$ . Ist die Vermutung  $S = \pi^5/270$  richtig?

Michael Vowe, Therwil, CH

**Aufgabe 1139:** Man bestimme alle Paare  $(a, b)$  teilerfremder natürlicher Zahlen mit

$$a|(b^2 - 3) \quad \text{und} \quad b|(a^2 - 3).$$

Helmut Müller, Hamburg, D

**Aufgabe 1140 (Die einfache dritte Aufgabe):** Ist die folgende Gesetzmässigkeit auch in nicht-dezimalen Zahlssystemen gültig?

$$\begin{aligned} 1 \cdot 9 + 2 &= 11 \\ 12 \cdot 9 + 3 &= 111 \\ 123 \cdot 9 + 4 &= 1111 \\ 1234 \cdot 9 + 5 &= 11111 \\ 12345 \cdot 9 + 6 &= 111111 \\ 123456 \cdot 9 + 7 &= 1111111 \\ 1234567 \cdot 9 + 8 &= 11111111 \\ 12345678 \cdot 9 + 9 &= 111111111 \\ 123456789 \cdot 9 + 10 &= 1111111111 \end{aligned}$$

Peter Gallin, Bauma, CH

### Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 1997

**Aufgabe 1126.** Die Summe der Oberflächen zweier Körper von vorgegebenen Formen sei konstant. Es ist zu zeigen, dass die Volumina dieser Körper sich wie ihre Oberflächen verhalten, wenn die Summe dieser Volumina zu einem Minimum wird. Man berechne dann dieses Verhältnis aus den Oberflächen und Volumina zweier beliebiger formgleicher Körper und bestimme dessen Zahlwert, wenn der eine Körper ein Würfel und der andere ein regelmässiges Tetraeder ist.

Rolf Rose, Magglingen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es haben uns 13 Zuschriften erreicht. 12 Einsender konnten die Behauptung beweisen: Erich Badertscher (Bern, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Detlef Kaese (Hilden, D), Dieter Koller (Zürich, CH), J. Schaer (Calgary, Canada), Mok-Kong Shen (München, D), Fritz Siegerist (Meilen, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH) und Josef Züger (Tamins, CH). Neben speziellen Verfahren der Minimumsbestimmung ist das Einsetzen der Nebenbedingung in die zu minimierende Zielfunktion ebenso häufig zum Zug gekommen wie die elegante Methode mit einem Lagrange-Multiplikator, die von *J. Schaer*, *Mok-Kong Shen*, *François Sigrist* und *Roland Wyss* angewendet wurde. *Josef Züger* hat die Behauptung auf  $n$ -dimensionale Volumina und  $(n - 1)$ -dimensionale Oberflächen verallgemeinert. Wir folgen hier der Lösung von *Mok-Kong Shen*.

Für jeden der beiden Körper  $K_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) sei  $x_i$  die charakteristische Länge und  $\alpha_i$  bzw.  $\beta_i$  der Formfaktor für die Oberfläche  $F_i$  bzw. das Volumen  $V_i$ . Wir setzen

$$F = F_1 + F_2 = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2, \quad V = V_1 + V_2 = \beta_1 x_1^3 + \beta_2 x_2^3.$$

Gemäss der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode zur Bestimmung eines Extremums legen wir für konstantes  $F = c$  die Funktion  $L(x_1, x_2, \lambda)$  folgendermassen fest:

$$L(x_1, x_2, \lambda) := V + \lambda(F - c) = \beta_1 x_1^3 + \beta_2 x_2^3 + \lambda(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - c)$$

Durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 3\beta_1 x_1^2 + 2\lambda\alpha_1 x_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 3\beta_2 x_2^2 + 2\lambda\alpha_2 x_2 = 0$$

ergibt sich

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1}.$$

Daraus folgt für das gesuchte Verhältnis  $U$

$$U := \frac{F_1}{F_2} = \frac{\alpha_1 x_1^2}{\alpha_2 x_2^2} = \frac{\alpha_1^3 \beta_2^2}{\alpha_2^3 \beta_1^2} = \frac{\beta_1 x_1^3}{\beta_2 x_2^3} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Da

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 3\beta_1 x_1 > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 3\beta_2 x_2 > 0,$$

handelt es sich tatsächlich um ein Minimum. Für formgleiche Körper hat man  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  und damit  $x_1 = x_2$  und  $U = 1$ . Wählt man die Kantenlänge als charakteristische Länge für den Würfel und das regelmässige Tetraeder, so erhält man mit  $\alpha_1 = 6$ ,  $\alpha_2 = \sqrt{3}$ ,  $\beta_1 = 1$  und  $\beta_2 = \sqrt{2}/12$  das gesuchte Verhältnis:

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

**Aufgabe 1127.** Ein Kartenspiel mit  $n$  Karten wird folgendermassen gemischt: Die Karten werden in zwei möglichst gleich grosse Stapel aufgeteilt. Der erste Stapel enthält allenfalls eine Karte mehr als der zweite. Dann werden die beiden Stapel, Bildseite nach unten, nach dem "Reissverschluss-Verfahren" gemischt: Zuerst kommt die erste Karte des ersten Stapels, dann die erste Karte des zweiten Stapels, dann die zweite Karte des ersten Stapels usw. Ist es möglich, dass nach mehrfachem Wiederholen dieses Mischprozesses wieder die ursprüngliche Reihenfolge der Karten auftritt?

Chantal Spleiss, Zürich, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 17 Lösungen eingetroffen: Erich Badertscher (Bern, CH), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Hans Egli (Zürich, CH), Jon Florin (Zürich, CH), Stephanie Gloor (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Lorenz Halbeisen (Barcelona, E), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), J. Schaer (Calgary, Canada), Mok-Kong Shen (München, D), Fritz Siegerist (Meilen, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH). Im folgenden die Lösung nach *Erich Badertscher*: Zuerst sei  $n$  ungerade und  $r_n = \min \{r \mid 2^r \equiv 1 \pmod{n}\}$  die Ordnung von 2 in der primen Restklassengruppe mod  $n$ . Numerieren wir die Karten von oben nach unten mit  $0, \dots, n-1$ , entspricht das Mischen der Verdoppelung des Kartenindex mod  $n$ . Das  $r$ -fache Mischen entspricht der Multiplikation mit  $2^r$  und bringt die Karten in die ursprüngliche Reihenfolge, wenn die Gleichungen

$$2^r x \equiv x \pmod{n}, \quad x = 0, \dots, n-1$$

alle erfüllt sind, also genau wenn  $2^r \equiv 1 \pmod{n}$ . Das erste Mal ist dies für  $r = r_n$  der Fall.

Ist  $n$  gerade, bleibt die unterste Karte beim Mischen an ihrem Platz, die übrigen  $n-1$  Karten werden wie vorher gemischt. Sie sind nach  $r_{n-1}$  Mischungen zum ersten Mal wieder in der ursprünglichen Reihenfolge.

*Michael Vowe* weist darauf hin, dass Probleme über das Kartenmischen in [1, S. 128–144] besprochen werden.

### Literatur

[1] Gardner, Martin: Mathematischer Karneval. Ullstein 1977.

**Aufgabe 1128 (Die einfache dritte Aufgabe).** Für die positiven Zahlen  $a, b, c$  mit  $a + b + c = 1$  gilt

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64 .$$

Michael Vowe, Therwil, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 32 Einsendungen mit zum Teil mehreren Lösungswegen und Verallgemeinerungen eingetroffen: Fónyad Árpád (St. Gallen, CH), Šefket Arslanagić (Sarajevo, Bosnien und Herzegowina), Erich Badertscher (Bern, CH), G. Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Paul Bracken (Montreal, Canada), Erhard Braune (Linz, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Hans Egli (Zürich, CH), Jon Florin (Zürich, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Hilden, D), Hans Kappus (Rodorsdorf, CH), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Chr. A. Meyer (Bern, CH), Wolfgang Moldenhauer (Erfurt, D), J. Schaer (Calgary, Canada), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), Mok-Kong Shen (München, D), Fritz Siegerist (Meilen, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Hansjürg Stocker (Wädenswil, CH), Paul Streckeisen (Zürich, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Peter Zimmermann (Glarus, CH).

Die meisten Einsender verwenden die Ungleichungen über das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel. Im folgenden die Lösung nach *Jany C. Binz*: Wegen  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{abc}$  wird

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{2}{abc}.$$

Mit  $\frac{1}{3} = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$  und  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$  erhalten wir

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 27 = 64,$$

mit Gleichheit genau für  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .

Etliche Einsender beweisen Verallgemeinerungen, insbesondere die naheliegende Verallgemeinerung: Für die  $n$  positiven Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  mit  $\sum_{k=1}^n a_k = 1$  gilt

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) \geq (1+n)^n.$$

*Walther Janous* weist darauf hin, dass die Aufgabe bereits 1970 in der 1. Österreichischen Mathematik-Olympiade verwendet wurde [1]. *Hansjürg Stocker* bemerkt, dass die Aufgabe auch in [2] samt Lösung publiziert wurde. Das Problem wurde nach Erscheinen unserer Aufgabe auch in [3] publiziert und besprochen.

## Literatur

- [1] Baron, G. und Windischbacher, E.: Österreichische Mathematik-Olympiaden 1970–1989. Universitäts-Verlag Wagner, Innsbruck 1990.
- [2] Honsberger, Ross: In Pólya's Footsteps (Miscellaneous Problems and Essays). Dolciani Mathematical Expositions Number 19. The Mathematical Association of America, 1997.
- [3] Sato, Naoki: Tips on Inequalities. Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, April 1998, 161–168.